Strojno učenje

Ansambli modela

Tomislav Šmuc

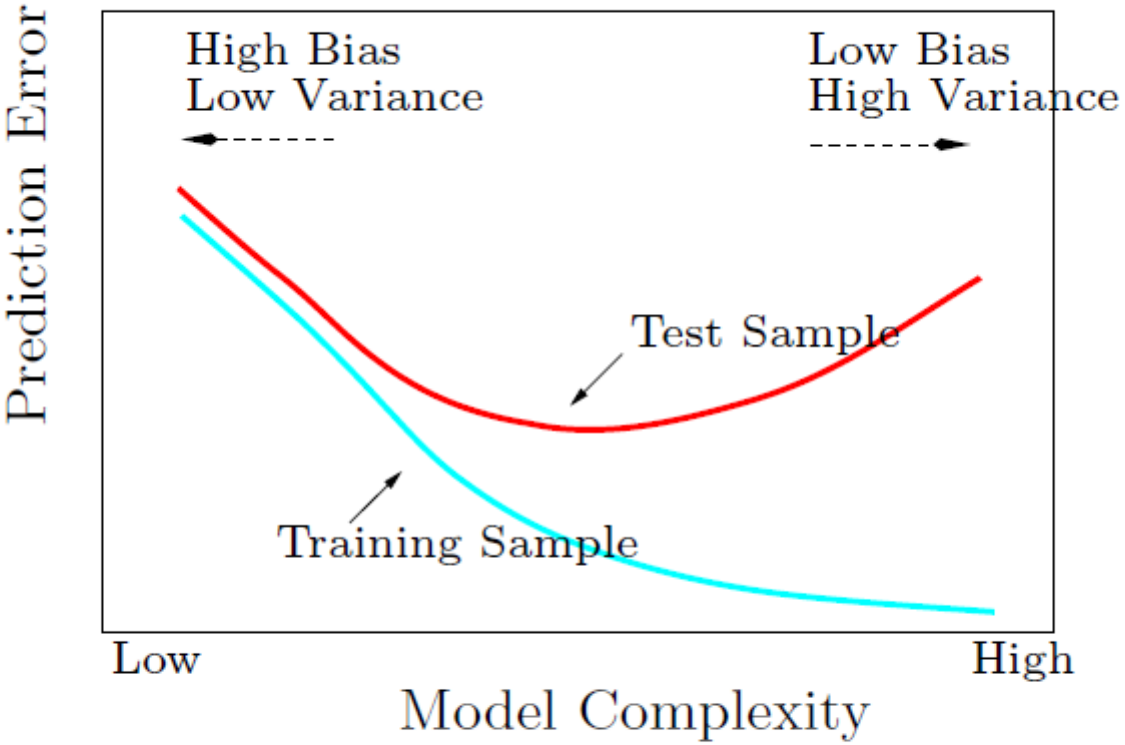


FIGURE 2.11. *Test and training error as a function of model complexity.*

Očekivane vrijednosti greške

$$E(e) = \text{bias}^2 + \text{varijanca} + \text{šum}$$

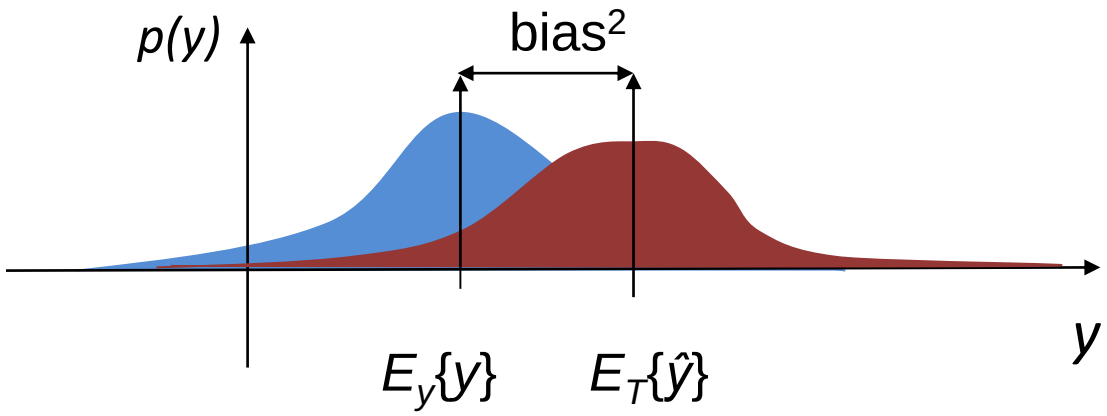
$$E_T[\,(y - \hat{y})^2\,] = \underbrace{(E_T[\hat{y}] - y)^2}_{a} + \underbrace{E_T[(\hat{y} - E_T[\hat{y}])^2]}_{b} + \underbrace{E[\varepsilon \mid x]}_{c}$$

a) Pristranost/Bias: sistematska greška na točki
x - prosjek preko "svih" skupova za učenje T veličine N

b) Varijanca: Varijacija greške oko prosječne vrijednosti prediktora (~razl. Podaci za učenje)

c) Šum: Greška u određivanju stvarnih vrijednosti y(x)

Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela

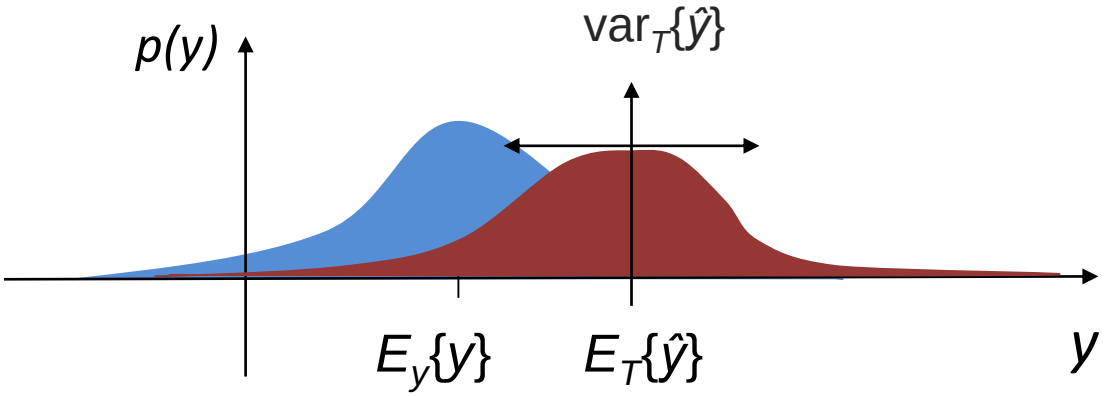


$$(E_y\{y\}-E_T\{\hat{y}\})^2$$

$E_T\{\hat{y}\}$ = prosječni rezultat modela (preko svih T)

bias² = greška između stvarne vrijednosti i prosječnog estimacijskog modela

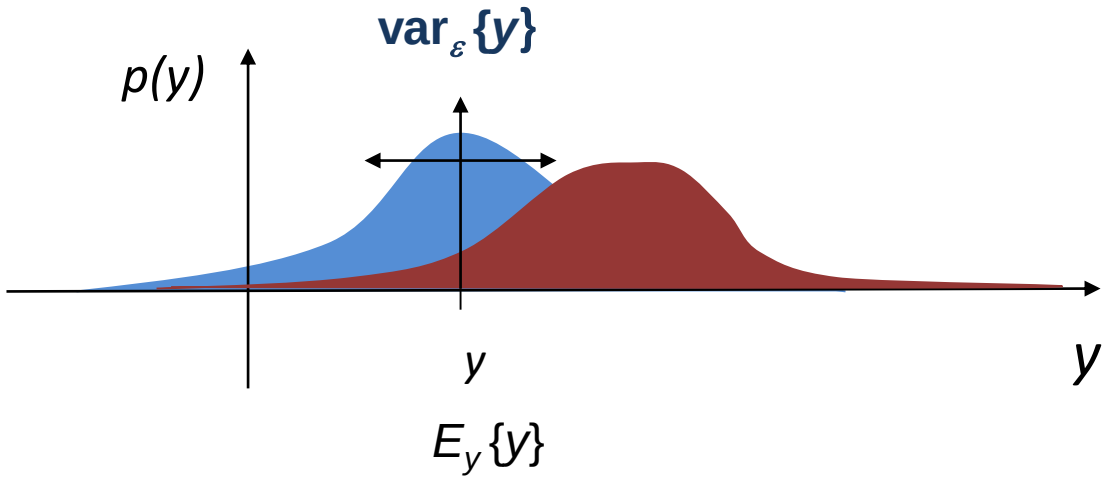
Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela



$$\text{var}_T\{y\} = E_T\{(\hat{y} - E_T\{\hat{y}\})^2\}$$

$\text{var}_T\{\hat{y}\}$ = estimacijska varijanca = zbog over-fitinga

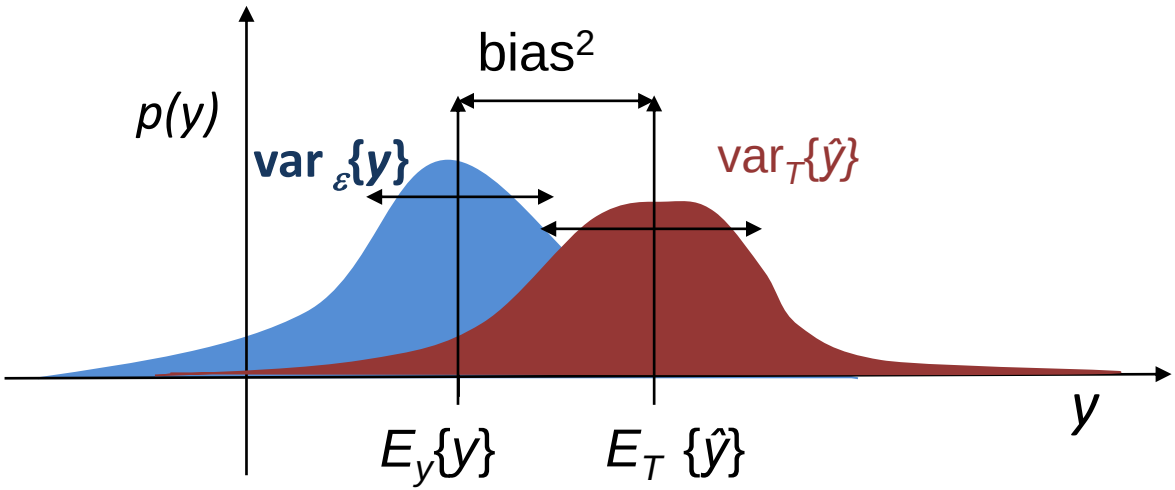
Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela



$$\text{var}_\varepsilon\{y\} = E_y\{(y - E_y\{y\})^2\}$$

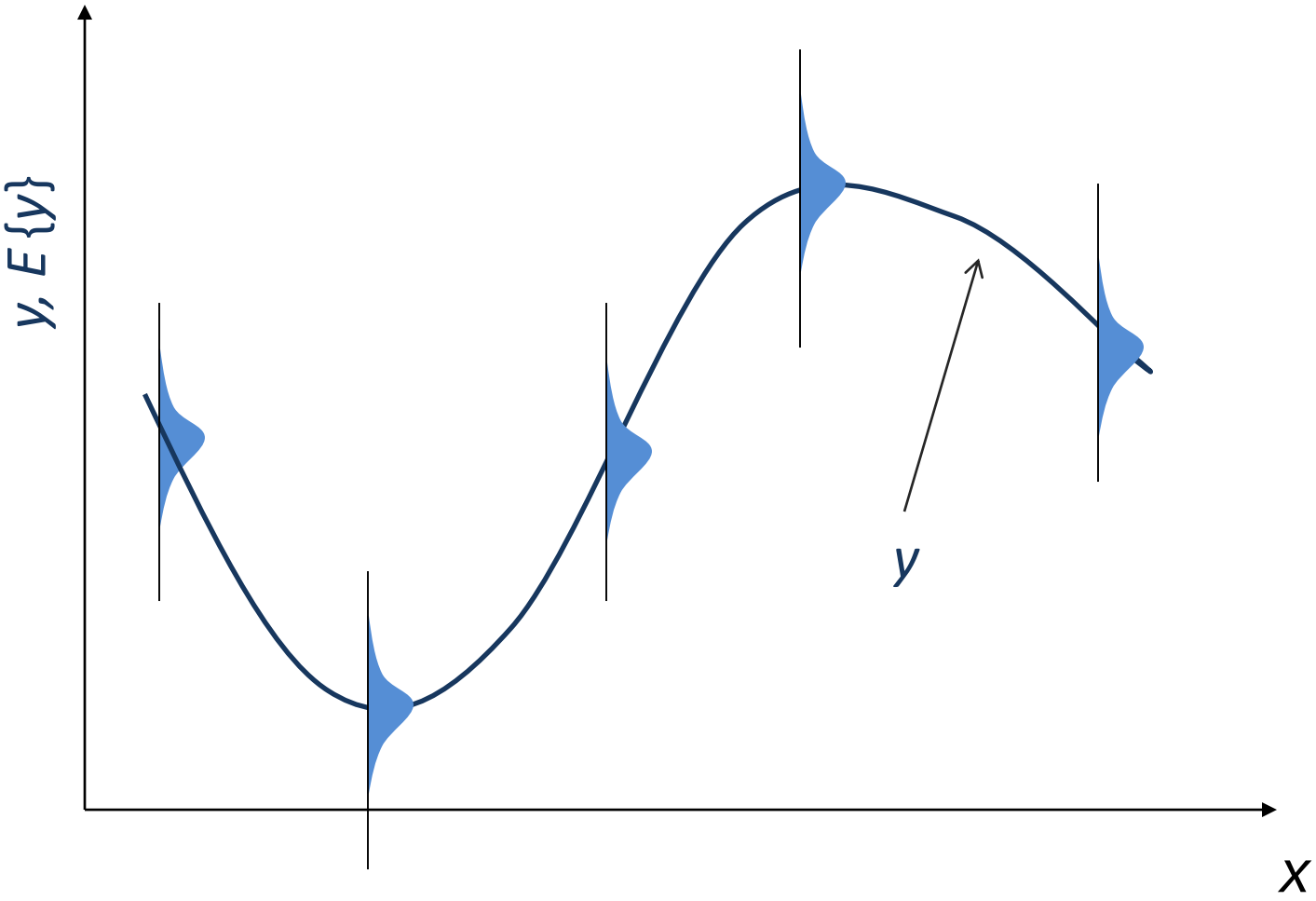
rezidualna greška = minimalna greška koju možemo dostići

Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela

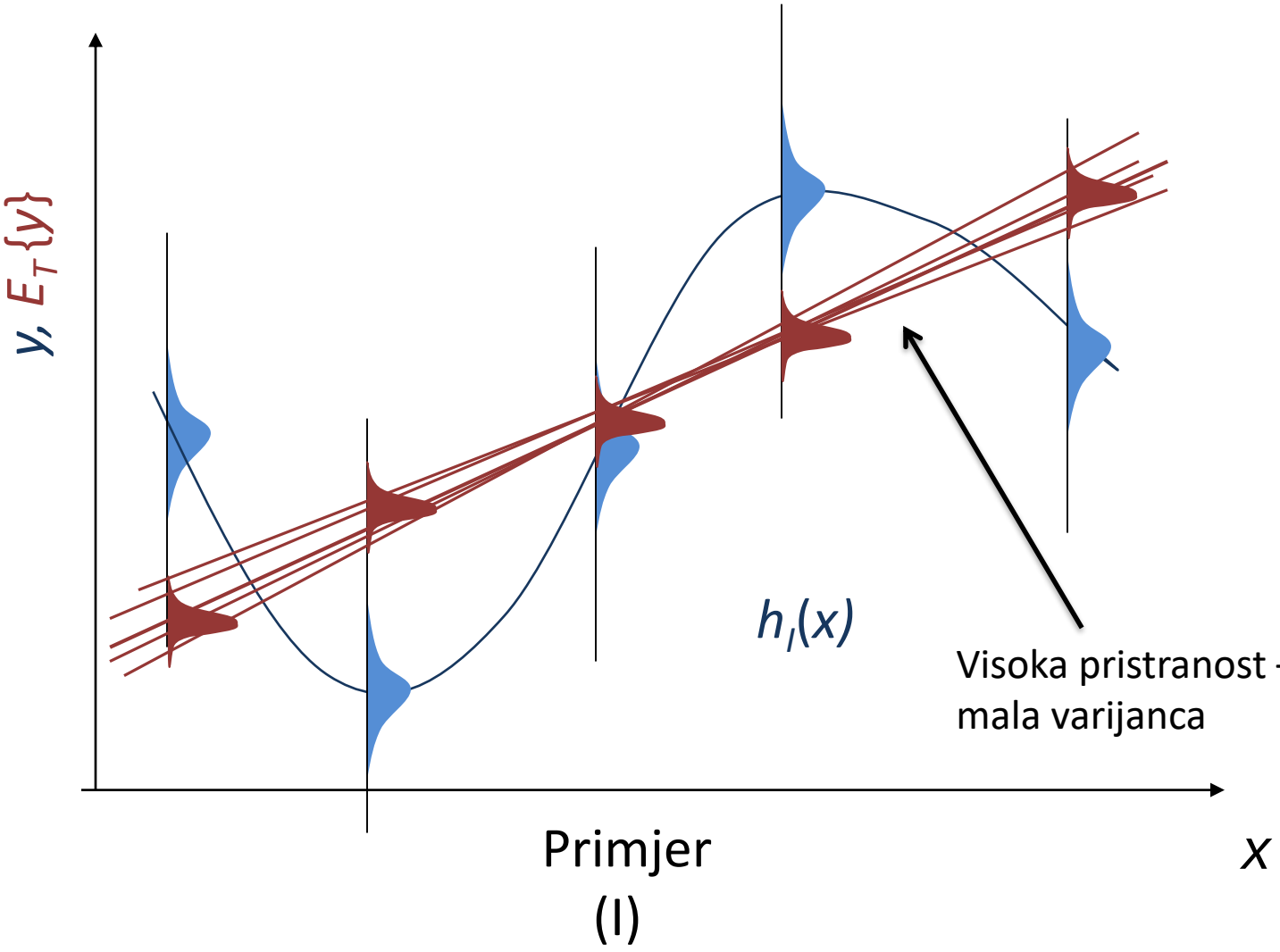


$$E = \text{var}_{\varepsilon}\{y\} + \text{bias}^2 + \text{var}_{T}\{y\}$$

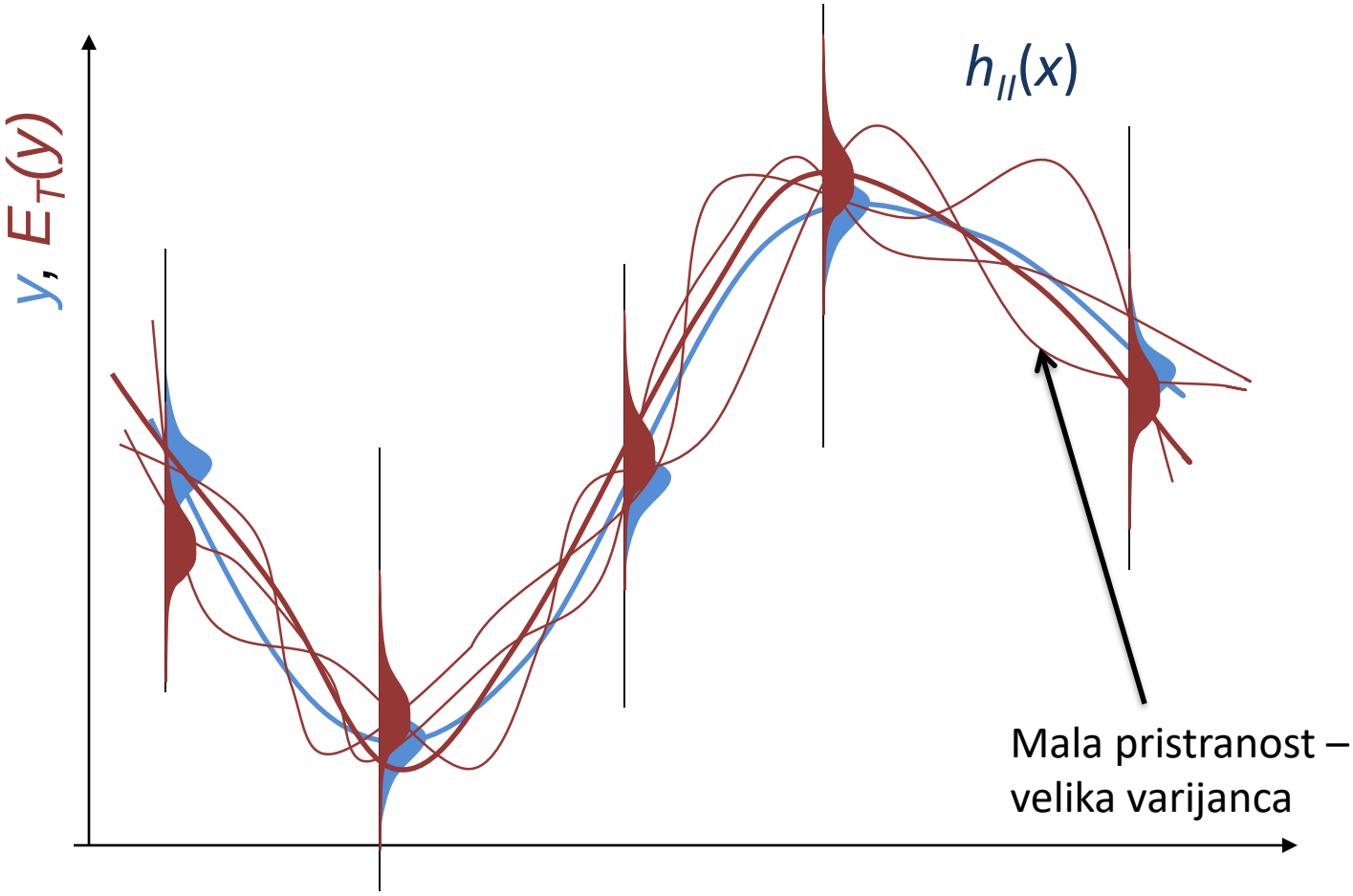
Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela



Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela

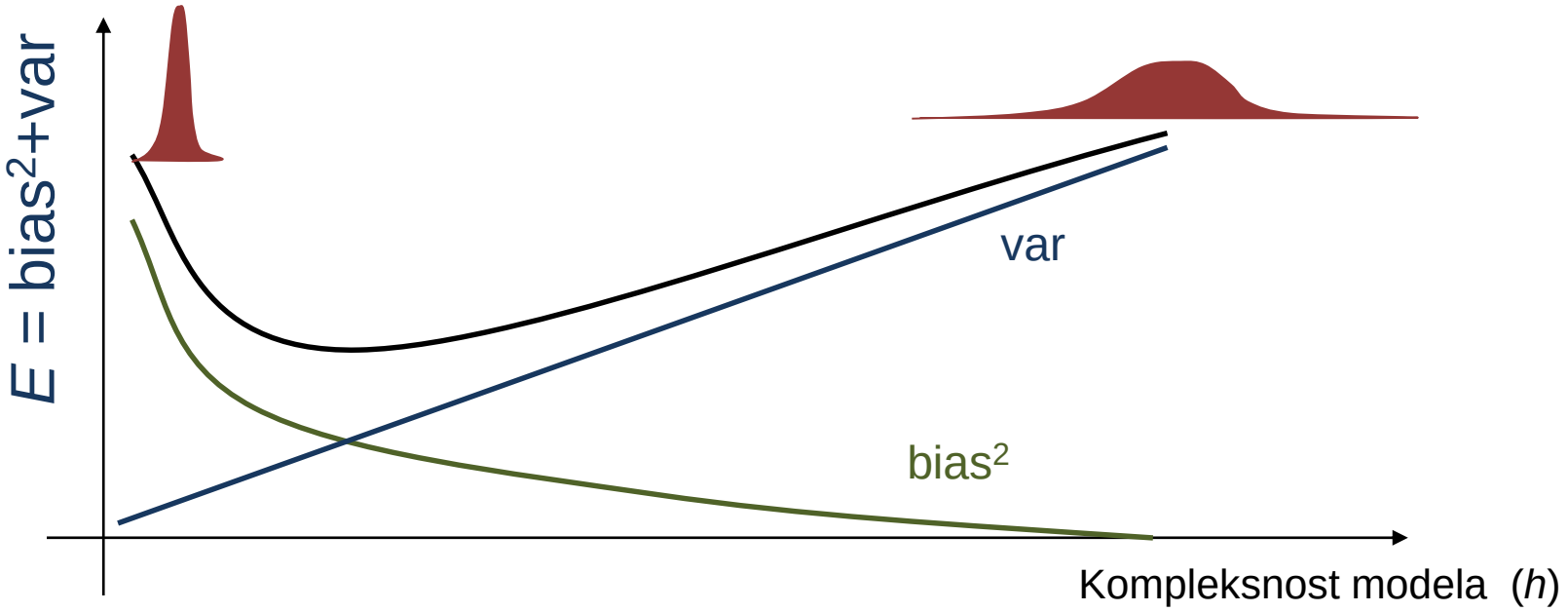


Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela



Primjer
II

Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela



Pristranost (bias) obično pada s povećanjem kompleksnosti modela, dok se varijanca povećava s kompleksnosti modela

Ansambli

IDEJA:

- Umjesto jednog modela/klasifikatora uči se skup/ansambl modela/klasifikatora
- Kombiniraju se predikcije više klasifikatora

MOTIVACIJA:

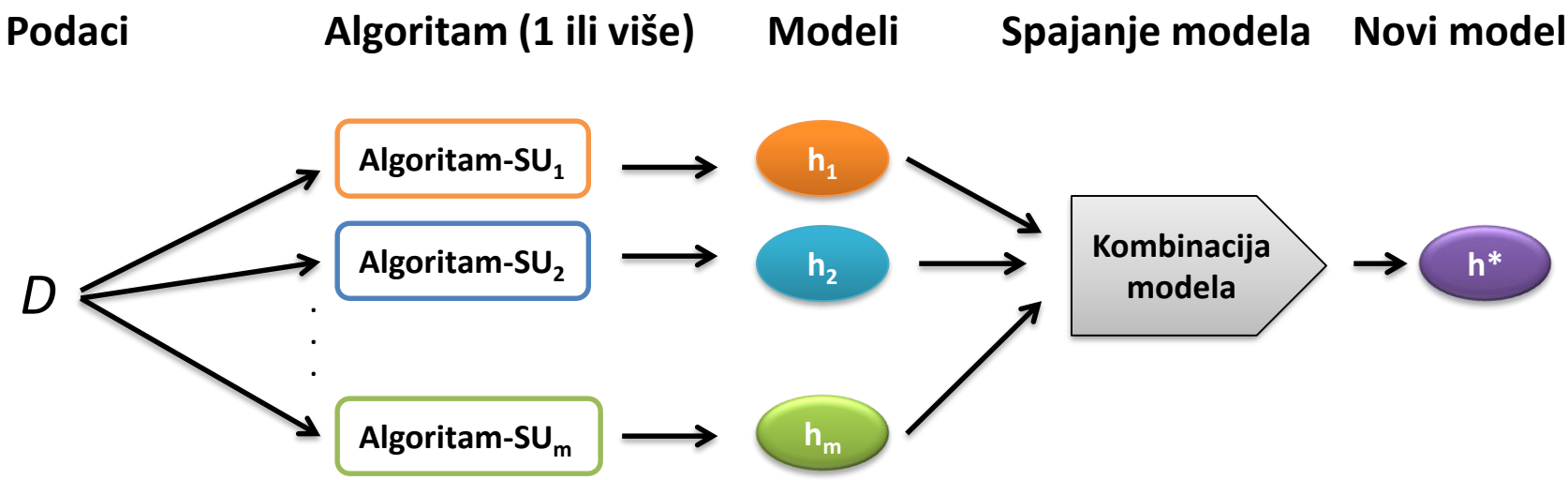
- Redukcija varijance: rezultati združenog modela manje ovise o specifičnostima jednog skupa za učenje
- Redukcija pristranosti: kombinacija više modela/klasifikatora može učiti/reprezentirati složenije koncepte nego jedan model/klasifikator

KLJUČNI KORAK:

- Kako formirati ansambl klasifikatora – na osnovu samo jednog skupa za treniranje

Ansambli (en Ensembles)

= Kombiniranje predikcija više modela koji su napravljeni s istim/različitim algoritmom na istim/različitim podacima - s ciljem poboljšavanja predikcije u odnosu na jedan model



Ansambli (en Ensembles)
= Kombiniranje modela

Zašto ansambli ?

Pretpostavimo da imamo ***L* nezavisnih modela** (klasifikatora npr.), čija je individualna točnost *p*, tada se može pokazati da vrijedi:

$$P(\hat{y} = y) = \sum_{k=0}^{\lfloor L/2 \rfloor} p^{L-k}(1-p)^{k}$$

… točnost ansambla-klasifikatora dobivenog glasanjem *L* nezavisnih klasifikatora točnosti *p* (većina pobjeđuje)

	L=3	***L=5***	***L=7***
P=0.6	0.648	0.683	0.733
P=0.7	0.784	0.837	0.901
P=0.8	0.896	0.942	0.980

Gdje je:

$P(\hat{y} = y)$ - vjerojatnost točne klasifikacije ansambla

$\lfloor L/2 \rfloor$ => najveći cijeli broj $\leq L/2$
(većina pobjeđuje)

Osnovni problemi

1. Kako učiti/generirati bazne modele (klasifikatore) h_1, h_2,…h_m
   - Različiti algoritmi ili različiti podaci ?

2. Kako ih kombinirati u procesu odlučivanja

$$h^* = F(h_{1(x)}, h_{2(x)}, \dots, h_{m(x)})$$

$F(\boldsymbol{h})$:
– prosječna vrijednost (regresija)
– većinsko glasanje (klasifikacija)

– uzeti u obzir preformans pojedinih modela (težinski) ?

Tipovi ansambl metoda

1. Bazirani na učenju nad različitim dijelovima/distribucijama iz skupa podataka za učenje
   - Bagging; Boosting
2. Manipuliranje izlaznim varijablama
   - ECOC (Error Correcting Output Coding)
     Stacking (stacked generalization)
3. Zašto ansambli (dobro) funkcioniraju ?

