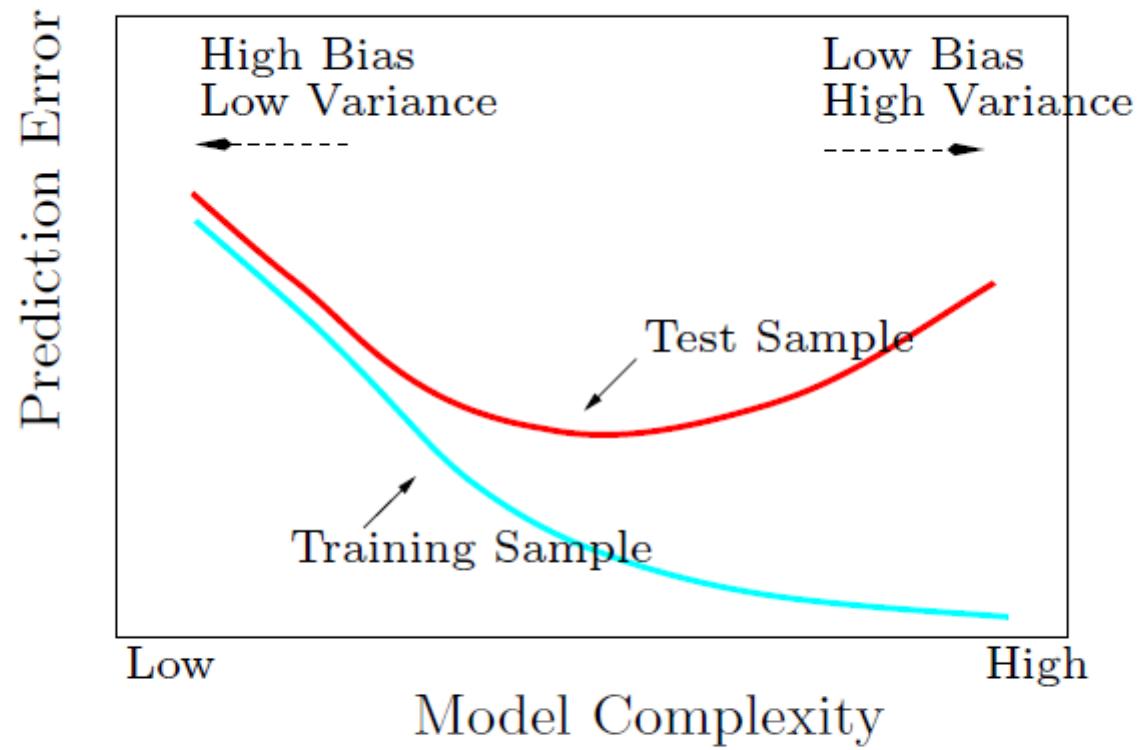


# Strojno učenje

Ansamblji modela

Tomislav Šmuc



**FIGURE 2.11.** *Test and training error as a function of model complexity.*

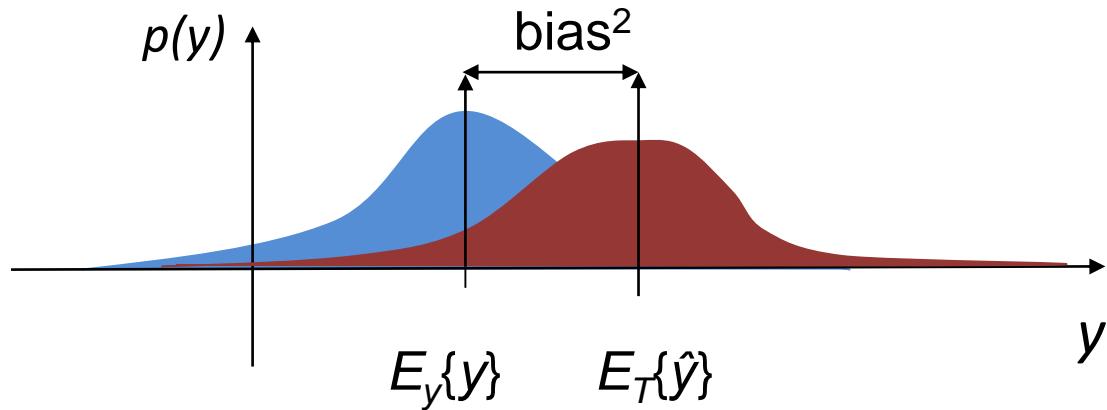
## Očekivane vrijednosti

$$E(e) = \text{bias}^2 + \text{varijanca} + \text{šum}$$

$$E_T[(y - \hat{y})^2] = \underset{a}{(E_T[\hat{y}] - y)^2} + \underset{b}{E_T[(\hat{y} - E_T[\hat{y}])^2]} + \underset{c}{E[\varepsilon | x]}$$

- Pristranost/Bias: sistematska greška na točki  
 $x$  - prosjek preko "svih" skupova za učenje T veličine N
- Varijanca: Varijacija greške oko prosječne vrijednosti prediktora (~razl. Podaci za učenje)
- Šum: Greška u određivanju stvarnih vrijednosti  $y(x)$

# Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela

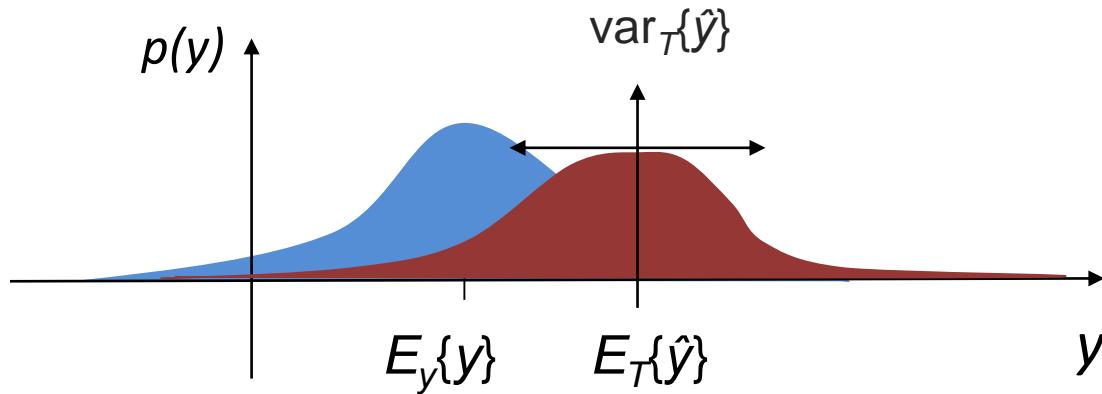


$$(E_y\{y\} - E_T\{\hat{y}\})^2$$

$E_T\{\hat{y}\}$  = prosječni rezultat modela (preko svih  $T$ )

bias<sup>2</sup> = greška između stvarne vrijednosti i prosječnog estimacijskog modela

