

UVOD U NUMERIČKU MATEMATIKU

1. kolokvij, 12. 4. 2005.

Ime i prezime: _____

1	2	3	Σ

JMBAG: _____

- Napomene:**
- Prije rješavanja zadatka, pažljivo ga pročitajte i svaki zadatak rješavajte na posebnom listu papira.
 - Broj u uglatim zagradama iza rednog broja zadatka je broj bodova koje taj zadatak donosi.
 - Dozvoljena pomagala na ispitu su pribor za pisanje i brisanje, kalkulator i papir sa formulama po izboru (ne i rješenim zadacima).
 - Međusobno dogovaranje i razmjena dozvoljenih pomagala nisu dozvoljeni.

- (10) 1. Zadana je funkcija $f(x) := x^3 + 1$. Funkciju f aproksimiramo na intervalu $[0, 1]$ linearnom funkcijom p , koja interpolira funkciju f u točkama 0 i $t \in (0, 1]$.

Odredite t tako da uniformna pogreška aproksimacije na intervalu $[0, 1]$ bude minimalna.

- (10) 2. Funkciju $f(x) := e^{|x-2|}$ aproksimiramo na intervalu $[0, 3]$ na slijedeći način: interval $[0, 3]$ podijelimo na dva dijela $[0, T]$ i $[T, 3]$, pa na dijelu $[0, T]$ interpoliramo funkciju f interpolacijskim polinomom p_1 , a na dijelu $[T, 3]$ interpoliramo funkciju f interpolacijskim polinomom p_2 . Polinomi p_1 i p_2 su stupnja 2 i interpoliraju f na ekvidistantnoj mreži intervala $[0, T]$, odnosno $[T, 3]$.

Odredite T i ocjenu uniformne pogrešake polinoma p_1 i p_2 .

- (10) 3. Na intervalu $[a, b]$ zadana je funkcija $f \in C^2[a, b]$. Neka je p interpolacijski polinom stupnja 2 koji interpolira vrijednosti funkcije f u točkama a i b te vrijednost derivacije funkcije f u točki $c \in (a, b)$. Odredite koji uvjet točka c treba zadovoljavati da bi interpolacijski polinom p postojao i bio jedinstven.

Ivo Beroš, Ilja Gogić

UVOD U NUMERIČKU MATEMATIKU

1. kolokvij, 12. 4. 2005.

Ime i prezime: _____

1	2	3	Σ

JMBAG: _____

- Napomene:**
- Prije rješavanja zadatka, pažljivo ga pročitajte i svaki zadatak rješavajte na posebnom listu papira.
 - Broj u uglatim zagradama iza rednog broja zadatka je broj bodova koje taj zadatak donosi.
 - Dozvoljena pomagala na ispitu su pribor za pisanje i brisanje, kalkulator i papir sa formulama po izboru (ne i rješenim zadacima).
 - Međusobno dogovaranje i razmjena dozvoljenih pomagala nisu dozvoljeni.

(10) 1. Funkciju

$$f(x) := |\cos(\pi x)|$$

aproksimiramo na intervalu $[0, 1.5]$ na slijedeći način: interval $[0, 1.5]$ podijelimo na dva dijela $[0, T]$ i $[T, 1.5]$, pa na dijelu $[0, T]$ napravimo po dijelovima linearnu interpolaciju na ekvidistantnoj mreži s korakom h_1 , a na dijelu $[T, 1.5]$ po dijelovima linearnu interpolaciju na ekvidistantnoj mreži s korakom h_2 , ali tako da pogreška ne prelazi 0.01.

Odredite T, h_1 i h_2 .

- (10) 2. Funkciju $f(x) := e^x$ aproksimiramo na intervalu $[0, 3]$ interpolacijskim polinomom p stupnja 2 na Čebiševljevoj mreži.
- Odredite polinom p .
 - Izračunajte $p(1)$.
 - Nađite ocjenu uniformne pogreške interpolacije na $[0, 3]$.
- (10) 3. Na intervalu $[a, b]$ zadana je funkcija $f \in C^3[a, b]$. Neka je p interpolacijski polinom stupnja 3 koji interpolira vrijednosti funkcije f u točkama a i b , vrijednost prve derivacije funkcije f u točki b i vrijednost druge derivacije od f u točki $c \in (a, b)$. Odredite koji uvjet točka c treba zadovoljavati da bi interpolacijski polinom p postojao i bio jedinstven.

UVOD U NUMERIČKU MATEMATIKU

1. kolokvij, 12. 4. 2005.

