Strojno učenje

Markovljevi modeli

Tomislav Šmuc

Svibanj, 2012

Literatura

Bayesian Learning => Hidden Markov Models

Chris Bishop: Pattern Recognition and Machine Learning
Chapter 12: Sequential Models
L.R. Rabiner: ”A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition”

Bayesov pristup učenju modela sekvenci

- Markovljevi modeli sekvenci (lanaca)
  (Markov chain models)

- Skriveni Markovljevi modeli
  (Hidden Markov Models)

Markovljevi modeli

Opis sekvence

- Enumerirana stanja (=uočena stanja)

  1,2, … N

- Uočene/mjerene („Observations”) sekvence

  q1,q2,q3,…qT

Markovljev lanac 1. reda

Pretpostavka I:

$$P(q_t = j | q_{t-1} = i, q_{t-2} = k, \ldots, q_1 = m) = P(q_t = j | q_{t-1} = i)$$

Pretpostavka II: Stacionarnost

$$P(q_t = j | q_{t-1} = i) = P(q_{t+l} = j | q_{t+l-1} = i)$$

Markovljevi modeli

Matrica prijelaza stanja (state transition matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Gdje je

$$a_{ij} = P(q_t = j | q_{t-1} = i)$$

Uvjeti na a_{ij}:

$$a_{ij} \geq 0, \qquad \forall i, j$$

$$\sum_{j}^{N} a_{ij} \geq 0, \qquad \forall i$$

Markovljevi modeli

Primjer:
3 stanja:
sunčano, kišno, oblačno (s,k,o)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ss & sk & so \\ ks & kk & ko \\ os & ok & oo \end{bmatrix}$$

Pitanje:

Izračunati vjerojatnost sekvence *sskkos?*

Kolika je vjerojatnost da tjedan dana bude sunčano ?

Markovljevi modeli

Bayesovo pravilo

$$P(A,B) = P(A|B) * P(B)$$

Pravilo Markov. Lanca

$$P(opservirana\ sekvenca|model) = \frac{P(opservirana\ sekvenca)}{P(model)}$$

$$P(opservirana\ sekvenca|model) \sim P(opservirana\ sekvenca)$$

$$= P(s,s,k,k,o,s)$$

$$P(s,s,k,k,o,s) = P(s)P(s|s)P(s,k,k,o,s)$$

$$P(s,s,k,k,o,s) = P(s)P(s|s)P(s|k)P(k,k,o,s)$$

$$\boldsymbol{P(s,s,k,k,o,s) = P(s)P(s|s)P(s|k)\ldots P(o|s)}$$

$$P(s) = \pi_s - apriorna\ vjerojatnost$$

Kolika je **vjerojatnost da tjedan dana** bude sunčano ?
(sekvenca „ostaje” u istom **stanju *i*** točno ***n*** **vremenskih jedinica**)

$$p_i(n) = P(q_1 = i, q_2 = i, \dots, q_n = i, q_n + 1 \neq i) =$$
$$= \pi_i (a_{ii})^{n-1} (1 - a_{ii})$$

(za π_i=0.3, i $a_{ii} = ss = 0.5;\ p_s(7) = ?$)

Koja je očekivana vrijednost trajanja neprekinutih sunčanih perioda $\overline{n}$?

$$\bar{n} = n \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_i(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (a_{ii})^{n-1} (1 - a_{ii}) = \frac{1}{1 - a_{ii}}$$

Diskretni Markovljevi modeli – svojstva

- **Homogenost** - Vjerojatnosti prijelaza se ne mijenjaju tijekom vremena
- **Ergodičnost** – Ako u bilo kojem momentui možemo prijeći iz bilo kojeg stanja u bilo koje stanje $P_t(a,b) > 0, \forall t, a, b$

Skriveni Markovljevi modeli (HMM)

- Stanja u kojima se sustav nalazi nisu ono što opserviramo
- Opservacije su vjerojatnosne funkcije stanja (uvjetne vjerojatnosti)
- Prijelazi stanja su uvjetne vjerojatnosti

Primjeri:

- Bacanje dvije kocke (jedna namještena, druga ispravna)
- Vađenje kockica različitih boja (*C*) iz različitih šešira (*N)*
  - svaki šešir ima drugu distribuciju boja C

Zašto “Hidden Markov Models”?