Ansambli

Pogled na bagging i boosting

- Tehnike usrednjavanja:
  - "Paralelno/nezavisno" generirani modeli - usrednjena predikcija
  - Bagging, random forests
  - Ovim pristupima smanjuje se primarno varijanca greške
- Tehnike "boosting" tipa (en. boost - pojačati)
  - "Sekvencijalno" generirani modeli
  - Primjeri: Adaboost, Gradient-Boosting (XGBoost)
  - Ovim pristupom smanjuje se primarno pristranost (bias)

  (kasnija istraživanja pokazala su da boosting smanjuje i varijancu modela)

Bagging (**B**ootsrap **AGG**regat**ING**)

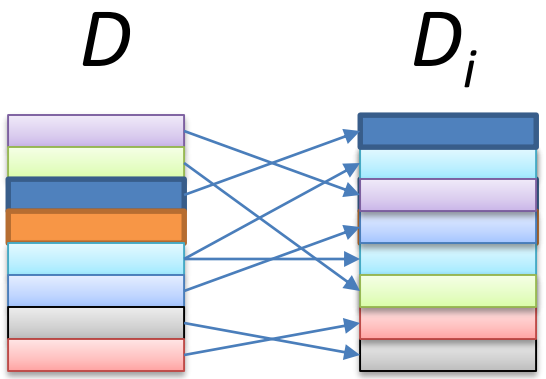
- Napraviti (velik) broj modela koristeći bootstrap replike podataka
- Spojiti u jedan zajednički (bagged) model – odnosno predikciju
- Svi modeli “glasaju”:
  - U slučaju klasifikacije – pravilo većine
  - U slučaju regresije – prosjek svih predikcija

Bootstraping

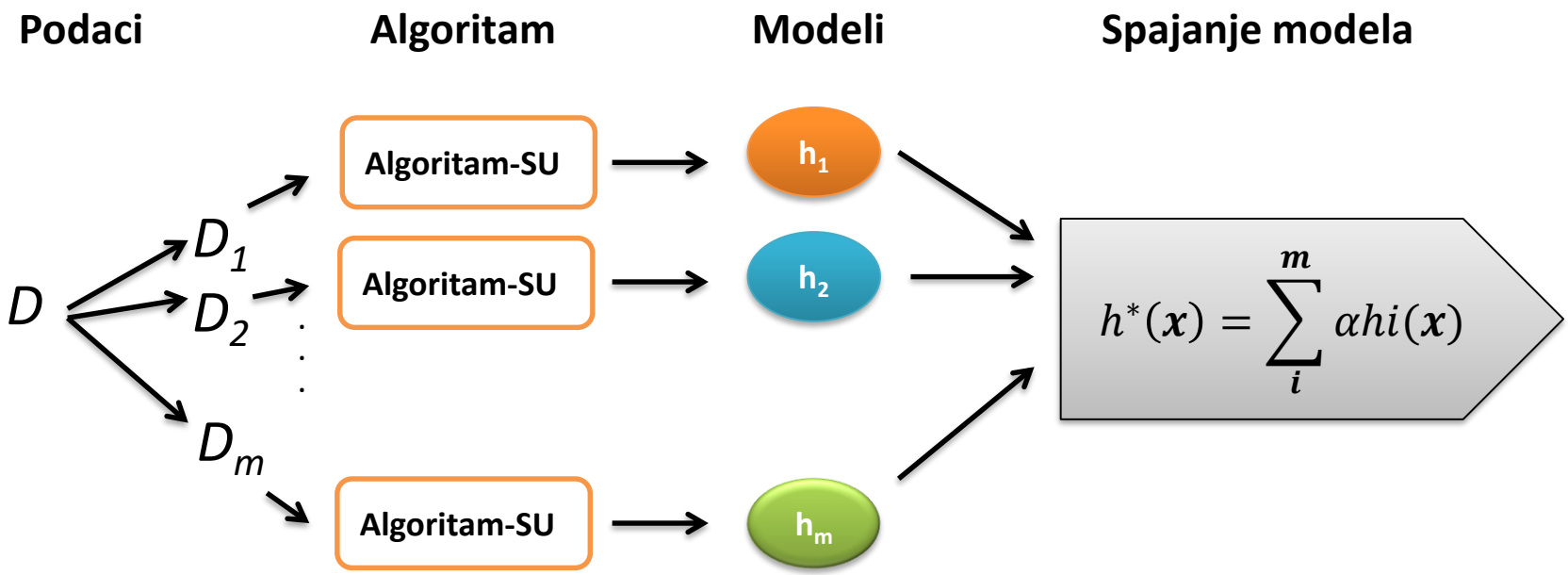
- metoda ponavljanog uzorkovanja iz skupa podataka (en resampling statistical method)
- Korištenje skupa podataka za učenje da se naprave slučajni skupovi – replike originalnog skupa podataka, radi dobivanja informacija o nekim statistikama skupa podataka (bias, variance)

Bootstrap D_i replika skupa podataka D

- Dobiva se slučajnim uzorkovanjem (primjer po primjer) |D| primjera iz D sa ponavljanjem (to znači da u D_i nalazimo i kopije istog primjera) (en. with replacement!)



Bagging



D_i - bootstrap replika podataka

h_i - klasifikator baziran na D_i

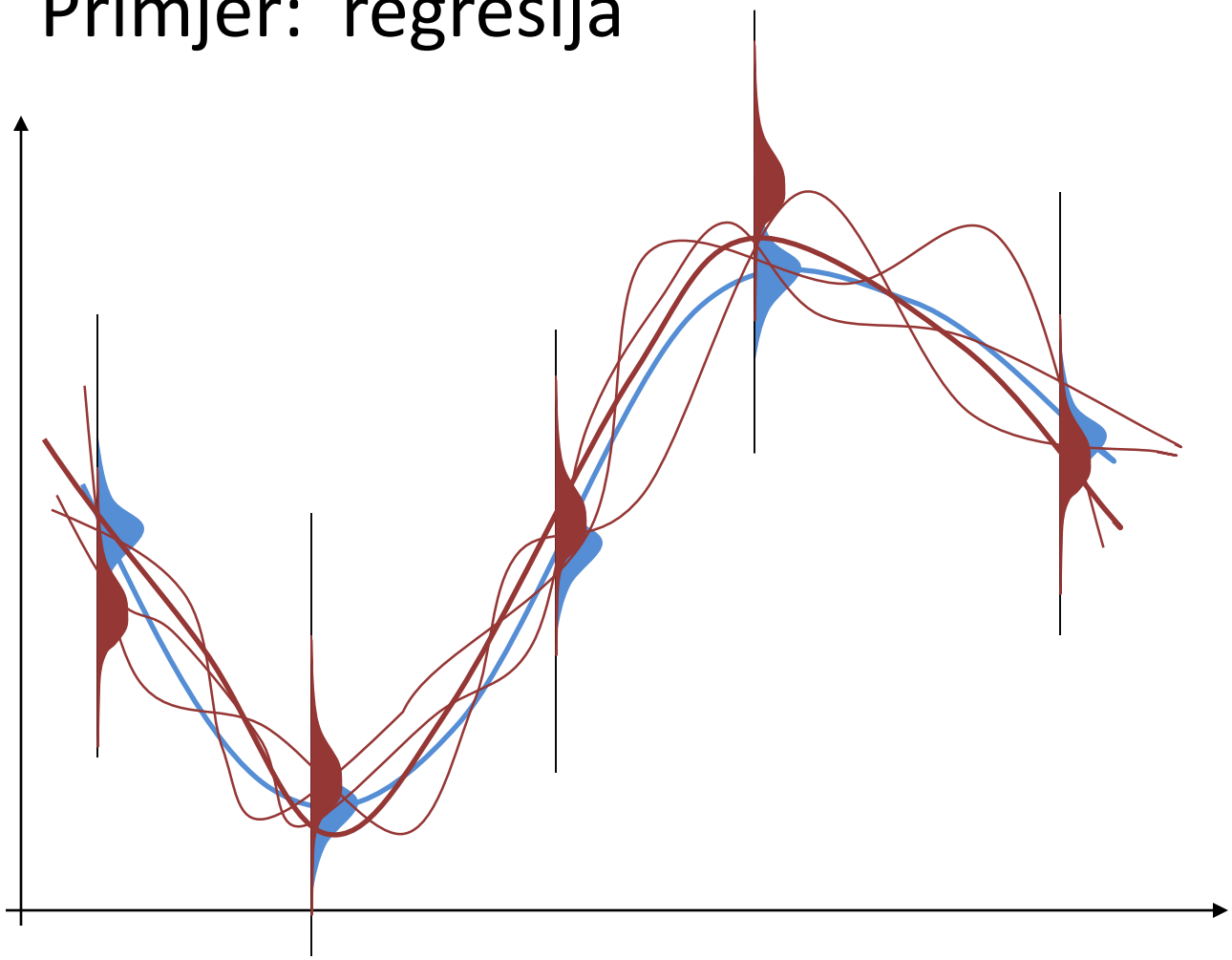
α_i = 1/m

Bagging

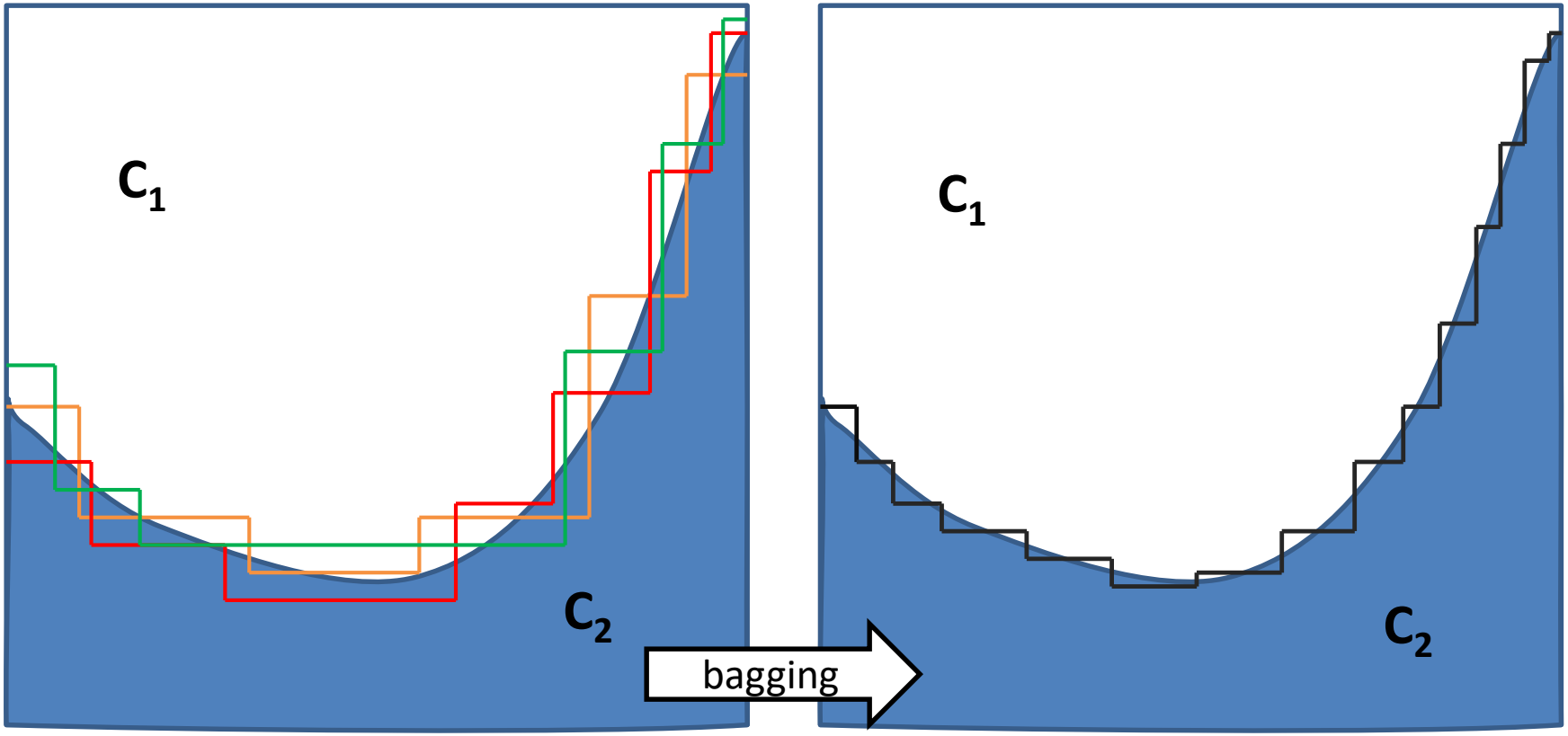
- Koji modeli (tipovi algoritama) bi najviše dobili baggingom ?
- Baggingom eliminiramo varijancu => dakle kompleksni modeli

- To uključuje stabla odlučivanja – tipično "nestabilni" model, ali i Neuralne mreže ...

