

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

8. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 14. lipnja 2010. u 10 sati.**

ZADATAK 1

1

(15 bodova.)

- (a) Kako izgleda tročlana rekurzija za niz **moničnih** ortogonalnih polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$ (vodeći koeficijent svakog polinoma je jednak 1)?
- (b) Izvedite relacije za **koeficijente** u toj rekurziji, u terminima pripadnog skalarnog produkta $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

8. lipnja 2010.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = e^{px}$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Nепrekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

8. lipnja 2010.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 (2x + 1) \ln(x + 3) dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku. Formule za integrale: $\int \ln x dx = x \ln x - x$, $\int x \ln x dx = (x^2/2) \ln x - x^2/4$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

8. lipnja 2010.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvor x_1 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{2/3}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

8. lipnja 2010.

(10 bodova.) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \sin(x - 2)$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

8. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 14. lipnja 2010. u 10 sati.**

ZADATAK 1

1

(15 bodova.)

- (a) Definirajte pojam **reda konvergencije** niza iteracija $\{x_n \in \mathbb{R} \mid n \geq 0\}$ koji konvergira prema broju α (nultočki neke funkcije f).
- (b) Pretpostavimo da Newtonova metoda konvergira prema **jednostrukoj** nultočki α funkcije f . Ako znamo da je α i točka **infleksije** za f , koliki je (minimalno) **red konvergencije** Newtonove metode? Dokažite tvrdnju!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

8. lipnja 2010.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \operatorname{ch}(px)$$

na intervalu $[-1, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

8. lipnja 2010.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 (2x + 3) \ln(x + 1) dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku. Formule za integrale: $\int \ln x dx = x \ln x - x$, $\int x \ln x dx = (x^2/2) \ln x - x^2/4$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

8. lipnja 2010.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvor x_2 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{5/2}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

8. lipnja 2010.

(10 bodova.) Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$\exp\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \sin(x + 1)$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

8. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 14. lipnja 2010. u 10 sati.**

ZADATAK 1

1

(15 bodova.)

- (a) Definirajte pojam **jednostavne iteracijske funkcije** φ za generiranje niza iteracija $\{x_n \in \mathbb{R} \mid n \geq 0\}$. Iskažite neku tvrdnju koja garantira konvergenciju takvog niza prema fiksnoj točki α funkcije φ .
- (b) Pokažite da funkcija

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

zadovoljava sve uvjete tog teorema u nekoj okolini točke $\alpha = \sqrt{a}$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

8. lipnja 2010.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = e^{-px}$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Nепrekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

8. lipnja 2010.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 (2x + 1) \ln(x + 2) dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku. Formule za integrale: $\int \ln x dx = x \ln x - x$, $\int x \ln x dx = (x^2/2) \ln x - x^2/4$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

8. lipnja 2010.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvor x_2 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{5/3}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

8. lipnja 2010.

(10 bodova.) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 1 + \sin x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

8. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 14. lipnja 2010. u 10 sati.**

ZADATAK 1

1

(15 bodova.)

- (a) Koja je veza između iterativnih metoda za nalaženje nultočke funkcije f i jednostavnih iteracijskih funkcija φ ? Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija φ da bi metoda funkcijskih iteracija imala **red konvergencije** $p \in \mathbb{N}$?
- (b) Pokažite da Newtonova metoda u okolini **jednostruke** nultočke ima red konvergencije barem 2.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

8. lipnja 2010.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos(px)$$

na intervalu $[-1, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

8. lipnja 2010.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 (3x + 1) \ln(x + 3) dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku. Formule za integrale: $\int \ln x dx = x \ln x - x$, $\int x \ln x dx = (x^2/2) \ln x - x^2/4$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

8. lipnja 2010.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvor x_1 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

8. lipnja 2010.

(10 bodova.) Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$\exp\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + \sin x = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!