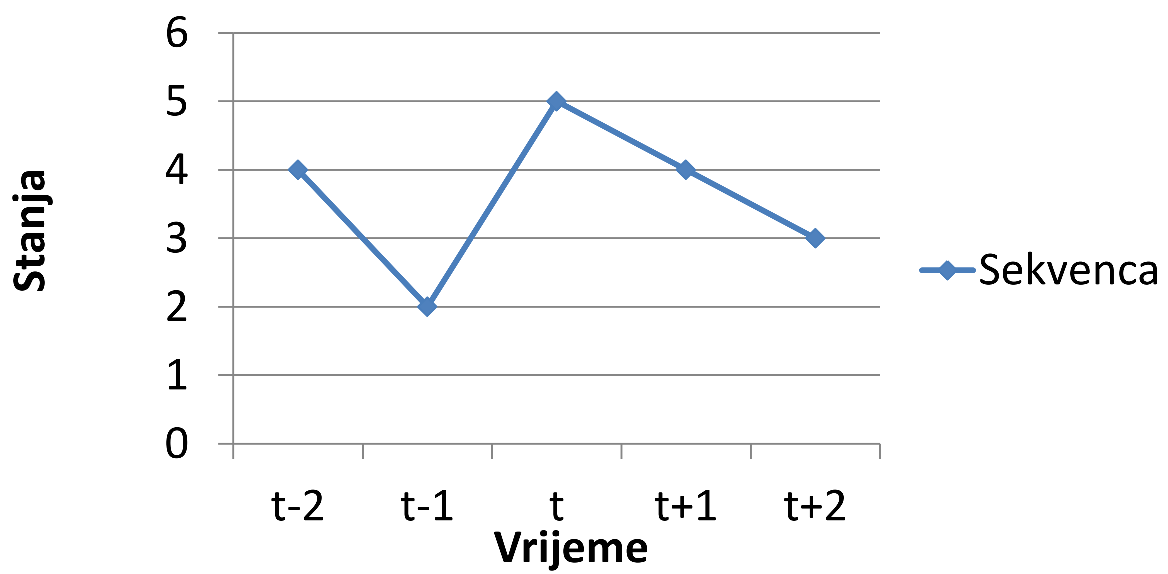
- Promatrač vidi „emitirane simbole” (opservacije) ali ne zna u kojem se stanju HMM trenutno nalazi !
  - Praktični primjeri:
    - Prepoznavanje govora (fonemi=emitirani simboli; stanja=slovo,riječ, pauza)
    - Prepoznavanje gena u DNA (A,G,C,T=emitirani simboli; stanja=exon; intron)

- Osnovni zadatak je zaključiti koja su najvjerojatnija stanja HMM na bazi sekvenc(e)i emitiranih simbola.
  - Maximum likelihood estimation (maksimalna izglednost)

Bacanje dvije kocke (jedna namještena, druga ispravna)

1. Odaberi slučajno jednu od dvije kocke (odabir stanja)
2. Baci kocku i upamti broj (opservacija!)
3. Ponavljaj (1. i 2.) *T* puta

Trellis graf - sekvenca



o_{t-2} o_{t-1} o_t o_{t+1} o_{t+2}

Sekvenca opservacija

Skriveni Markovljevi modeli (HMM)

Dijelovi HMM:

- S – skup stanja $S = \{1,2, \dots, N_S\}$
- N_S - broj stanja N_S
- O – skup simbola (opservacije) $O = \{1,2, \dots, M_o\}$
- A – matrica vjerojatnosti prijelaza stanja

$$a_{ij} = P(q_{t\,+\,1\,=}\, j | q_t = i) \qquad 1 \leq i, j \leq Ns$$

- *B* – Distribucija vjerojatnosti emisije opservacija

$$\mathrm{b_j(k)} = P(o_t = k | q_t = j) \qquad 1 \leq k \leq Mo$$

- π – inicijalna vjerojatnost stanja

$$\pi_i = P(q_1 = i) \qquad 1 \leq i \leq Ns$$

- θ – oznaka čitavog modela $\theta = (A, B, \pi)$

Osnovni problemi koje želimo rješavati:

