

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

28. svibnja 2012.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **četvrtak, 31. svibnja 2012. u 11 sati.**

ZADATAK 1

1

(15 bodova.) Težinska integracijska formula ima oblik

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k),$$

gdje su x_k čvorovi integracije, a w_k su težinski koeficijenti.

- Napišite definiciju **polinomnog** stupnja egzaktnosti d ovakve integracijske formule.
- Napišite iskaz teorema o **karakterizaciji** integracijskih formula “visokog” stupnja egzaktnosti, kad je $d > n-1$.
- Koliki je **maksimalni** stupanj egzaktnosti? Ukratko komentirajte zašto.
- Što vrijedi za **težinske** koeficijente w_k u Gaussovima integracijskim formulama i koje posljedice to ima za **konvergenciju** kad $n \rightarrow \infty$?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

28. svibnja 2012.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \ln(px + 1)$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

28. svibnja 2012.

(15 bodova.) Zadan je integral (exp označava eksponencijalnu funkciju, tj. $\exp(z) = e^z$)

$$\int_0^1 (x+3) \exp\left(-\frac{4}{3}x+2\right) dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

28. svibnja 2012.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvor x_1 u težinskoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{3/4} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f\left(\frac{3}{4}\right)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{1/4}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

28. svibnja 2012.

(10 bodova.) Nađite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

28. svibnja 2012.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **četvrtak, 31. svibnja 2012. u 11 sati.**

ZADATAK 1

1

(15 bodova.) Neka je f zadana funkcija na intervalu $[a, b]$.

- Napišite iskaz teorema o **globalnoj** konvergenciji Newtonove metode za nalaženje nultočaka funkcije f u $[a, b]$.
- Koliko nultočaka tada ima f u $[a, b]$? Kako treba izabrati **startnu** točku za iteracije Newtonovom metodom i koja je geometrijska interpretacija tog izbora?
- Ukratko komentirajte što se može dogoditi ako **pogrešno** izaberemo startnu točku.
- Definirajte pojam **reda konvergencije** niza iteracija $\{x_n \in \mathbb{R} \mid n \geq 0\}$ koji konvergira prema broju α (nultočki neke funkcije f).
- Koliki je (najmanji) red konvergencije Newtonove metode u okolini jednostruke, odnosno, višestruke nultočke?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

28. svibnja 2012.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{px + 1}$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Nprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

28. svibnja 2012.

(15 bodova.) Zadan je integral (exp označava eksponencijalnu funkciju, tj. $\exp(z) = e^z$)

$$\int_0^1 (x+3) \exp\left(-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

28. svibnja 2012.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvor x_1 u težinskoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{2/3} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f\left(\frac{4}{5}\right)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{1/3}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

28. svibnja 2012.

(10 bodova.) Nađite najveće negativno rješenje jednadžbe

$$\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

28. svibnja 2012.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **četvrtak, 31. svibnja 2012. u 11 sati.**

ZADATAK 1

1

(15 bodova.) Težinska integracijska formula ima oblik

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

gdje su x_k čvorovi integracije, a w_k su težinski koeficijenti.

- Napišite definiciju **polinomnog** stupnja egzaktnosti d ovakve integracijske formule.
- Napišite iskaz teorema o **karakterizaciji** tzv. “**interpolacijskih**” integracijskih formula, kad je $d \geq m$ (kao kod Newton–Cotesovih formula, **ne** zahtijeva se $d > m$, osim ako to “slučajno” vrijedi zbog simetrije).
- Što vrijedi za **težinske** koeficijente w_k u interpolacijskim integracijskim formulama? Jesu li ti koeficijenti uvijek pozitivni?
- Moraju li takve integracijske formule **konvergirati** prema egzaktnom integralu funkcije f , kad $m \rightarrow \infty$?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

28. svibnja 2012.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{px + 1}$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

28. svibnja 2012.

(15 bodova.) Zadan je integral (exp označava eksponencijalnu funkciju, tj. $\exp(z) = e^z$)

$$\int_0^1 (x - 4) \exp\left(\frac{4}{3}x + 1\right) dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

28. svibnja 2012.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvor x_1 u težinskoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{1/4} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f\left(\frac{1}{4}\right)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/4}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

28. svibnja 2012.

(10 bodova.) Nađite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

28. svibnja 2012.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **četvrtak, 31. svibnja 2012. u 11 sati.**

ZADATAK 1

1

(15 bodova.) Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ niz **moničnih** ortogonalnih polinoma (vodeći koeficijent svakog polinoma je jednak 1), obzirom na integralni skalarni produkt definiran težinskom funkcijom $w \geq 0$ na intervalu $[a, b]$.

- Kako izgleda tročlana **rekurzija** za polinome p_n ?
- Izvedite relacije za **koeficijente** u toj rekurziji, u terminima pripadnog skalarnog produkta $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Što se zna o **nultočkama** ortogonalnog polinoma p_n , stupnja n ?
- Ovaj niz polinoma zadovoljava i tzv. **diskretnu** ortogonalnost. Objasnite ukratko što to znači.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

28. svibnja 2012.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{px+1}}$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

28. svibnja 2012.

(15 bodova.) Zadan je integral (exp označava eksponencijalnu funkciju, tj. $\exp(z) = e^z$)

$$\int_0^1 (x - 4) \exp\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

28. svibnja 2012.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvor x_1 u težinskoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{1/3} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f\left(\frac{1}{3}\right)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{2/3}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

28. svibnja 2012.

(10 bodova.) Nađite najveće negativno rješenje jednadžbe

$$\operatorname{tg} x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{6} = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!