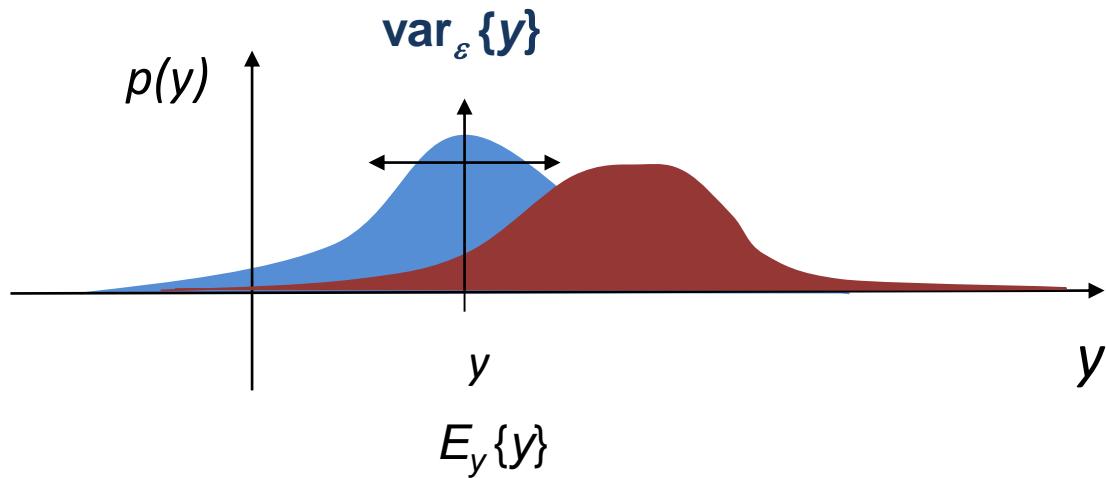
# Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela



$$\text{var}_T\{y\} = E_T\{(\hat{y} - E_T\{\hat{y}\})^2\}$$

$\text{var}_T\{\hat{y}\}$  = estimacijska varijanca = zbog over-fitinga

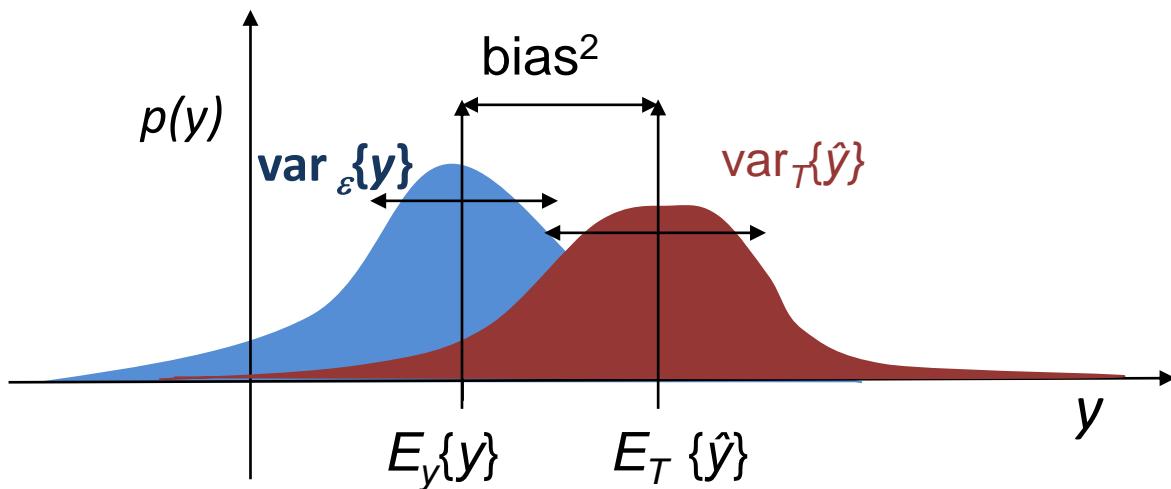
# Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela



$$\text{var}_{\varepsilon}\{y\} = E_y\{(y - E_y\{y\})^2\}$$

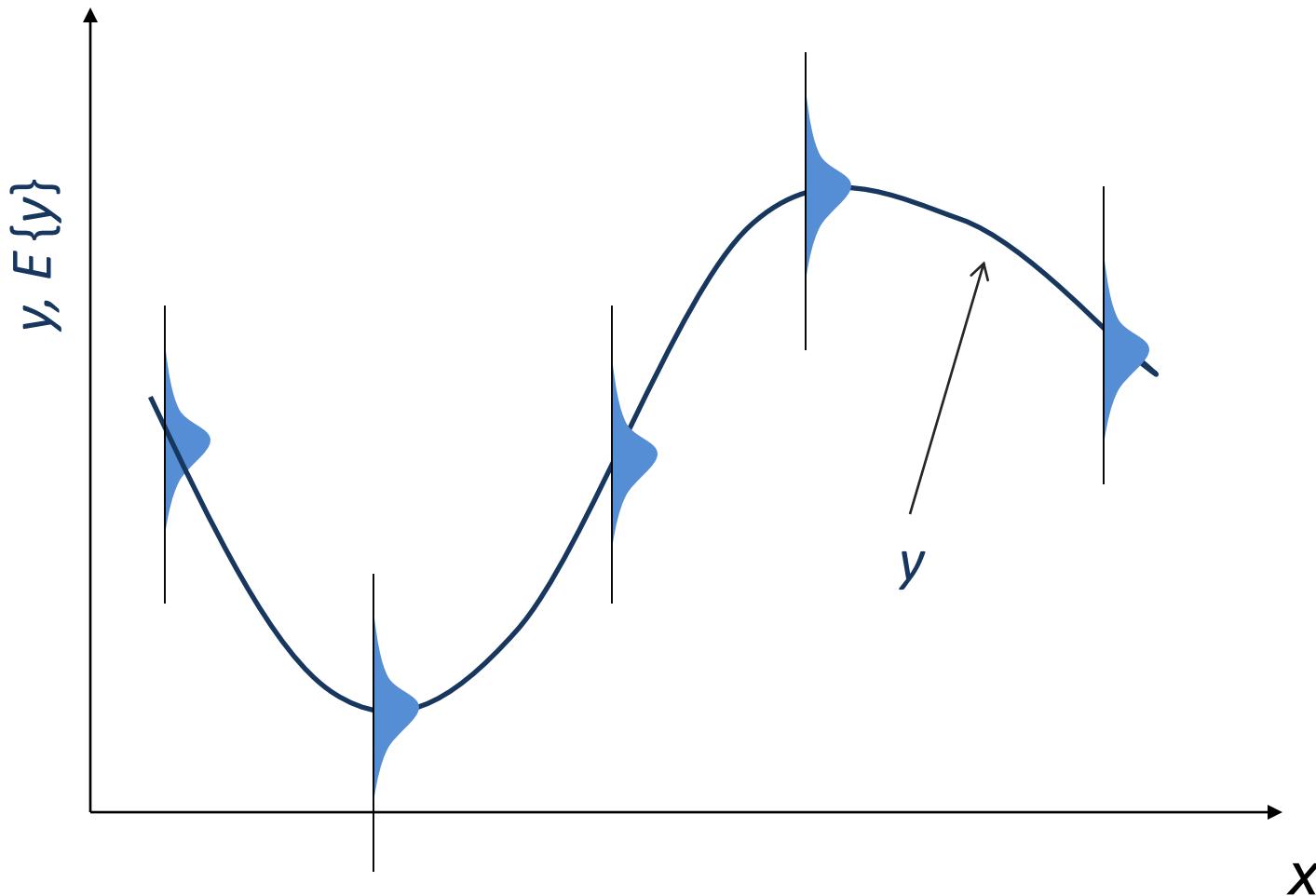
rezidualna greška = minimalna greška koju možemo dostići

# Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela

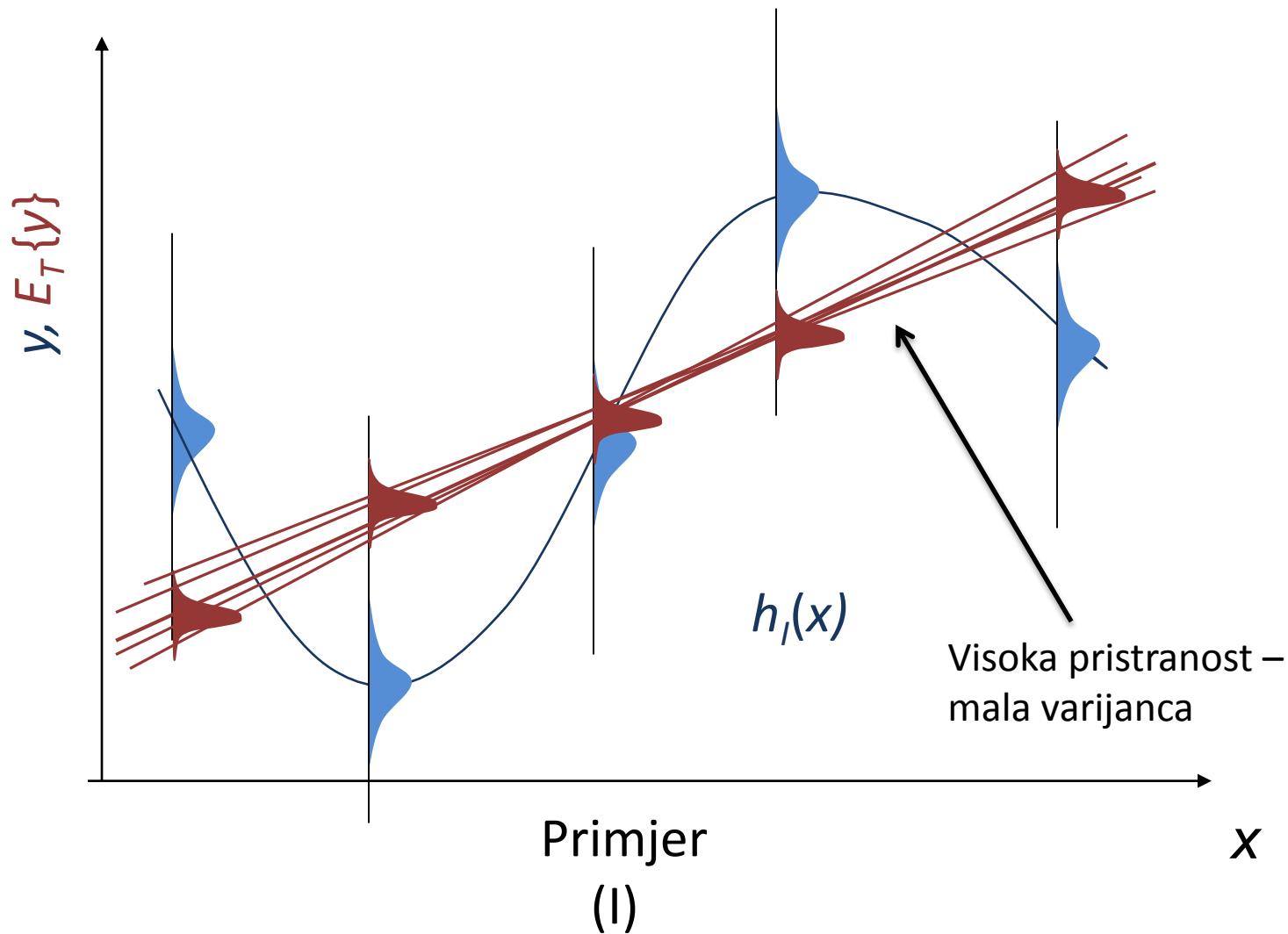


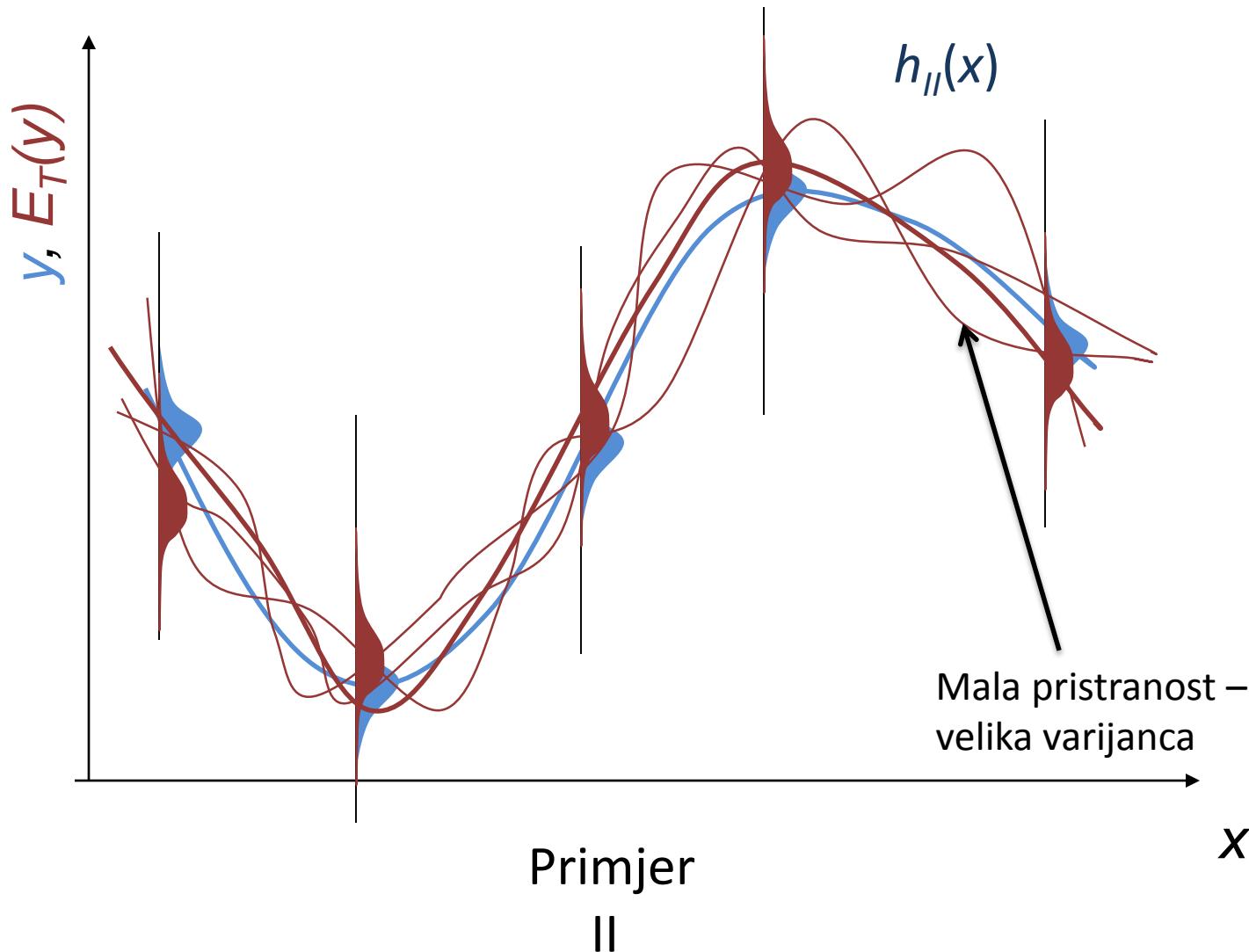
$$E = \text{var}_\varepsilon\{y\} + \text{bias}^2 + \text{var}_T\{\hat{y}\}$$

# Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela

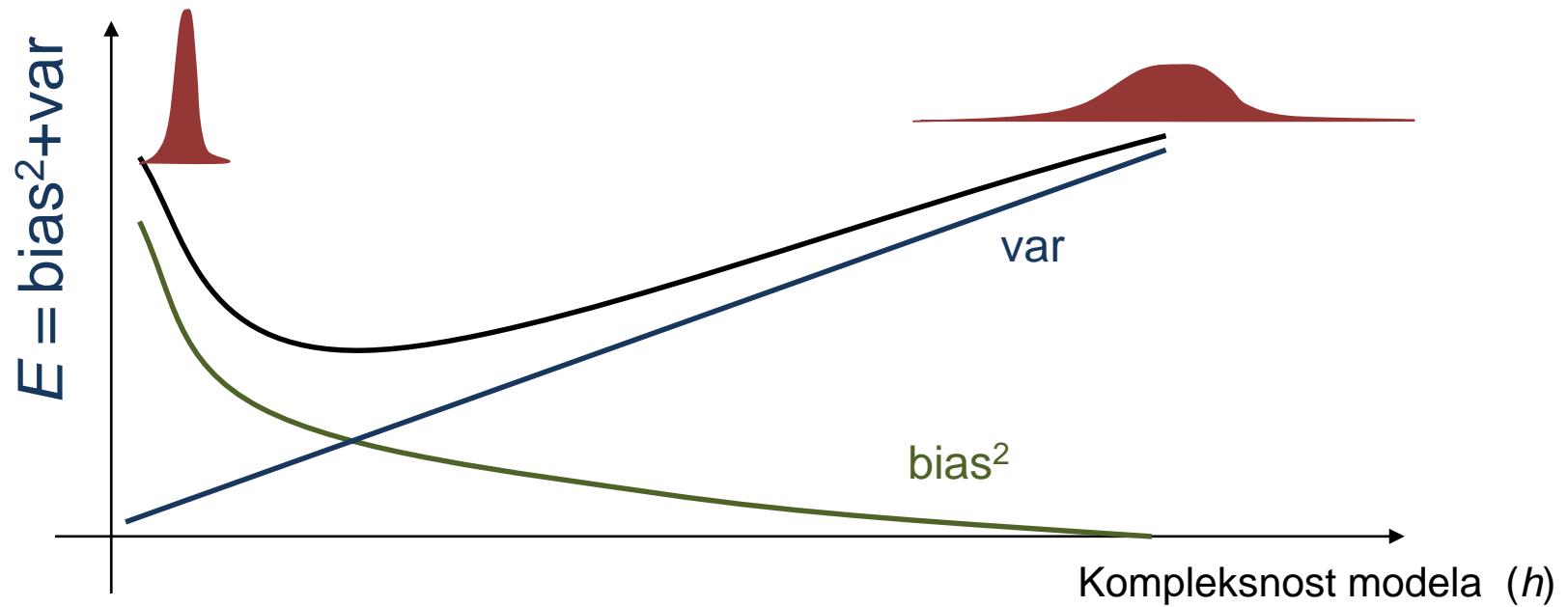


# Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela





# Dekompozicija prediktivne pogreške: Pristranost i varijanca modela



Pristranost (bias) obično pada s povećanjem kompleksnosti modela, dok se varijanca povećava s kompleksnosti modela

# Ansamblji

## IDEJA:

- Umjesto jednog modela/klasifikatora uči se skup/ansambl modela/klasifikatora
- Kombiniraju se predikcije više klasifikatora

## MOTIVACIJA:

- Redukcija varijance: rezultati združenog modela manje ovise o specifičnostima jednog skupa za učenje
- Redukcija pristranosti: kombinacija više modela/klasifikatora može učiti/reprezentirati složenije koncepte nego jedan model/klasifikator

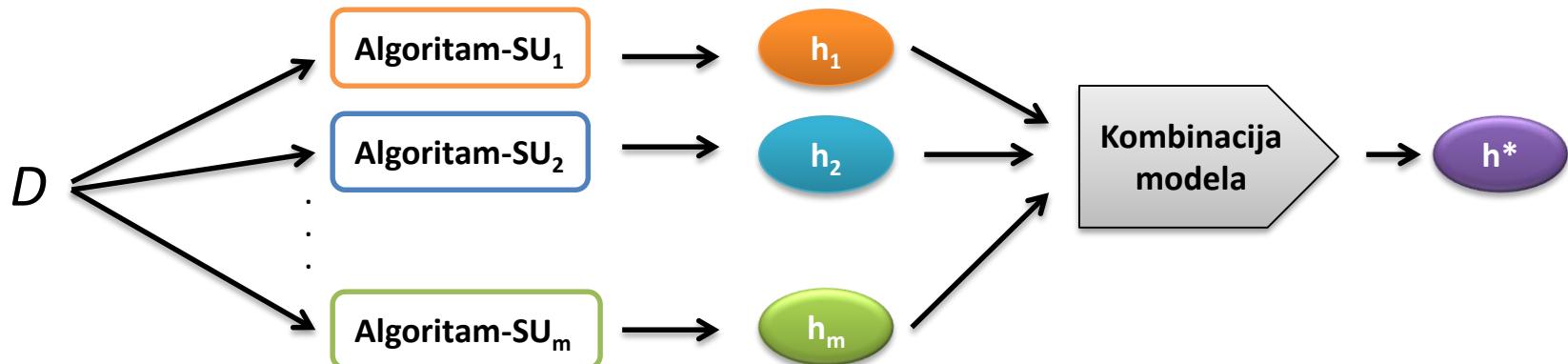
## KLJUČNI KORAK:

- Kako formirato ansambl klasifikatora – na osnovu samo jednog skupa za treniranje

## Ansambli (en Ensembles)

= Kombiniranje predikcija više modela koji su napravljeni s istim/različitim algoritmom na istim/različitim podacima - s ciljem poboljšavanja predikcije u odnosu na jedan model

Podaci                  Algoritam (1 ili više)                  Modeli                  Spajanje modela                  Novi model



## Ansambli (en Ensembles)

### = Kombiniranje modela

Zašto ansambli ?

Pretpostavimo da imamo  $L$  nezavisnih modela (klasifikatora npr.), čija je individualna točnost  $p$ , tada se može pokazati da vrijedi:

$$P(\hat{y} = y) = \sum_{k=0}^{\lfloor L/2 \rfloor} p^{L-k}(1-p)^k$$

Gdje je:

$P(\hat{y} = y)$  - vjerojatnost točne klasifikacije  
ansambla

$\lfloor L/2 \rfloor \Rightarrow$  najveći cijeli broj  $\leq L/2$   
(većina pobijeđuje)

... točnost ansambla-klasifikatora dobivenog  
glasanjem  $L$  nezavisnih klasifikatora točnosti  $p$   
(većina pobijeđuje)

	$L=3$	$L=5$	$L=7$
$P=0.6$	0.648	0.683	0.733
$P=0.7$	0.784	0.837	0.901
$P=0.8$	0.896	0.942	0.980

## Osnovni problemi

1. Kako učiti/generirati bazne modele (klasifikatore)  $h_1, h_2, \dots, h_m$ 
  - Različiti algoritmi ili različiti podaci
2. Kako ih kombinirati u procesu odlučivanja

$$h^* = F(h_{1(x)}, h_{2(x)}, \dots, h_{m(x)})$$

$F(\mathbf{h})$  – prosječna vrijednost, težinski usrednjena  
prosječna vrijednost, većinsko glasanje

## Tipovi ansambl metoda

1. Bazirani na učenju nad različitim dijelovima/distribucijama iz skupa podataka za učenje
  - Bagging; Boosting
2. Manipuliranje izlaznim varijablama
  - ECOC (Error Correcting Output Coding)
  - Stacking (stacked generalization)
3. Zašto ansambl (dobro) funkcioniraju ?