1. Dana sekvenca $O=\{o_1,o_2,o_3,\ldots,o_T\}$ i model $\Theta=(A,B,\pi)$ - izračunati $P(O|\Theta)$ (Forward alg.)

2. Dana sekvenca $O=\{o_1,o_2,o_3,\ldots,o_T\}$ i model $\Theta=(A,B,\pi)$ - izračunaj optimalnu sekvencu skrivenih stanja $q=\{q_1,q_1,q_3,\ldots,q_T)$ (Viterbi alg.)

3. Uz zadan skup sekvenci $O_i=\{o_1,o_2,o_3,\ldots,o_T\}_i, i=1,2,\ldots,S$ pronaći $\Theta=(A,B,\pi)$ model koji maksimizira $P(O|\Theta)$

Baum-Welch alg. (Forward-Backward)

Osnovni problemi koje želimo rješavati:

1. Dana sekvenca $O=\{o_1, o_2, o_3, \ldots, o_T\}$ i model $\Theta=(A, B, \pi)$ - izračunati $P(O|\Theta)$
   - Skrivena stanja kompliciraju evaluaciju
   - Računanje izglednosti $P(O|\Theta)$ može pomoći u određivanju najboljeg modela Θ !

Skriveni Markovljevi modeli (HMM)

- Problem: Izračunati $P(O \mid \Theta)$

- Algoritam
  - Neka je $q = \{q_1, q_1, q_3, \ldots, q_T)$ sekvenca stanja
  - Pretpostavka – opservacije su nezavisne

$$P(O \mid q, \Theta) = \prod_{i=1}^{T} P(o_t \mid q_t, \Theta) = b_{q1}(o_1) b_{q2}(o_2) \ldots b_T(o_T)$$

- Vjerojatnost neke sekvence stanja

$$P(q \mid \Theta) = \prod_{i=1}^{T} \pi_{q1} a_{q1q2} a_{q2q3} \ldots a_{qT-1qT}$$

isto tako vrijedi

$$P(O, q \mid \Theta) = P(O \mid q, \Theta) \cdot P(q \mid \Theta)$$

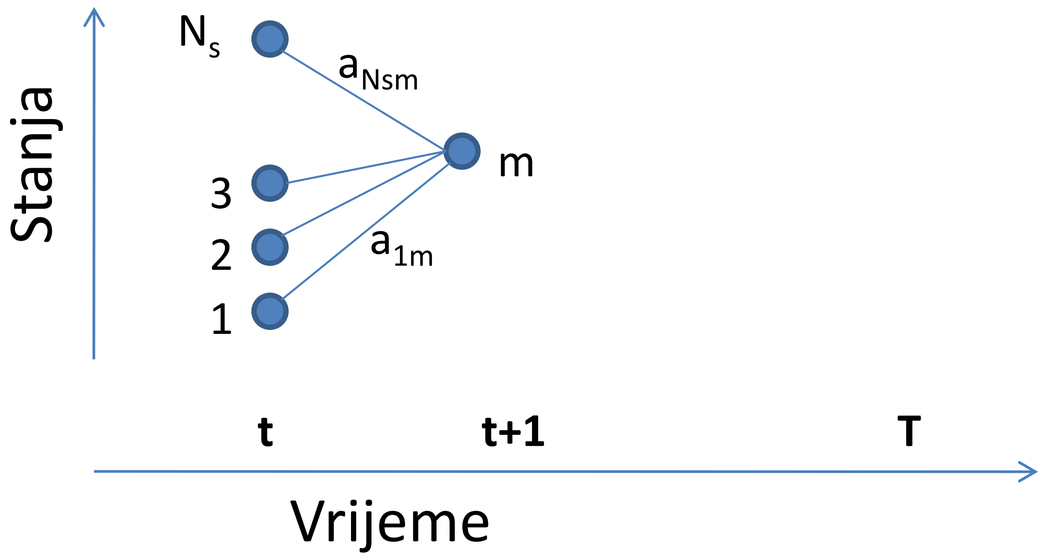
Skriveni Markovljevi modeli (HMM)

