Numerička matematika — 2. kolokvij (1. srpnja 2009.)

Zadatak 1 (10 bodova.) "Teorijsko pitanje".

(A) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\operatorname{rang}(G) = n$.

(a) Napišite "puni" i "skraćeni" oblik **QR faktorizacije** matrice G.

(b) Napišite iskaz teorema o **egzistenciji i jedinstvenosti** QR faktorizacije matrice G.

(c) Ukratko komentirajte što se događa ako G **nema** puni rang po stupcima.

(B) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, uz $n \geq m$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\operatorname{rang}(A) = m$, i neka je $b \in \mathbb{R}^n$ zadani vektor.

(a) Napišite pripadnu matričnu formulaciju problema **najmanjih kvadrata**.

(b) Napišite iskaz teorema o **karakterizaciji** rješenja problema najmanjih kvadrata preko sustava **normalnih jednadžbi** i njegovu geometrijsku interpretaciju.

(c) Ukratko komentirajte što se događa ako A **nema** puni rang po stupcima.

(C) Težinska integracijska formula ima oblik

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k),$$

gdje su x_k čvorovi integracije, a w_k su težinski koeficijenti.

(a) Napišite definiciju **polinomnog** stupnja egzaktnosti d ovakve integracijske formule.

(b) Napišite iskaz teorema o **karakterizaciji** integracijskih formula "visokog" stupnja egzaktnosti, kad je $d > n - 1$.

(c) Koliki je **maksimalni** stupanj egzaktnosti? Ukratko komentirajte zašto.

(D) Neka je f zadana funkcija na intervalu $[a, b]$.

(a) Napišite iskaz teorema o **globalnoj** konvergenciji Newtonove metode za nalaženje nultočaka funkcije f u $[a, b]$.

(b) Koliko nultočaka tada ima f u $[a, b]$? Kako treba izabrati **startnu** točku za iteracije Newtonovom metodom i koja je geometrijska interpretacija tog izbora?

(c) Ukratko komentirajte što se može dogoditi ako **pogrešno** izaberemo startnu točku.

Zadatak 2 (10 bodova.) Neprekidna metoda najmanjih kvadrata — Fourier.

(A) Zadana je funkcija

$$f(x) = 2x - 4$$

na intervalu $[0, 4]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente b_n, $n \in \mathbb{N}$, u aproksimaciji funkcije f funkcijom oblika

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin \frac{n\pi x}{2},$$

za bilo koji $N \in \mathbb{N}$.

Uputa: Skup funkcija $\{\varphi_n(x) := \sin(n\pi x/2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonalan sustav funkcija obzirom na skalarni produkt definiran formulom

$$\langle f, g \rangle := \int_0^4 f(x)g(x)\,dx,$$

pa koeficijenti u aproksimaciji ne ovise o N.

(B) Zadana je funkcija

$$f(x) = |2x - 3|$$

na intervalu $[0, 3]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente a_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, u aproksimaciji funkcije f funkcijom oblika

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos \frac{2n\pi x}{3},$$

za bilo koji $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Uputa: Skup funkcija $\{\varphi_n(x) := \cos(2n\pi x/3) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,\}$ je ortogonalan sustav funkcija obzirom na skalarni produkt definiran formulom

$$\langle f, g \rangle := \int_0^3 f(x)g(x)\,dx,$$

pa koeficijenti u aproksimaciji ne ovise o N.

(C) Zadana je funkcija

$$f(x) = 3 - 2x$$

na intervalu $[0, 3]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente b_n, $n \in \mathbb{N}$, u aproksimaciji funkcije f funkcijom oblika

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin \frac{2n\pi x}{3},$$

za bilo koji $N \in \mathbb{N}$.

Uputa: Skup funkcija $\{\varphi_n(x) := \sin(2n\pi x/3) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonalan sustav funkcija obzirom na skalarni produkt definiran formulom

$$\langle f, g \rangle := \int\limits_0^3 f(x)g(x)\,dx,$$

pa koeficijenti u aproksimaciji ne ovise o N.

(D) Zadana je funkcija

$$f(x) = 1 - |x - 2|$$

na intervalu $[0, 4]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente a_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, u aproksimaciji funkcije f funkcijom oblika

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{2},$$

za bilo koji $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Uputa: Skup funkcija $\{\varphi_n(x) := \cos(n\pi x/2) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ je ortogonalan sustav funkcija obzirom na skalarni produkt definiran formulom

$$\langle f, g \rangle := \int\limits_0^4 f(x)g(x)\,dx,$$

pa koeficijenti u aproksimaciji ne ovise o N.

Zadatak 3 (15 bodova.) Numerička integracija — trapez/Simpson.

(A) Zadan je integral

$$\int\limits_0^1 (3x + 1)\sqrt{x + 2}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

(B) Zadan je integral

$$\int\limits_0^1 (2x - 1)\sqrt{x + 1}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

(C) Zadan je integral

$$\int_0^1 (3x+2)\sqrt{x+2}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

(D) Zadan je integral

$$\int_0^1 (2x+1)\sqrt{x+1}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

Zadatak 4 (15 bodova.) Težinske integracijske formule — čvorovi i težine.

(A) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{2/3}\, f(x)\,dx \approx w_0 f(1/3) + w_1 f(4/5),$$

te čvor x_1 i težinu $\widetilde{w}_1$ u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^1 x^{2/3}\, f(x)\,dx \approx \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{1/3}$ i nađite prave greške.

(B) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{-1/3}\, f(x)\,dx \approx w_0 f(1/5) + w_1 f(2/3),$$

te čvor x_1 i težinu $\widetilde{w}_1$ u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^1 x^{-1/3}\, f(x)\,dx \approx \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{4/3}$ i nađite prave greške.

(C) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{1/3}\, f(x)\, dx \approx w_0 f(1/4) + w_1 f(3/4),$$

te čvor x_1 i težinu $\widetilde{w}_1$ u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^1 x^{1/3}\, f(x)\, dx \approx \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{2/3}$ i nađite prave greške.

(D) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{-2/3}\, f(x)\, dx \approx w_0 f(1/6) + w_1 f(3/5),$$

te čvor x_1 i težinu $\widetilde{w}_1$ u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^1 x^{-2/3}\, f(x)\, dx \approx \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{5/3}$ i nađite prave greške.

Zadatak 5 (15 bodova.) Nelinearne jednadžbe.

(A) Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$e^x - 3 = x \cos x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(B) Nađite najmanju nultočku funkcije

$$f(x) = x \ln x - \cos x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(C) Nađite najveću nultočku funkcije

$$f(x) = xe^x - \sin x - 1$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(D) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$xe^{-x} + 1 = 2x\sqrt{x}$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!