# Ansambl

## Pogled na bagging i boosting

- Tehnike usrednjavanja:
  - “Paralelno/nezavisno” generirani modeli - usrednjena predikcija
  - Bagging, random forests
  - Ovim pristupima smanjuje se primarno varijanca greške
- Tehnike “boosting” tipa (en. boost - pojačati)
  - “Sekvencijalno” generirani modeli
  - Primjeri: Adaboost, Gradient-Boosting (XGBoost)
  - Ovim pristupom smanjuje se primarno pristranost (bias) (kasnija istraživanja pokazala su da boosting smanjuje i varijancu modela)

## Bagging (Bootstrap **A****G**gregat**I****N****G**)

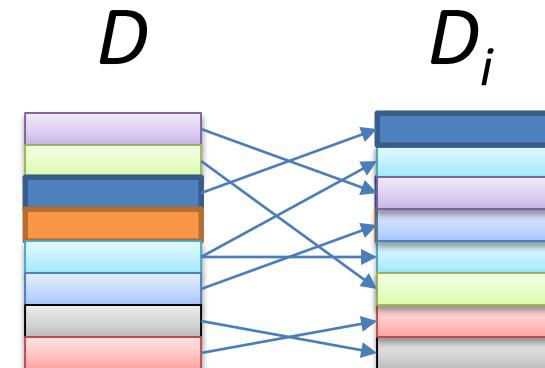
- Napraviti (velik) broj modela koristeći bootstrap replike podataka
- Spojiti u jedan zajednički (bagged) model – odnosno predikciju
- Svi modeli “glasaju”:
  - U slučaju klasifikacije – pravilo većine
  - U slučaju regresije – prosjek svih predikcija

## Bootstraping

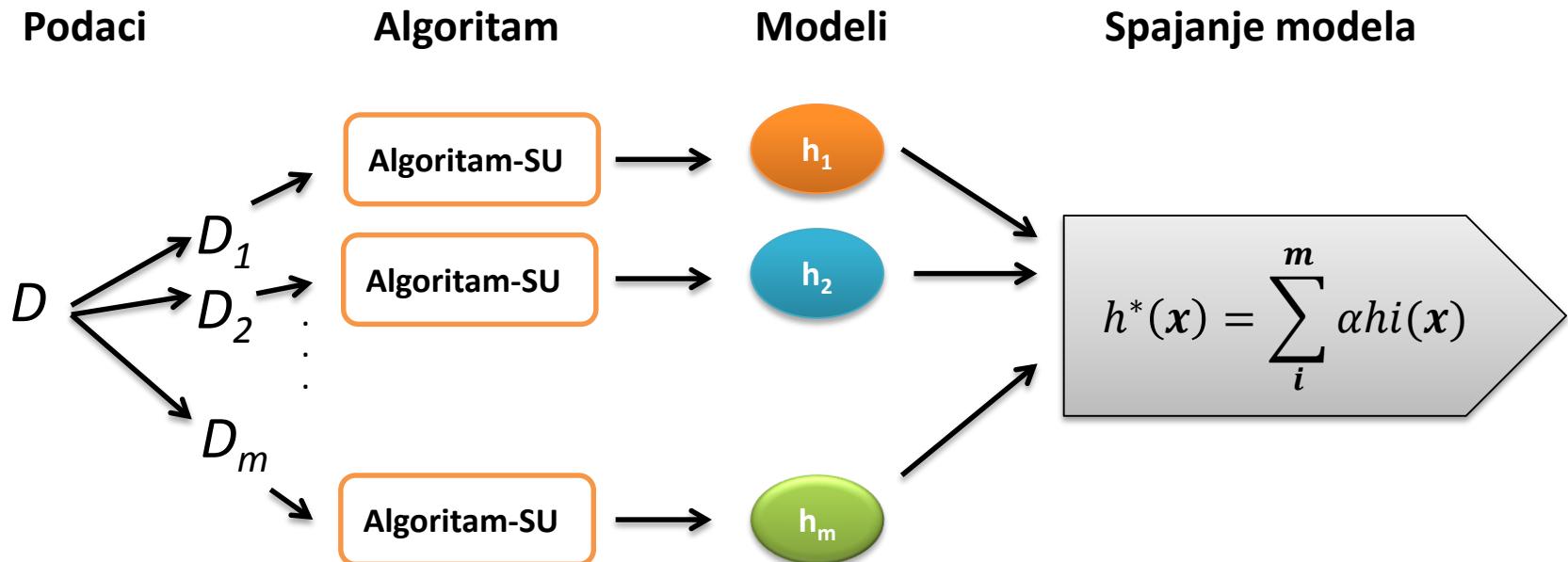
- metoda ponavljanog uzorkovanja iz skupa podataka (en resampling statistical method)
- Korištenje skupa podataka za učenje da se naprave slučajni skupovi – replike originalnog skupa podataka, radi dobivanja informacija o nekim statistikama skupa podataka (bias, variance)

### Bootstrap $D_i$ , replika skupa podataka $D$

- Dobiva se slučajnim uzorkovanjem (primjer po primjer)  $|D|$  primjera iz  $D$  sa ponavljanjem (to znači da u  $D_i$  nalazimo i kopije istog primjera) (en. with replacement!)