Ime i prezime: _____

1	2	3	Σ

JMBAG: _____

- Napomene:**
- Prije rješavanja zadatka, pažljivo ga pročitajte i svaki zadatak rješavajte na posebnom listu papira.
 - Broj u uglatim zagradama iza rednog broja zadatka je broj bodova koje taj zadatak donosi.
 - Dozvoljena pomagala na ispitu su pribor za pisanje i brisanje, kalkulator i papir sa formulama po izboru (ne i rješenim zadacima).
 - Međusobno dogovaranje i razmjena dozvoljenih pomagala nisu dozvoljeni.

- (10) 1. Funkciju $f(x) := \sin |1 - x|$ aproksimiramo na intervalu $[0, 3]$ na slijedeći način: interval $[0, 3]$ podijelimo na dva dijela $[0, T]$ i $[T, 3]$, pa na dijelu $[0, T]$ interpoliramo funkciju f interpolacijskim polinomom p_1 , a na dijelu $[T, 1]$ interpoliramo funkciju f interpolacijskim polinomom p_2 . Polinomi p_1 i p_2 su stupnja 2 i interpoliraju f na ekvidistantnoj mreži intervala $[0, T]$, odnosno $[T, 3]$.

Odredite T i ocjenu uniformne pogreške polinoma p_1 i p_2 .

- (10) 2. Funkciju $f(x) := e^x$ aproksimiramo na intervalu $[0, 3]$ po dijelovima linearnom funkcijom s na ekvidistantnoj mreži.

- Odredite minimalan broj čvorova takav da uniformna pogreška interpolacije ne prelazi $\varepsilon := 10^{-4}$.
- Izračunajte $s(1)$.

- (10) 3. Na intervalu $[a, b]$ zadana je funkcija $f \in C^3[a, b]$. Neka je p interpolacijski polinom stupnja 3 koji interpolira vrijednosti funkcije f u točkama a i b , vrijednost prve derivacije funkcije f u točki $c \in (a, b)$ i vrijednost druge derivacije funkcije f u točki a . Odredite koji uvjet točka c treba zadovoljavati da bi interpolacijski polinom p postojao i bio jedinstven.

Ivo Beroš, Ilja Gogić

UVOD U NUMERIČKU MATEMATIKU

1. kolokvij, 12. 4. 2005.

Ime i prezime: _____

1	2	3	Σ

JMBAG: _____

- Napomene:**
- Prije rješavanja zadatka, pažljivo ga pročitajte i svaki zadatak rješavajte na posebnom listu papira.
 - Broj u uglatim zagradama iza rednog broja zadatka je broj bodova koje taj zadatak donosi.
 - Dozvoljena pomagala na ispitu su pribor za pisanje i brisanje, kalkulator i papir sa formulama po izboru (ne i rješenim zadacima).
 - Međusobno dogovaranje i razmjena dozvoljenih pomagala nisu dozvoljeni.

- (10) 1. Zadana je funkcija $f(x) := x^3 + 1$. Funkciju f na intervalu $[0, 5]$ aproksimiramo po dijelovima linearnom interpolacijom i to tako da interval $[0, 5]$ podijelimo na dva dijela: $[0, T]$ i $[T, 5]$, te na svakom od njih napravimo ekvidistantnu mrežu s korakom h_1 , odnosno h_2 . Fiksiramo traženu točnost $\varepsilon := 10^{-1}$ koju zahtijevamo na cijelom intervalu. Nađite takav T da ukupan broj čvorova potreban za postizanje tražene točnosti bude minimalan.
- (10) 2. Funkciju $f(x) := e^x$ aproksimiramo na intervalu $[0, 3]$ interpolacijskim polinomom p stupnja 2 na ekvidistantnoj mreži.
- Odredite polinom p .
 - Izračunajte $p(1)$.
 - Nađite ocjenu maksimalne pogreške interpolacije na $[0, 3]$. Ne koristiti ocjenu za $\max_{x \in [x_0, \dots, x_n]} |(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)|$
- (10) 3. Na intervalu $[a, b]$ zadana je funkcija $f \in C^3[a, b]$. Neka je p interpolacijski polinom stupnja 3 koji interpolira vrijednosti funkcije f u točkama a i b , vrijednost prve derivacije funkcije f u točki a i vrijednost druge derivacije od f u točki $c \in (a, b)$. Odredite koji uvjet točka c treba zadovoljavati da bi interpolacijski polinom p postojao i bio jedinstven.