Primjer: regresija



klasifikacijski primjer: stabla odlučivanja



Ansambli: bagging

Očekivana kv. greška *jednog* modela (regresija)

$$h_i(\boldsymbol{x}) = y(\boldsymbol{x}) + \varepsilon_i(\boldsymbol{x})$$

$$E[\big(h_i(\boldsymbol{x}) - y(\boldsymbol{x})\big)^2] = E[\big(\varepsilon_i(\boldsymbol{x})\big)^2]$$

Prosječna kv. greška *m* modela:

$$\bar{E}_m = \frac{1}{m}\sum_i E\left[\big(\varepsilon_i(\boldsymbol{x})\big)^2\right]$$

Kolika je prosječna kv. greška *h** modela ? $h^*(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{m}\sum_i h_i(\boldsymbol{x})$

…. uz pretpostavku da su greške modela $\varepsilon i(\mathbf{x})$ takve da vrijedi

$E[\varepsilon_i(\boldsymbol{x})] = 0$ => srednja vrijednost ~ 0

$E[\varepsilon_j(\boldsymbol{x})\varepsilon_i(\boldsymbol{x})] = 0$ => greške su medjusobno nekorelirane

$$\bar{E}_{h^*} = E\left[\left(y(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{m}\sum_i h_i(\boldsymbol{x})\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{m}\sum_i \varepsilon_i(\boldsymbol{x})\right)^2\right] = \frac{1}{m}\bar{E}_m$$

$$\boldsymbol{\bar{E}_{h^*} \leq \bar{E}_m} \textbf{ !!}$$

Bagging - Pristranost i varijanca

Pristranost(Bias): $E[h^*(\boldsymbol{x}) - y]$

Varijanca: $\sum_i (h^*(\boldsymbol{x}) - h_i(\boldsymbol{x}))^2/(m-1)$ => 0, za m>>

Dakle:

- Bagging reducira varijancu
- To je povoljno svojstvo za algoritme/modele koji imaju visoku varijancu, a mali bias („sklonost overfitanju”)
  - stabla odlučivanja, 1-nn…

Random forests algoritam

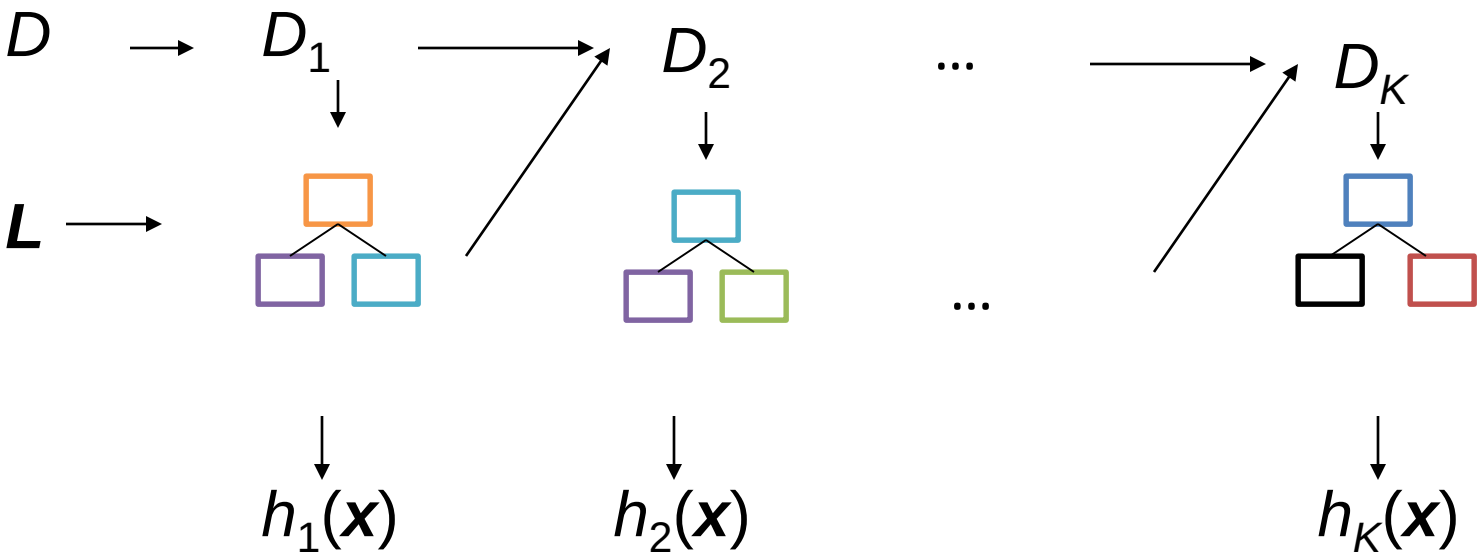
- Kombinira bagging sa slučajnim odabirom podskupa varijabli/atributa (perturbacija modela)
  - Gradi stabla odlučivanja iz bootstrap uzorka skupa za učenje
  - Umjesto izabiranja najboljeg atributa za *split* – između svih atributa – izabire *k(split)* slučajno odabranih atributa

  (= bagging , uz *n* atributa u skupu podataka:
  => tipično za RF broj splitting atributa k(split)=$\sqrt{n}$)
- Balans bias/varijanca korištenjem k:
  - Što je manji *k* – veća je redukcija varijance, ali je i veća pristranost (bias) stabala

Boosting metode – "jačanje" slabih modela

- Motivacija:
  - kombiniranje outputa "slabih" modela da bi se napravio točniji ansambl modela.
- "Slabi" modeli:
  - **modeli s visokom pristranosti (bias)** (klasifikacija - malo bolji od slučajne predikcije)
- U odnosu na bagging:
  - Modeli se rade "**sekvencijalno**" **na modificiranim verzijama podataka**
  - Krajnja predikcija je kombinacija predikcija pojedinačnih modela uz korištenje težinskih faktora

Ansambli: boosting



Klasifikacija: $h(\boldsymbol{x})$ = većina od $\{h_1(\boldsymbol{x}),\ldots,h_K(\boldsymbol{x})\}$
uz težine $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_K\}$

Regresija: $h(\boldsymbol{x}) = \beta_1 h_1(\boldsymbol{x}) + \beta_2 h_2(\boldsymbol{x}) + \ldots + \beta_K h_K(\boldsymbol{x}))$

AdaBoost (Adaptive Boosting) algoritam

- (Freund & Schapire, 1997)
- Generira modele tako da sukcesivno mijenja težine primjera u skupu za učenje
- Adaboost povećava težine primjera za koje su prethodni modeli imali loše predikcije – dakle fokusira učenje na “teške” slučajeve
- Na kraju: glasanje s težinskom-većinom; točniji modeli imaju veći utjecaj u glasanju

AdaBoost algoritam

Ulaz: **D** – podaci za učenje, Y=[1,-1] – binarni klasifikacijski problem

Algoritam ***L*** *(*algoritam s visokom pristranosti („high bias”)

T – broj iteracija, *N* – broj primjera za učenje

Izlaz: “Ojačani ” (boosted) klasifikator ***F*** (model s niskom pristranosti)

Inicijaliziraj težine primjera: $w_i^1 = 1/N,\ \text{za}\ i = 1,\ldots,N$

Za *t <- 1,2,....,T* **radi**

1. $\mathbf{p}^t = \mathbf{w}^t / \sum_{i=1}^{N} w_i^t$
2. Pozovi algoritam SU ***L* (p^t,X)** => rezultat je “slabi” model (***h_t : X -> Y***)
3. Odredi grešku h_t: $\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{t} p_i^t \frac{1}{2}\left|h_t(x_i) - y_i\right|$
4. Odredi $\alpha^t = \log\left(\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t}\right)$
5. Odredi nove težine primjera $w_i^{t+1} = w_i^t \exp(\alpha_t \frac{1}{2}\left|h_t(x_i) - y_i\right|),\ \text{za}\ i = 1,2,\ldots,N$

Vrati klasifikator ***F:***

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{T}} \alpha_t h_t(x) \geq 0, \\ -1, & \text{inace} \end{cases}$$

AdaBoost algoritam

Izraz kojim mijenjamo težine primjera u iteraciji t+1:

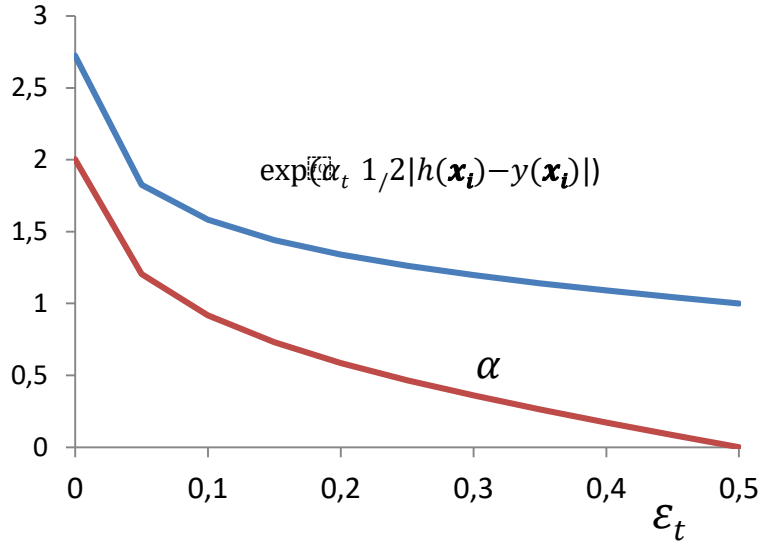
$$w_i^{t+1} = w_i^t \exp(\alpha_t \frac{1}{2}|h_t(x_i) - y_i|), \text{ za } i = 1,2,\ldots,N$$