# Bagging



$D_i$  - bootstrap replika podataka

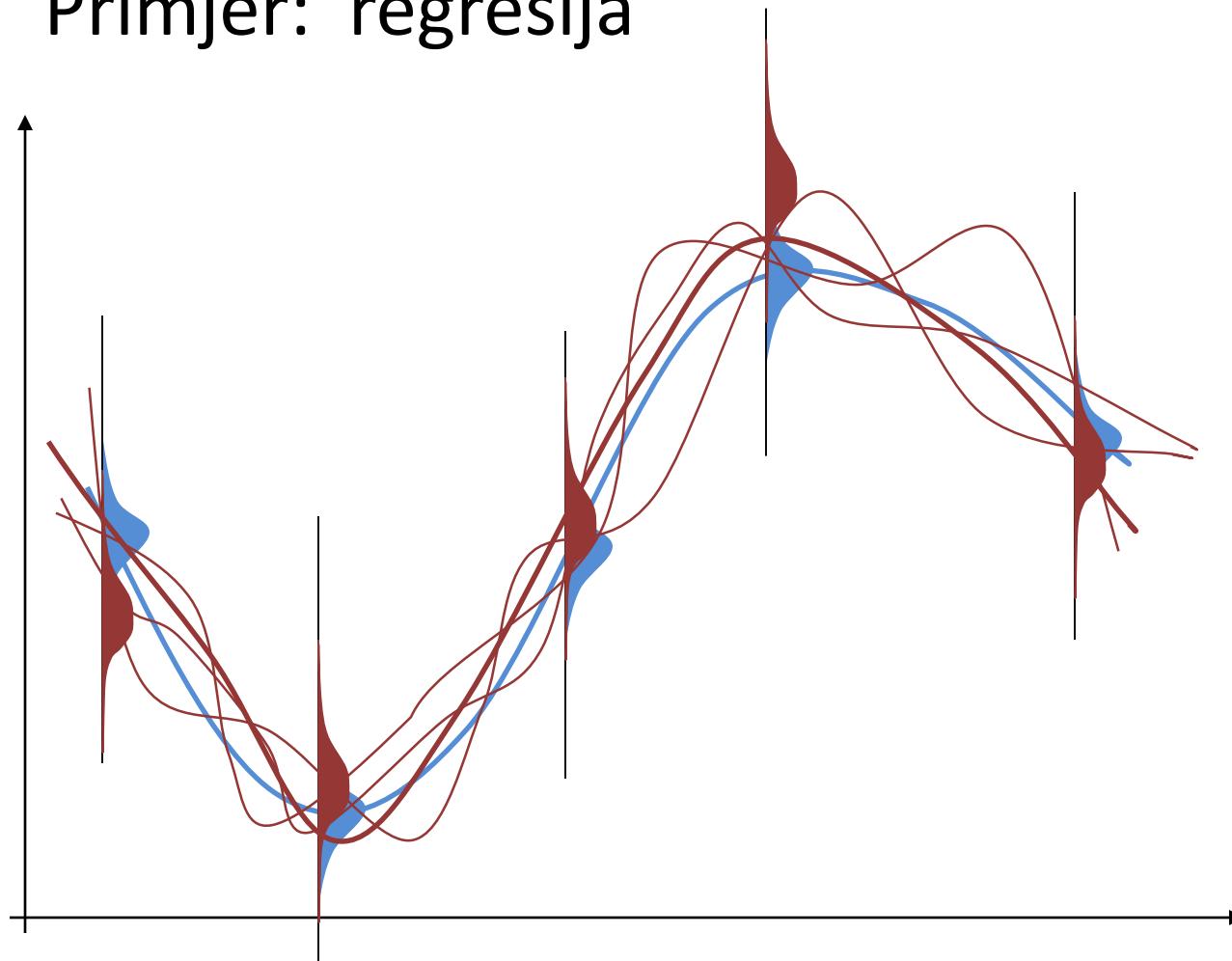
$h_i$  - klasifikator baziran na  $D_i$

$$\alpha_i = 1/m$$

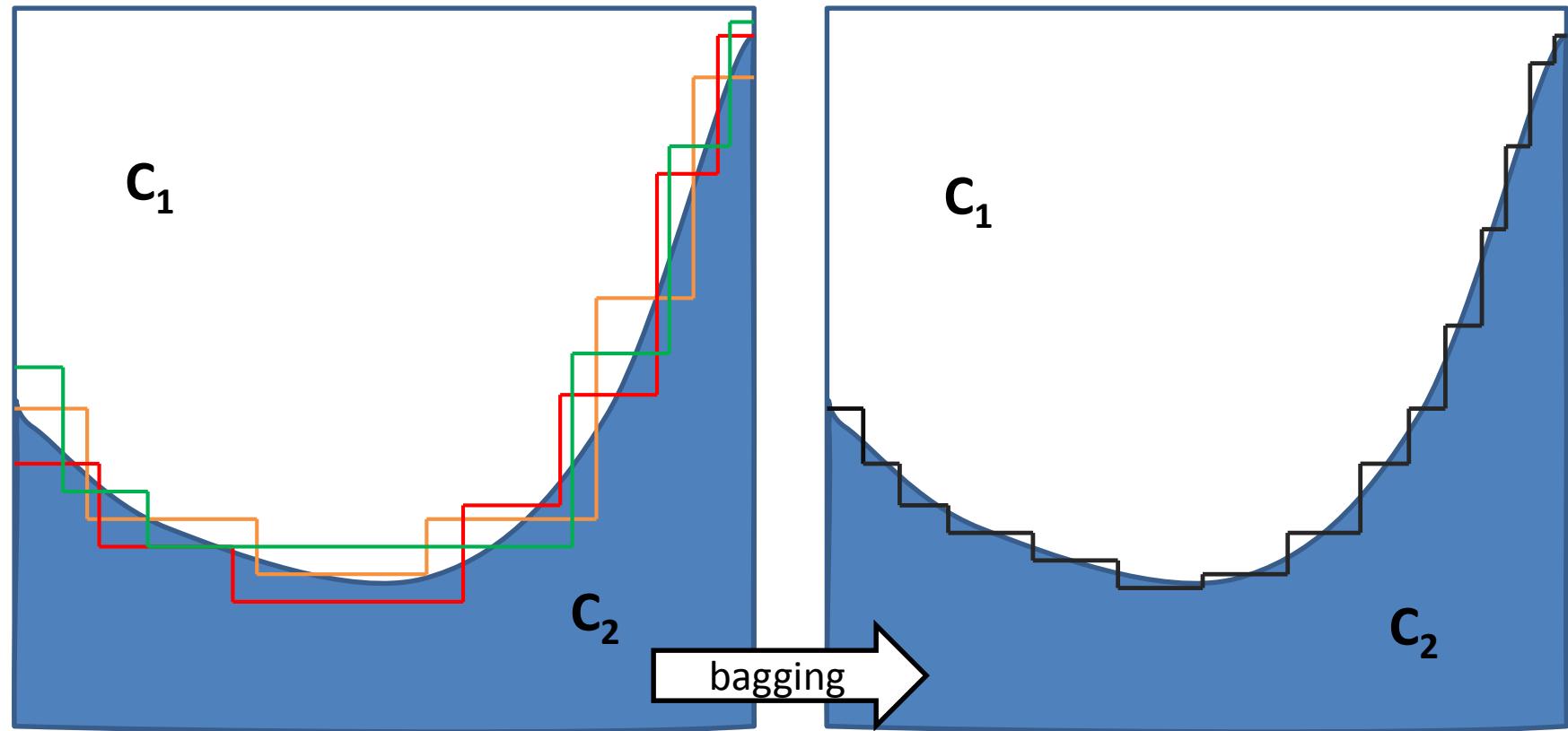
# Bagging

- Koji modeli (tipovi algoritama) bi najviše dobili baggingom ?
- Baggingom eliminiramo varijancu => dakle kompleksni modeli
- To uključuje stabla odlučivanja – tipično “nestabilni” model, ali i Neuralne mreže ...

## Primjer: regresija



## klasifikacijski primjer: stabla odlučivanja



# Ansambl: bagging

Očekivana kv. greška jednog modela (regresija)

$$h_i(\mathbf{x}) = y(\mathbf{x}) + \varepsilon_i(\mathbf{x})$$

$$E[(h_i(\mathbf{x}) - y(\mathbf{x}))^2] = E[(\varepsilon_i(\mathbf{x}))^2]$$

Prosječna kv. greška  $m$  modela:

$$\bar{E}_m = \frac{1}{m} \sum_i E[(\varepsilon_i(\mathbf{x}))^2]$$

Kolika je prosječna kv. greška  $h^*$  modela ?       $h^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{m} \sum_i h_i(\mathbf{x})$

.... uz pretpostavku da su greške modela  $\varepsilon_i(\mathbf{x})$  takve da vrijedi

$$E[\varepsilon_i(\mathbf{x})] = 0 \quad \Rightarrow \text{srednja vrijednost } \sim 0$$

$$E[\varepsilon_j(\mathbf{x})\varepsilon_i(\mathbf{x})] = 0 \quad \Rightarrow \text{greške su medjusobno nekorelirane}$$

$$\bar{E}_{h^*} = E \left[ \left( y(\mathbf{x}) - \frac{1}{m} \sum_i h_i(\mathbf{x}) \right)^2 \right] = E \left[ \left( \frac{1}{m} \sum_i \varepsilon_i(\mathbf{x}) \right)^2 \right] = \frac{1}{m} \bar{E}_m$$

$$\bar{E}_{h^*} \leq \bar{E}_m !!$$

## Bagging - Pristranost i varijanca

Pristranost(Bias):  $E[h^*(\mathbf{x}) - y]$

Varijanca:  $\sum_i(h^*(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{x}))^2/(m - 1) \Rightarrow 0$ , za  $m \gg$

Dakle:

- Bagging reducira varijancu
- To je povoljno svojstvo za algoritme/modele koji imaju visoku varijancu, a mali bias („sklonost overfitanju“)
  - stabla odlučivanja, 1-nn...