- Za sve puteve preko stanja sumiraj vjerojatnosti

$$P(O|\Theta) = \sum_q P(O|q,\Theta) \cdot P(q,\Theta)$$

- Kompleksnost:
  - $N_s^{\ T}$ sekvenci stanja i *O(T)* proračuna ~ $O\ (TN_s^{\ T})$

Procedura izračuna unaprijed ("Forward algorithm")



Skriveni Markovljevi modeli (HMM)

Procedura izračuna unaprijed ("Forward algorithm")

- Definicija α (forward probability)

$$\alpha_t(i) = P(o_1, o_2, o_3, ..., o_t, q_t = i \mid \Theta)$$

- $\alpha_t(i)$ - vjerojatnost ostvarivanja parcijalne sekvence (o_1, o_2, o_3, ...,o_t) uz to da se HMM nalazi u t u stanju $q_t = i$

Algoritam

1 Inicijalizacija $\alpha_1(i) = \pi_i b_i(o_1)$

2 Indukcija

$$\alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=1}^{N_s} \alpha_t(i) \cdot a_{ij}\right] \cdot b_j(o_{t+1})$$

•Kraj

$$P(O \mid \Theta) = \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_T(i)$$

Skriveni Markovljevi modeli (HMM)

Vježba

P(O|q)	Stanja	
	Kocka 1	Kocka 2
P(Glava | Kocka)	0.5	0.33
P(Pismo | Kocka)	0.5	0.67

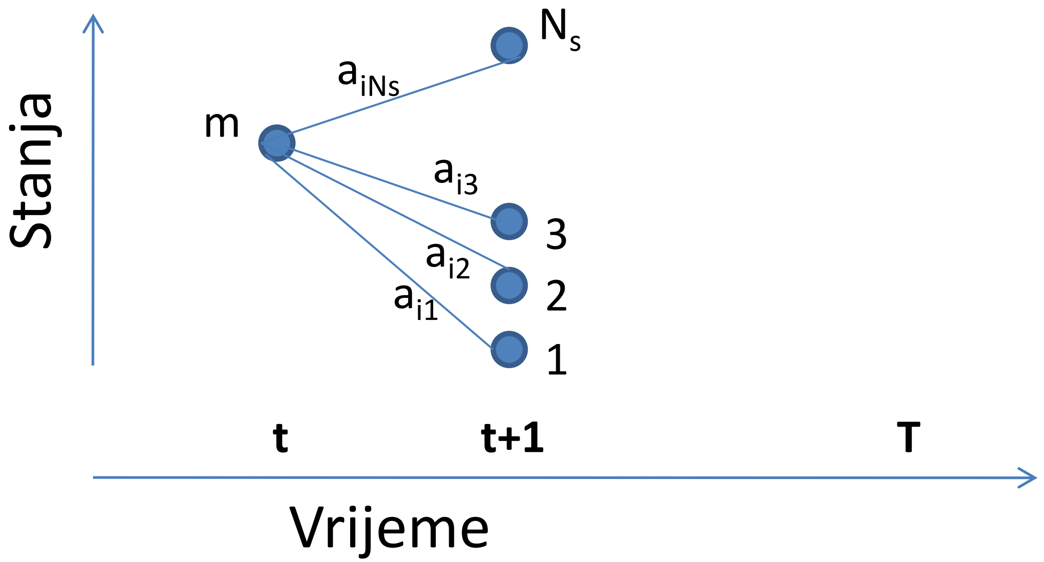
a_{ij}	Stanja	
	Kocka 1	Kocka 2
Kocka 1	0.5	0.5
Kocka 2	0.5	0.5

Inicijalne vjerojatnosti	Stanja	
	Kocka 1	Kocka 2
Π_i	0.5	0.5

Uočena sekvenca simbola *O=(G,G,G,G,P,P,G,G,P,P,P,P)*

- Koja sekvenca stanja je najvjerojatnija ?
- Koja je združena vjerojatnost $P(O,q \mid \Theta)$
- Koja je vjerojatnost *O* ako bacamo samo Kocku 1 odnosno samo Kocku 2 ?