Gdje je α_t – težinski faktor modela u iteraciji *t:*

$$\alpha_t = \log(\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t})$$

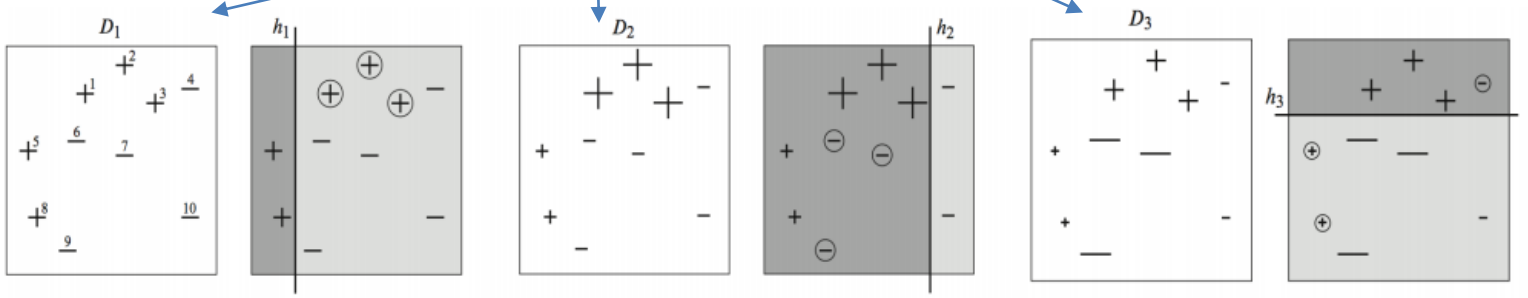
a ε_t prosječna greška u iteraciji *t:*

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{t} p_i^t \frac{1}{2}|h_t(x_i) - y_i|$$

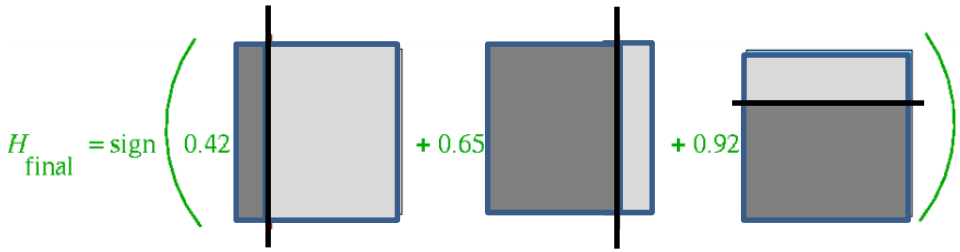


AdaBoost algoritam

Promjena težine primjera kroz iteracije algoritma



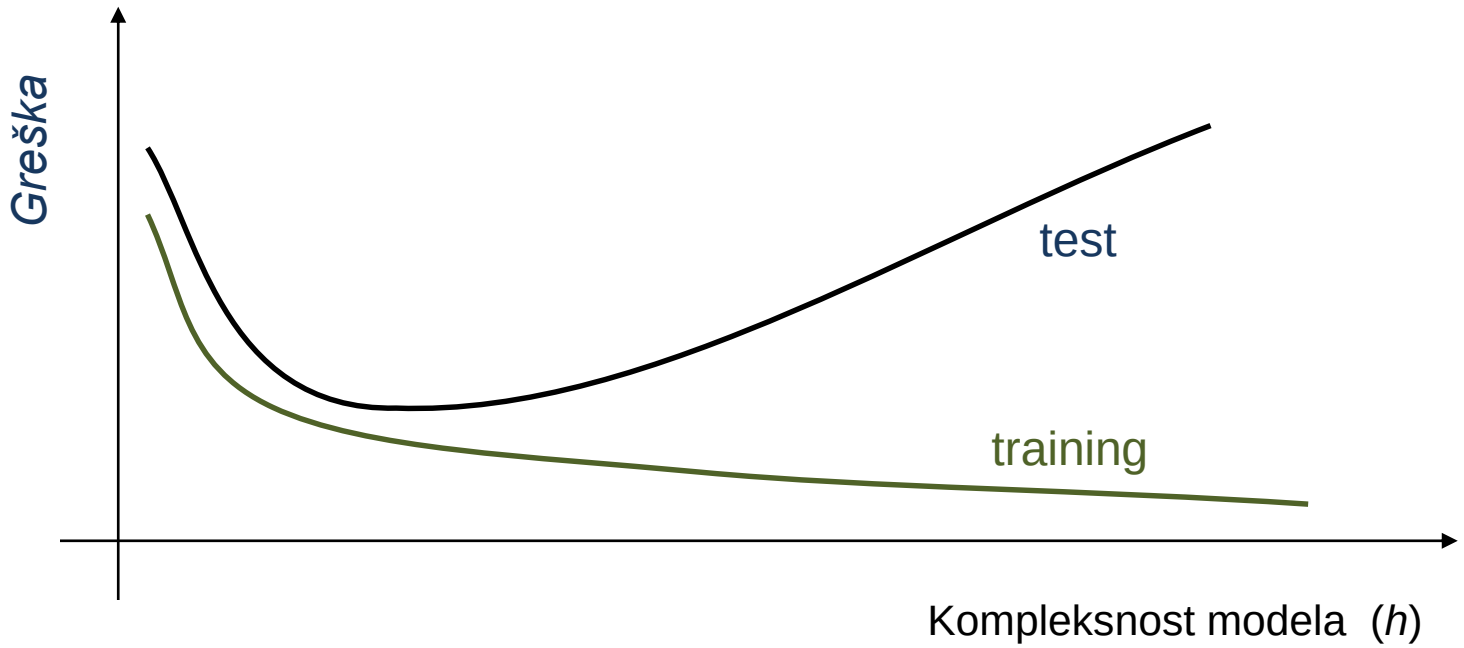
Izvor: Schapire, R. E. and Freund, Y. (2012). Boosting: Foundations and Algorithms.



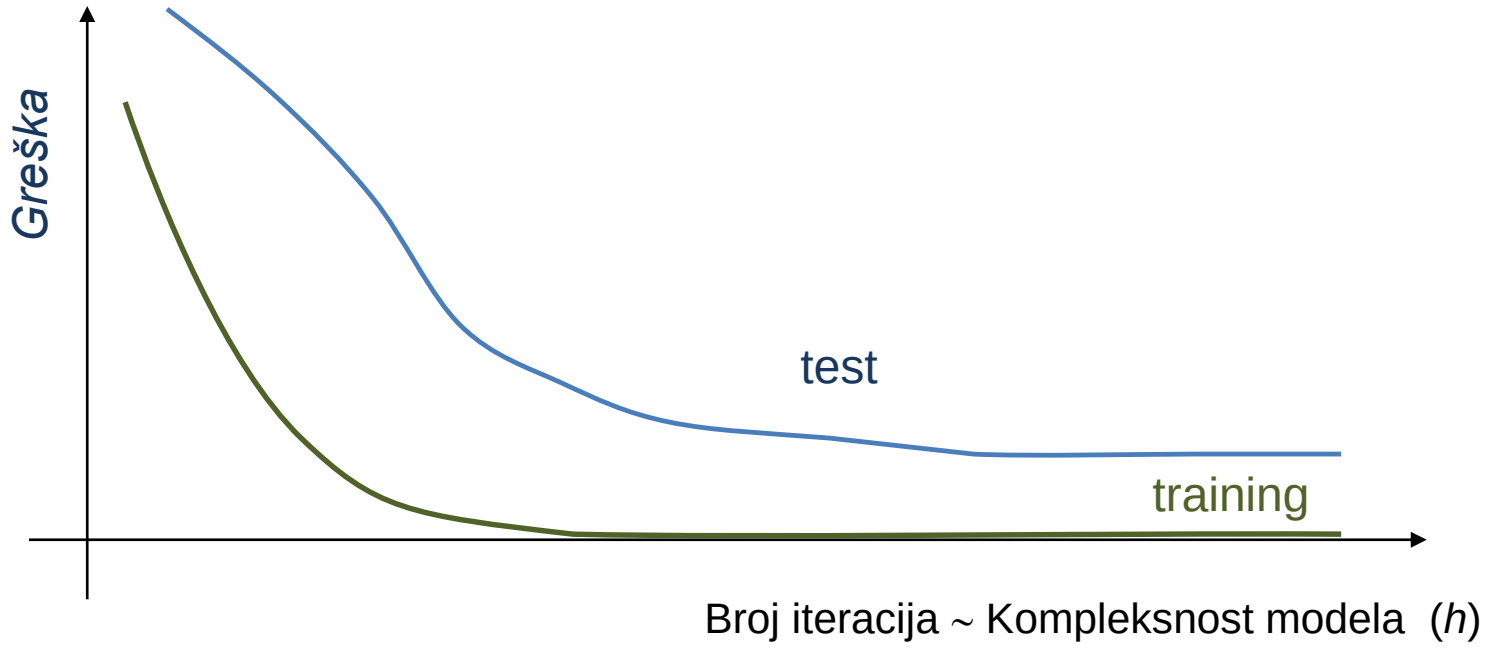
Zašto boosting radi dobro ?

- Kombinira modele koji imaju visoki bias (jednostavni), tako da se ukupno dobije kompleksniji/ekspresivniji klasifikator
- Boosting => redukcija pristranosti (bias-a), svakom iteracijom model postaje kompleksniji ?
- Što se dešava ako imamo velik broj iteracija (K) ? Dobit ćemo vrlo složeni model...a greška na novim primjerima – problem overfittinga ?

Algoritmi strojnog učenja - tipični slučaj



Boosting – tipični slučaj !?



Boosting – Objašnjenje (I)

- Modeli koji su generirani boosting-om (Y=[-1,1]):
  - Klasifikacija primjera je korektna ako je $h^*(\boldsymbol{x}) = y(\boldsymbol{x})$, odnosno pogrešna ako $h^*(\boldsymbol{x}) \neq y(\boldsymbol{x})$

  No – u boosting algoritmu **možemo mjeriti pouzdanost** klasifikacije !
  - $h^*(\boldsymbol{x})$ - je težinski zbroj glasova pojedinih (slabih) klasifikatora !

  - **Mjera pouzdanosti ~ Margina (sjetite se SVM!) primjera**: pouzdanost glasanja =

    = (težinski zbroj korektnih glasanja)-(težinski zbroj krivih glasanja)

Boosting – Objašnjenje (II)

- Što je margina veća na skupu za učenje – za očekivati je i manju grešku i na testnom skupu (generalizacijska greška je manja)

Dakle:

- Iako je konačni klasifikator $h^*(\boldsymbol{x})$ naizgled složeniji, margina između primjera različitih klasa se povećava, dodavanjem novih modela !?
- dakle $h^*(\boldsymbol{x})$ na neki način postaje robustniji a istovremeno se smanjuje njegova greška na novim primjerima !
- Boosting algoritmi rade na povećavanju margine => smanjenju varijance modela

- Boosting algoritmi smanjuju pristranost, ali i varijancu konačnog modela !