Procedura izračuna unatrag ("Backward algorithm")



Procedura izračuna unatrag ("Backward algorithm")

- Definicija β (backward probability)

$$\beta_t(i) = P(o_{t+1}, o_{t+2}, o_{t+3}, \ldots, o_T \mid q_t = i, \Theta)$$

- $\beta_t(i)$ je vjerojatnost ostvarivanja parcijalne sekvence (o_{t+1}, o_{t+2}, o_{t+3}, ...,o_T) uz to da se HMM nalazi u *t* u stanju $q_t = i$

- Algoritam

  1 Inicijalizacija $\beta_T(i) = 1$

  2 Indukcija

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N_s} a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

$$1 \le i \le N_s,$$

$$t = T-1, T-2, \ldots, 1$$

Rješavanje problema 2

Uz zadanu sekvencu $O=\{o_1,o_2,o_3,\ldots,o_T\}$ i model $\Theta=(A,B,\pi)$

$\Rightarrow$ izračunaj sekvencu skrivenih stanja $q=\{q_1,q_1,q_3,\ldots,q_T)$
koja maksimizira *izglednost* („Likelihood”)

$$P(q_1,q_1,q_3,\ldots,q_T \mid O,\Theta)$$

$\Rightarrow$ Rješavanje - dinamičkim programiranjem

$$\delta_t(i)=\max_{q_1,q_2,\ldots,q_{t-1}} P(q_1,q_1,q_3,\ldots,q_t=i,o_1,o_2,\ldots,o_t \mid \Theta)$$

$\delta_t(i)$ – put s najvećom vjerojatnosti koji završava u stanju *i*

Indukcijom se dobiva*:*

$$\delta_{t+1}(i)=\max_i\left[\delta_t(i)a_{ij}\right]\cdot b_j(o_{t+1})$$

Viterbi algoritam

- Inicijalizacija

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(o_1)$$
$$\Psi_1(i) = 0$$

- Rekurzija

$$\delta_t(j) = \max_{1 \le i \le Ns}\left[\delta_{t-1}(i) a_{ij}\right] \cdot b_j(o_t)$$
$$\Psi_t(j) = \arg\max_{1 \le i \le Ns}\left[\delta_{t-1}(i) a_{ij}\right]$$
$$2 \le t \le T, \quad 1 \le j \le N_s$$

- Prekid

$$P^{\max}(q \mid O, \Theta) = \max_{1 \le i \le Ns}\left[\delta_T(i)\right]$$
$$q_T^{\max} = \arg\max_{1 \le i \le Ns}\left[\delta_T(i)\right]$$

- Izlaz – sekvenca (backtracking)

$$q_t^{\max} = \Psi_{t+1}(q_{t+1}^{\max}) \qquad t = T-1, T-2, \ldots, 1$$

Problem određivanja modela HMM - $\theta = (A, B, \pi)$

- Iterativno rješenje – Baum-Welch algoritam

1 Neka je inicijalni model θ_0

2 Izračunaj novi θna osnovu *O* i θ_0

3 Ako je $log[P(O|\theta) - \log(P(O|\theta_0) < \Delta$ =>STOP

4 Inače $\theta_0 \leftarrow \theta$; vrati se na 2.

Baum-Welch algoritam

Definicije:

- Vjerojatnost da se HMM nalazi u stanju *i* u trenutku *t* i u stanju *j* u trenutku *t+1*:

$$\omega_t(i,j) = \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{P(O\,|\,\Theta)} = \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1})(j)}{\sum_{i=1}^{Ns}\sum_{j=1}^{Ns}\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1})(j)}$$

- Vjerojatnost da se HMM nalazi u stanju *i* u trenutku *t,* uz danu sekvencu *O*:

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^{Ns}\omega_t(i,j)$$

- $\sum_{t=1}^{T}\gamma_t(i)$ – očekivani broj posjeta stanju *i*
- $\sum_{t=1}^{T-1}\omega_t(i,j)$ – očekivani broj prijelaza iz stanja *i* u stanje *j*

Baum-Welch algoritam

Podsjetnik:

$$\alpha_t(i) = P(o_1, o_2, o_3, ..., o_t, q_t = i \mid \Theta) \qquad \alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=1}^{N_s} \alpha_t(i) \cdot a_{ij} \right] \cdot b_j(o_{t+1})$$

$\alpha_t(i)$ - vjerojatnost ostvarivanja parcijalne sekvence (o_1, o_2, o_3, ...,o_t) uz to da se HMM nalazi u *t* u stanju $q_t = i$; (Forward probabilities)

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N_s} a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

$$\beta_t(i) = P(o_{t+1}, o_{t+2}, o_{t+3}, ..., o_T \mid q_t = i, \Theta) \qquad 1 \le i \le N_s,$$

$$t = T-1, T-2, ..., 1$$

$\beta_t(i)$ - vjerojatnost ostvarivanja parcijalne sekvence (o_{t+1}, o_{t+2}, o_{t+3}, ...,o_T) uz to da se HMM nalazi u *t* u stanju $q_t = i$; (Backward probabilities)

Baum-Welch algoritam

Definicije (nastavak) => pravila obnavljanja a_{ij} i b_j:

- $\bar{\pi}_i$ – očekivani broj posjeta stanju *i* $(= \gamma_1(i))$

- Očekivani # $i \to j$ / očekivani # $i \to (j = 1, Ns)$

$$\bar{a}_{ij} = \frac{\sum \omega_t(i, j)}{\sum \gamma_t(i)}$$

- Očekivani # u stanju j uz simbol *k* / očekivani # u stanju *j*

$$\bar{b}_j(k) = \frac{\sum_{t, o_t = k} \gamma_t(j)}{\sum_t \gamma_t(j)}$$

Baum-Welch algoritam

(EM - Expectation Maximization algoritam)

1. **O**={o$_1$,o$_2$,o$_3$,..., ,o$_T$}
2. Inicijaliziraj $\boldsymbol{\theta}_0(A, \mathrm{B}, \pi)$, k=0
3. k=k+1
4. Uz **O** i $\boldsymbol{\theta}_k$izračunaj: (E-step)
   $$\gamma_t(i), \qquad \omega_t(ij)$$
5. Izračunaj:
   $$\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(i); \sum_{t=1}^{T-1} \omega_t(i,j)$$
6. Izračunaj nove vrijednosti za $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$: (M-step)
   $$\bar{a}_{ij}, \bar{b}_j, \pi_i$$
7. Ukoliko nije postignuta konvergencija => Korak3

E-step (expectation):
Kada imamo procjenu $\theta_k$onda možemo procijeniti očekivane vrijednosti:
- Očekivani broj puta u stanju *i*
- Očekivani broj prijelaza iz *i* u *j*

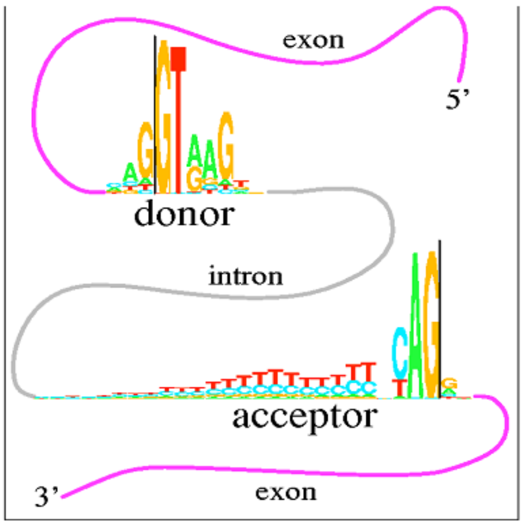
M-step (maximization):
Ako znamo:
- Očekivani broj puta u stanju *i*
- Očekivani broj prijelaza iz *i* u *j*

Onda možemo izračunati maksimalno vjerojatne vrijednosti (ML - Max Likelihood) – novog θ_{k+1}:
$$\theta_{k+1} = \{a_{ij}\}, \{b_j\}, \{\pi_i\}$$

Neki poznati HMM modeli:

GENSCAN

- Traženje gena u DNA



GENSCAN (Burge & Karlin)