Boosting – Problemi i rješenja

Osjetljivost na outliere (podatke sa povećanim šumom)

- Primjeri koji mogu predstavljati greške – dobijaju sve veću težinu pri izgradnji $h^*(\boldsymbol{x})$!

- Novije varijante boosting algoritama robustnije su na outliere
  - gradient boosting (**XGboost**) => gradient descent + boosting

Usporedba Bagging vs Boosting

- Bagging
  - Tolerira šum u podacima
  - Dobro statistički utemeljena
  - bazirana na slučajnom uzorkovanju (primjeri/bootstrap/)
  - Daje bolju procjenu vjerojatnosti pripadanja nekoj klasi pri testiranju novih primjera
- Boosting
  - Osjetljiva na šum u podacima
  - bazirana na teoriji strojnog učenja
  - Obično je moguće dobiti nešto točnije modele nego bagging metodom
  - Lošija procjena vjerojatnosti pripadanja nekoj klasi pri testiranju novih primjera

Ansambli bazirani na manipuliranju ciljnom varijablom

- Algoritmi poput stabla odlučivanja, naivnog Bayes algoritma, neuralnih mreža u principu uče jedan model/klasifikator za višeklasne (C>2) probleme.

- Moguće je konstruirati i meta-algoritme, koji odluku o pripadnosti klasi baziraju na binarnim klasifikatorima

- ECOC – meta-algoritam koji kombinira više (puno) binarnih klasifikatora da bi riješio problem razlikovanja više klasa.

Ansambli bazirani na manipuliranju ciljnom varijablom

Problem **sa više klasa (>2)** primjera: y=1,2,..,K – klasa

Mogući pristupi:

1. Učenje K binarnih klasifikatora
   - y=1 <-> (y=2,3,4,…,K)
   - y=2 <-> (y=1,3,4,..K)
   - ….

   Odluka: klasa s najvećom $P(C = C_i \mid \boldsymbol{X})$

2. Učenje $\log_2(K)$ binarnih klasifikatora (bitovi - indeksiranje K klasa)
   - $h_0(\mathbf{x})$ =1 ako y=2,4,6,8 inače 0
   - $h_1(\mathbf{x})$ =1 ako y=3,4,7,8 inače 0
   - …

   Odluka: klasa s najvećim brojem glasova

➔ **ECOC – Error Corecting Output Coding**

Erorr Correcting Output Coding

- 3 bitni kod je dovoljan za reprezentiranje 8 klasa ($\log_2 8 = 3$).

	Binarni klasif. Problem / klasifikator		
	h1	h2	h3
Klasa			
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	1	1

- No, tipično – koriste se kodovi koji imaju više bitova nego što je potrebno !

- Korištenjem redundantnih bitova (=> ime ECOC !!), omogućava robustniiji klasifikator, te korigiranje grešaka (...koje su posljedica konačnog trening skupa, „loših" atributa/varijabli, odabira algoritma...)
- ECOC metoda se „oporavlja" od individualnih grešaka !

ECOC

- Ako je minimalna Hamming-ova udaljenost između 2 para kodnih riječi = *d* , tada će ECOC korigirati minimalno *(d-1)/2* bitova:
  - Najbliža kodna riječ onoj koja označava pravu klasu (tj njenu kodnu riječ) je u tom slučaju još uvijek korektna:
  - ECOC model dakle može ispraviti najmanje (d-1)/2 bitova !

	Binarni klasif. Problem / klasifikator														
	h1	h2	h3	h4	h5	h6	h7	h8	h9	h10	h11	h12	h13	h14	h15
Klasa															
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Gornja tablica: 15 kodni zapis – 5-klasnog klasifikacijskog problema.

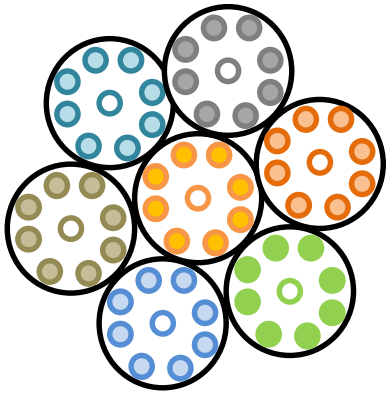
ECOC: Error Correcting Output Coding

Mapiraj klase koje možeš kodirati sa $\log_2(K)$ bita, u $M > \log_2(K)$ (redundancija => robustnost na šum)

Broj kodova >> broj poruka (klasa)

Kod dekodiranja klasa se odredjuje prema najbližoj kodnoj-riječi

- Svaka $\log_2(K)$ kodna-riječ (klasa) „okružena je" sa buffer-zonom sličnih M-bitnih kodnih-riječi – nijedna druga kodna-riječ(klasa) ne može biti mapirana u buffer-zonu

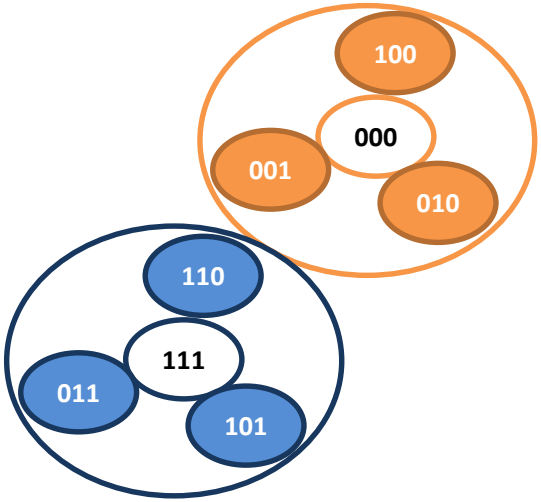


Klasa – kodna riječ

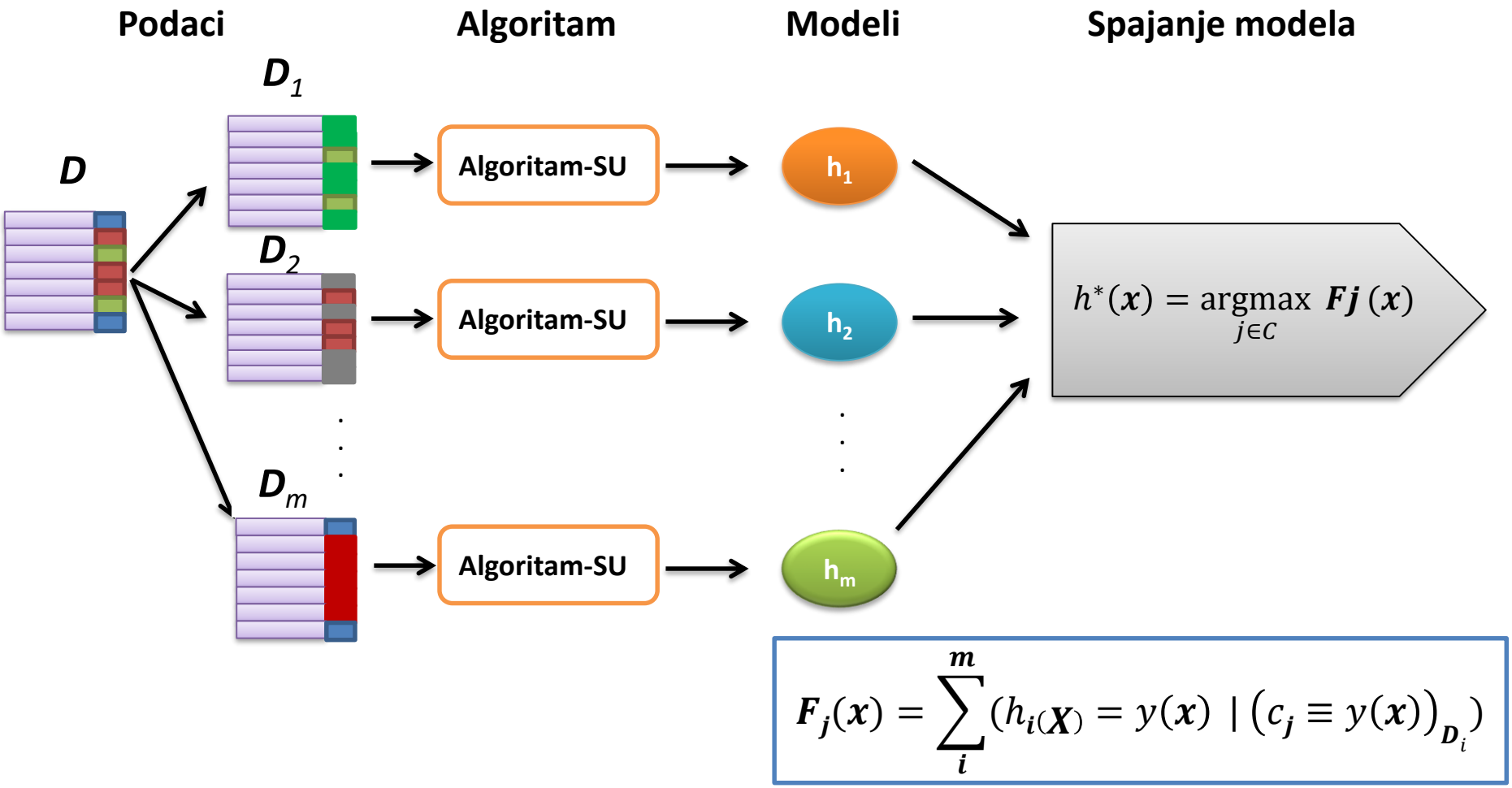
(Y=-1)	(Y=1)
000	111

„Buffer" zona

001	011
010	110
100	101



ECOC: Error Correcting Output Coding



ECOC: **E**rror **C**orrecting **O**utput **C**oding

(Dietterich/Bakiri, 1995)

Ideja: Učenje klasifikatora $[h_1(\boldsymbol{x}), h_2(\boldsymbol{x}),\ldots, h_m(\boldsymbol{x})]$ kao kodnih-riječi

M >> $\log_2$(K) - redundancija ?!

Učenje

Za i=1,M

a) (Slučajno) particioniranje K klasa u dva različita podskupa $\{A, B\}_i$

b) Re-labeliranje primjera u dvije nove klase $\{A, B\}_i$

c) Učenje $h_i(\mathbf{x})$ za klasifikaciju primjera $\{A, B\}_i$

d) Ponavljaj

Klasifikacija novog primera

a) Ako je $h_i(\mathbf{x})=A_i$, tada sve originalne klase u A_i dobiju 1 glas; odnosno ukoliko je $h_i(\mathbf{x})=B_i$ sve originalne klase u B_i dobiju 1 glas

b) Konačno, klasa s najviše dobivenih glasova je predikcija ECOC ansambla

Kombiniranje predikcija u ansamblu

Glasanje

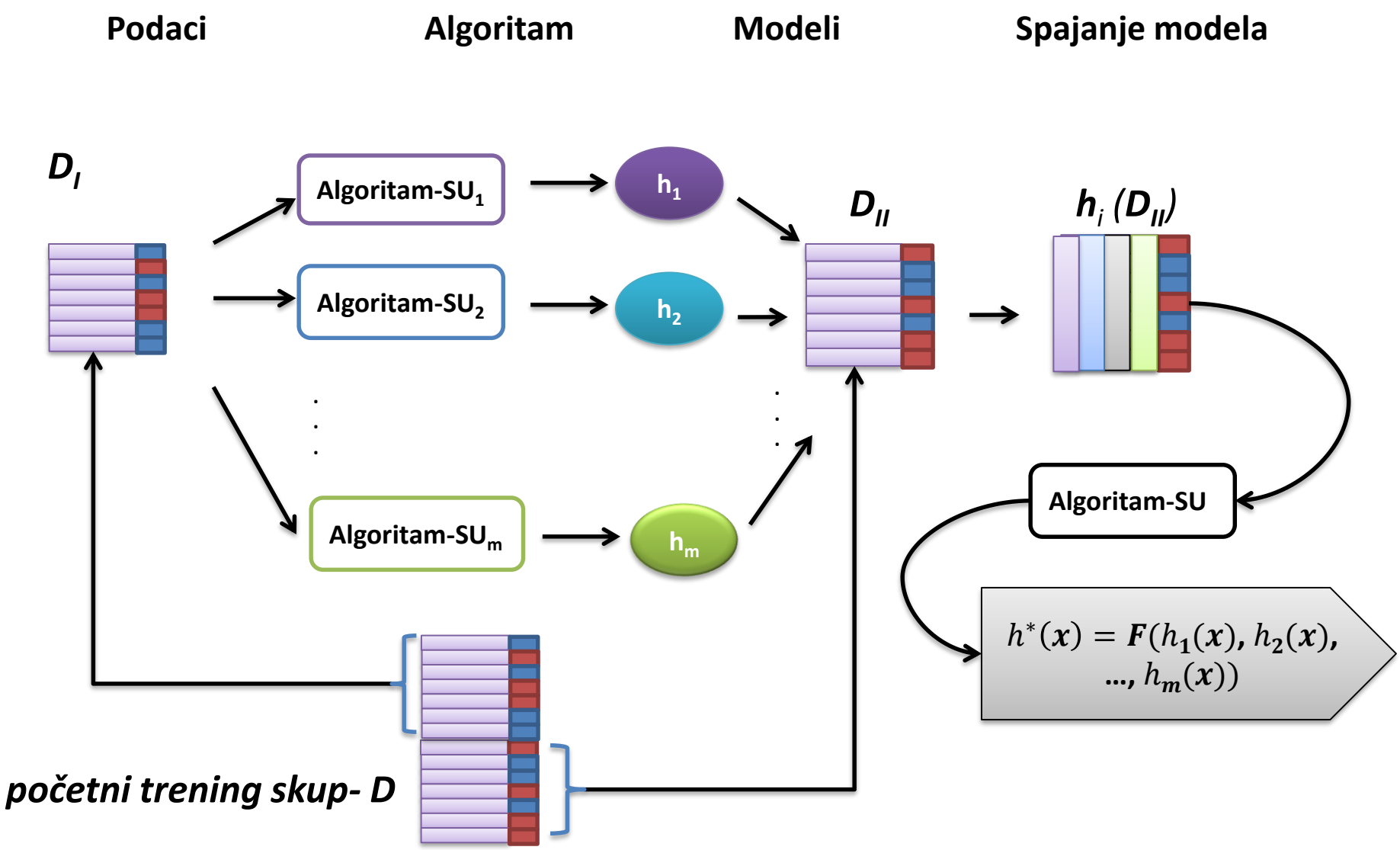
- Svaki član ansambla daje glas za jednu klasu (za ECOC je malo kompliciranije)
- Predviđanje klase – ona koja ima najveći broj glasova

Težinsko glasanje

- Težinska suma glasova članova ansambla
- Težine koje se daju članovima zavise o:
  - Pouzdanost koju pojedini klasifikator daje uz svoju predikciju (vjeroj. Pripadanja predviđenoj klasi)
  - O procjeni prosječne točnosti klasifikatora (npr. boosting)

- **Stacking**
  - Zašto ne učiti iz predviđanja članova ansambla ?

Stacking - Stacked generalization



Stacking; Stacked generalization (Wolpert -1992)

(? Stog modela; generalizacija preko stoga modela?)

= Učenje meta-modela nad predikcijama baznih modela

Učenje se odvija u dva nivoa:

1 Razdvoji skup za učenje *D* na dva dijela D_I *i* D_{II} *(slučajno* stratificirano uzorkovanje)
Na prvom dijelu T_I se "uči" nekoliko baznih algoritama L_i – za koje je poželjno da stvaraju što različitije modele h_i

2 Nakon što su naučeni modeli baznih algoritama na D_I , ti se modeli iskoriste za predikcije na D_{II} => i stvara se novi skup primjera na bazi tih predikcija D'_{II}

3 Novi algoritam uči kombinirati predikcije modela (**meta-model**) na D'_{II}

Klasifikacija novog primjera

1 Bazni modeli prvo daju svoje predikcije
2 Meta-model koristi ove predikcije da bi napravio konačnu predikciju ansambla

Zašto kombiniranje modela dobro funkcionira (I)

Statistički pogled

- Uz konačni skup primjera za učenje – mnoge hipoteze tipično funkcioniraju približno jednako dobro
- Podsjetnik : Klasifikator prema Optimalnom Bayesovom principu

$$c(x_i) = \arg\max_{c_j \in C} \sum_{h_k \in H} P[c_j | h_k] \cdot P[h_k | D]$$

  - Težinski usrednjeno glasanje svih hipoteza
  - Težine – aposteriorne vjerojatnosti hipoteza
  - Teorijski pokazano – najbolji mogući klasifikator!

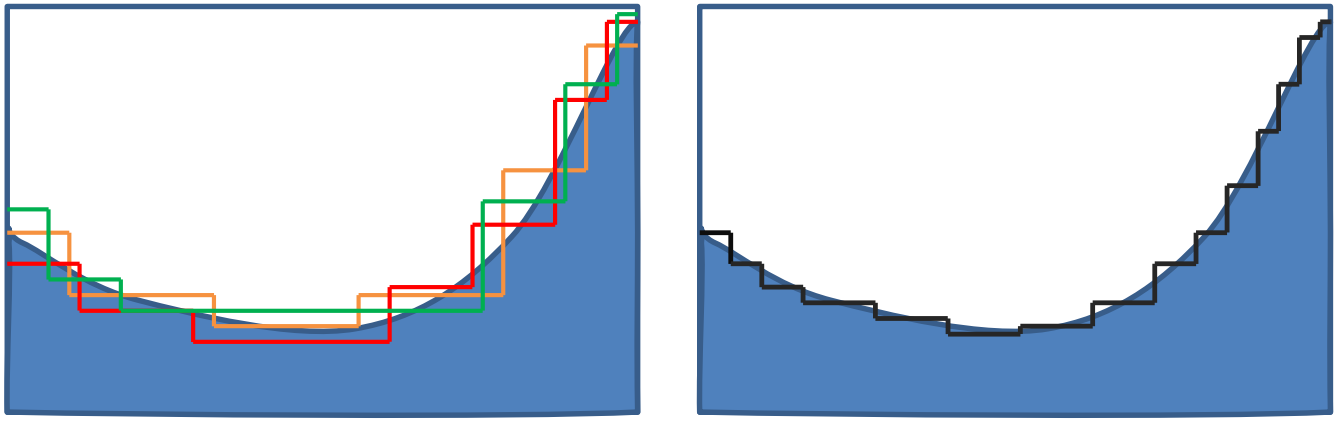
Ansambli predstavljaju aproksimaciju Optimalnog Bayesovog klasifikatora !

Zašto kombiniranje modela dobro funkcionira (II)

Problem reprezentacije modela

- Optimalna funkcija cilja ne mora biti ni jedan individualni klasifikator – no može se bolje aproksimirati usrednjavanjem većeg broja individualnih modela

- Primjer – Stabla odlučivanja –=> slučajna šuma



Zašto kombiniranje modela dobro funkcionira (III)

Problem optimizacije

- Svi algoritmi pretražuju prostor hipoteza tražeći dovoljno dobru hipotezu
- Kako takvih može biti beskonačno mnogo – heuristika pretraživanja postaje ključna
- Algoritam pretraživanja može zapeti u lokalnom minimumu
- Jedna strategija za izbjegavanje lokalnih minimuma – ponavljanje pretraživanja uz randomizaciju (početne točke)
  - To vodi na => bagging !

Ansambli: sažetak

- Metode bazirane na kombiniranju više modela u jednu predikciju
- Poboljšavaju točnost u odnosu na individualne modele, jer reduciraju ili varijancu ili bias (ili oboje !)
- Bagging – redukcija "varijance"; efikasna za nestabilne, kompleksnije modele/hipoteze
  - "paralelno" stvaranje modela
  - Osnova su: repetitivno (bootstrap) uzorkovanje i usrednjavanje predikcija (regresija), odnosno većinsko glasanje (klasifikacija)
- Boosting – redukcija pristranosti (bias-a), ali i povećanje margine
  - "sekvencijalno" stvaranje modela
  - fokus na teže dijelove/primjere; daje težinu pojedinim modelima prema njihovoj točnosti
  - osjetljivost na „outliere"

Ansambli: sažetak

- S obzirom da zahtijevaju učenje većeg broja modela
  - vremenski su i memorijski zahtjevne metode

- Gotovo na svim realnim problemima, kod kojih je važna prediktivna točnost - najbolje rezultate postižu ansambli (Kaggle => XGBoost) !

Literatura - Ansambli

- The Elements of Statistical Learning
  Hastie, Tibshirani, Friedman (ch. 15)
- AI – Modern approach
  Russel & Norvig (ch 18.4)
- T. Dieterich: Ensemble Methods in Machine Learning
  Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1857 (2000), pp. 1-15
- Bagging (L. Breiman)
  Random forests: http://stat-www.berkeley.edu/users/breiman/rf.html
  Bolje: R -package (randomForest);
- Boosting (www.boosting.org)

Y. Freund, Robert E. Schapire: Experiments with a new boosting algorithm. In: Thirteenth International Conference on Machine Learning, San Francisco, 148-156, 1996

Schapire, R. E. and Freund, Y. (2012). Boosting: Foundations and Algorithms. MIT Press.