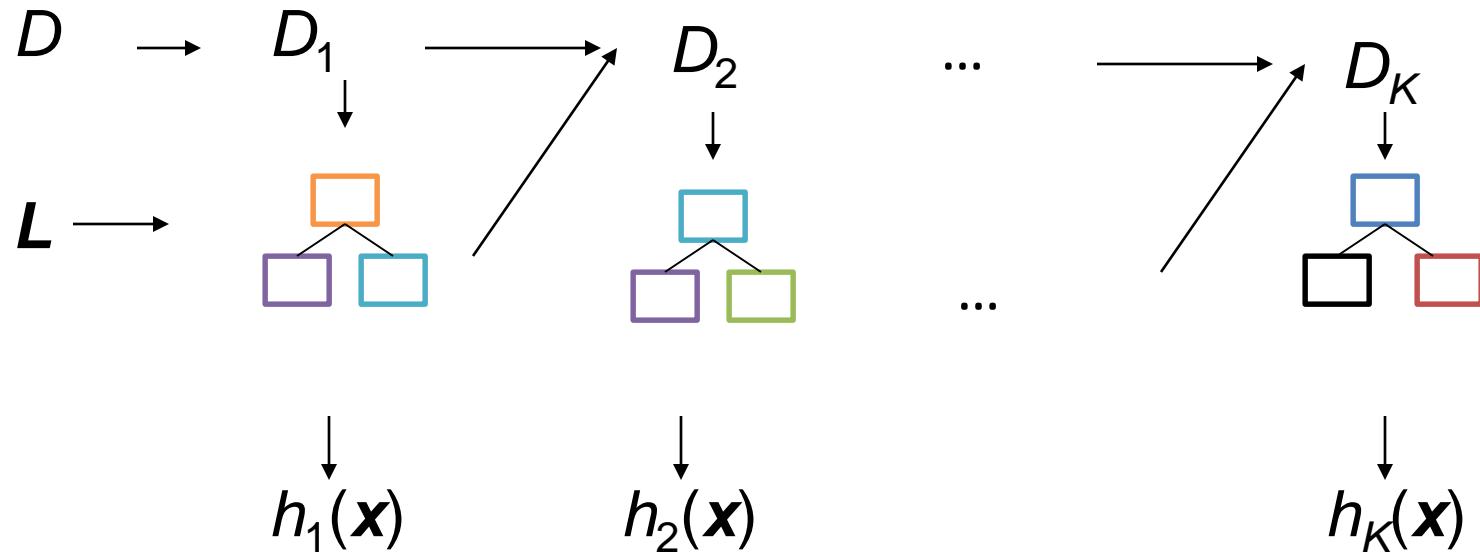
# Random forests algoritam

- Kombinira bagging sa slučajnim odabirom podskupa varijabli/atributa (perturbacija modela)
  - Gradi stabla odlučivanja iz bootstrap uzorka skupa za učenje
  - Umjesto izabiranja najboljeg atributa za *split* – između svih atributa – izabire  $k(split)$  slučajno odabranih atributa (= bagging , uz  $n$  atributa u skupu podataka:  
=> tipično za RF broj splitting atributa  $k(split)=\sqrt{n}$ )
- Balans bias/varijanca korištenjem  $k$ :
  - Što je manji  $k$  – veća je redukcija varijance, ali je i veća pristranost (bias) stabala

# Boosting metode – “jačanje” slabih modela

- Motivacija:
  - kombiniranje outputa “slabih” modela da bi se napravio točniji ansambl modela.
- “Slabi” modeli:
  - modeli s visokom pristranosti (bias) (klasifikacija - malo bolji od slučajne predikcije)
- U odnosu na bagging:
  - Modeli se rade “sekvencialno” **na modificiranim verzijama podataka**
  - Krajnja predikcija je kombinacija predikcija pojedinačnih modela uz korištenje težinskih faktora

# Ansamblji: boosting



Klasifikacija:  $h(\mathbf{x}) = \text{većina od } \{h_1(\mathbf{x}), \dots, h_K(\mathbf{x})\}$   
uz težine  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K\}$

Regresija:  $h(\mathbf{x}) = \beta_1 h_1(\mathbf{x}) + \beta_2 h_2(\mathbf{x}) + \dots + \beta_K h_K(\mathbf{x})$

# AdaBoost (Adaptive Boosting) algoritam

- (Freund & Schapire, 1997)
- Generira modele tako da sukcesivno mijenja težine primjera u skupu za učenje
- Adaboost povećava težine primjera za koje su prethodni modeli imali loše predikcije – dakle fokusira učenje na “teške” slučajeve
- Na kraju: glasanje s težinskom-većinom; točniji modeli imaju veći utjecaj u glasanju

# AdaBoost algoritam

**Ulaz:**  $\mathbf{D}$  – podaci za učenje,  $Y=[1,-1]$  – binarni klasifikacijski problem

Algoritam  $L$  (algoritam s visokim high biasom)

$T$  – broj iteracija,  $N$  – broj primjera za učenje

**Izlaz:** “Ojačani” (boosted) klasifikator  $F$  (model s niskim biasom)

Inicijaliziraj težine primjera:  $w_i^1 = 1/N$ , za  $i = 1, \dots, N$

Za  $t < 1, 2, \dots, T$  radi

1.  $\mathbf{p}^t = \mathbf{w}^t / \sum_{i=1}^N w_i^t$
2. Pozovi algoritam SU  $L(\mathbf{p}^t, \mathbf{X}) \Rightarrow$  rezultat je “slabi” model ( $h_t: X \rightarrow Y$ )
3. Odredi grešku  $h_t$ :  $\varepsilon_t = \sum_{i=1}^t p_i^t \frac{1}{2} |h_t(x_i) - y_i|$
4. Odredi  $\alpha^t = \log(\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t})$
5. Odredi nove težine primjera  $w_i^{t+1} = w_i^t \exp(\alpha_t \frac{1}{2} |h_t(x_i) - y_i|)$ , za  $i = 1, 2, \dots, N$

Vrati klasifikator  $F$ :

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \sum_{i=1}^T \alpha_i h_i(x) \geq 0, \\ -1, & \text{inace} \end{cases}$$

# AdaBoost algoritam

Izraz kojim mijenjamo težine primjera u iteraciji t+1:

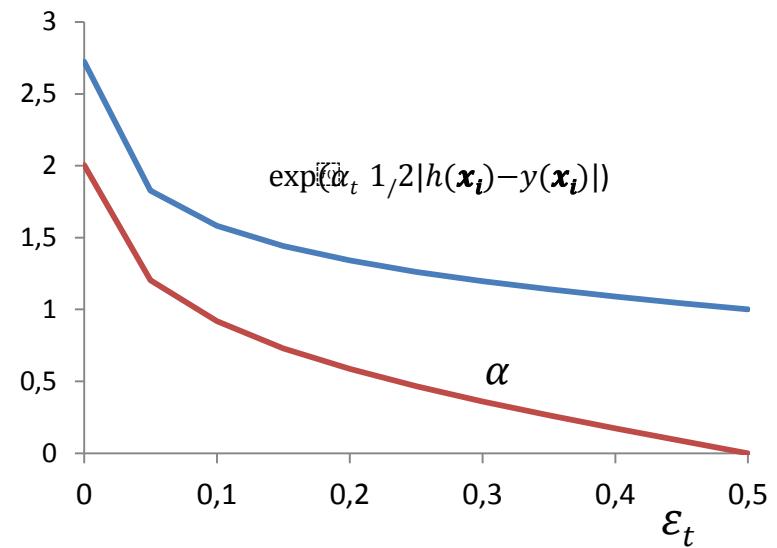
$$w_i^{t+1} = w_i^t \exp(\alpha_t \frac{1}{2} |h_t(x_i) - y_i|), \text{ za } i = 1, 2, \dots, N$$

Gdje je  $\alpha_t$  – težinski faktor modela u iteraciji t:

$$\alpha_t = \log\left(\frac{1 - \varepsilon_t}{\varepsilon_t}\right)$$

a  $\varepsilon_t$  prosječna greška u iteraciji t:

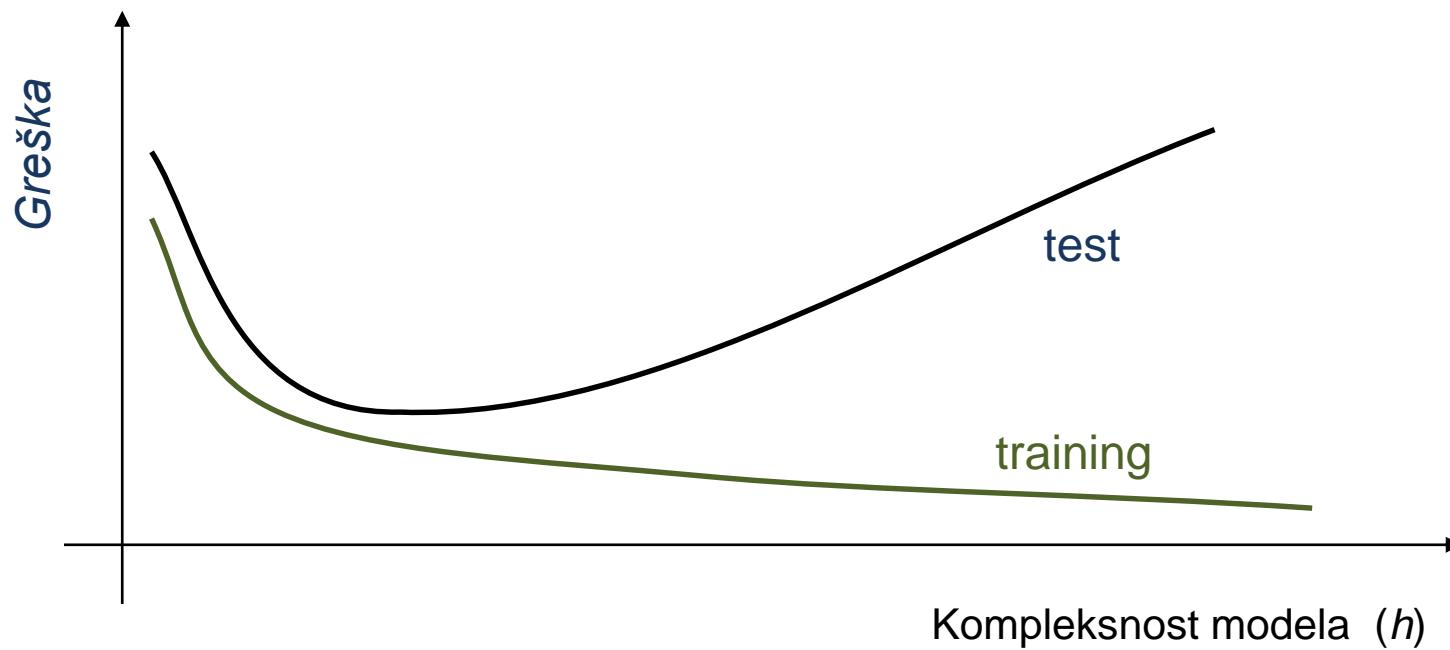
$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^t p_i^t \frac{1}{2} |h_t(x_i) - y_i|$$



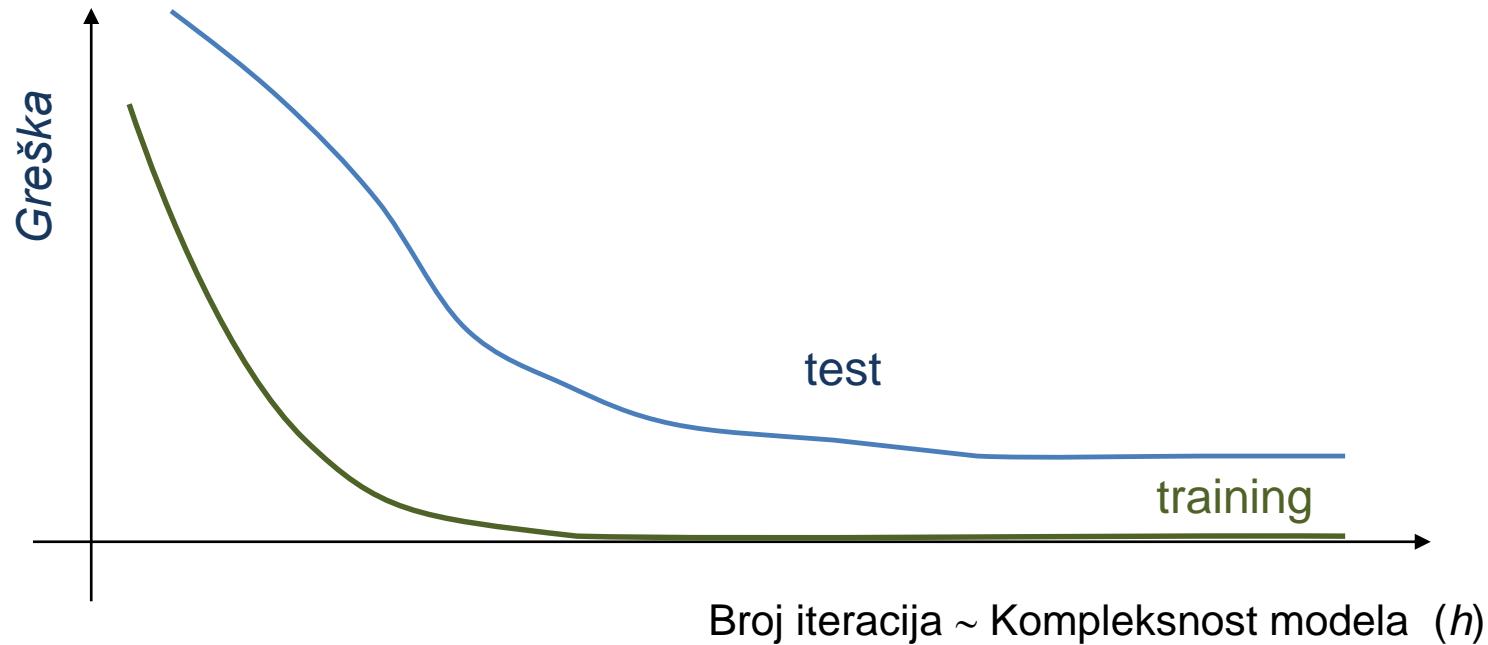
# Zašto boosting radi dobro ?

- Kombinira modele koji imaju visoki bias (jednostavni), tako da se ukupno dobije kompleksniji/ekspresivniji klasifikator
- Boosting => redukcija pristranosti (bias-a), svakom iteracijom model postaje kompleksniji ?
- Što se dešava ako imamo velik broj iteracija ( $K$ ) ? Dobit ćemo vrlo složeni model...a greška na novim primjerima – problem overfittinga ?

## Algoritmi strojnog učenja - tipični slučaj



## Boosting – tipični slučaj !?



# Boosting – Objasnjenje (I)

- Modeli koji su generirani boosting-om ( $Y=[-1,1]$ ):
  - Klasifikacija primjera je korektna ako je  $h^*(x) = y(x)$ , odnosno pogrešna ako  $h^*(x) \neq y(x)$ 

No – u boosting algoritmu **možemo mjeriti pouzdanost** klasifikacije !
  - $h^*(x)$  - je težinski zbroj glasova pojedinih (slabih) klasifikatora !
- **Mjera pouzdanosti ~ Margina (sjetite se SVM!) primjera:**

pouzdanost glasanja =  
= (težinski zbroj korektnih glasanja)-(težinski zbroj krivih glasanja)

# Boosting – Objasnjenje (II)

- Što je margina veća na skupu za učenje – za očekivati je i manju grešku i na testnom skupu (generalizacijska greška je manja)

Dakle:

- Iako je konačni klasifikator  $h^*(x)$  naizgled složeniji, margina između primjera različitih klasa se povećava, dodavanjem novih modela !?
- dakle  $h^*(x)$  na neki način postaje robustniji a istovremeno se smanjuje njegova greška na novim primjerima !
- Boosting algoritmi rade na povećavanju margine => smanjenju varijance modela
- Boosting algoritmi smanjuju pristranost, ali i varijancu konačnog modela !

# Boosting – Problemi

Osjetljivost na outliere (podatke sa povećanim šumom)

- Primjeri koji mogu predstavljati greške – dobijaju sve veću težinu pri izgradnji  $h^*(x)$  !
- Novije varijante boosting algoritama robustnije su na outliere
  - gradient boosting (XGboost) => gradient descent + boosting

# Usporedba Bagging vs Boosting

- **Bagging**
  - Tolerira šum u podacima
  - Dobro statistički utemeljena
  - bazirana na slučajnom uzorkovanju  
(primjeri/bootstrap/)
  - Daje bolju procjenu vjerojatnosti pripadanja nekoj klasi pri testiranju novih primjera
- **Boosting**
  - Osjetljiva na šum u podacima
  - bazirana na teoriji strojnog učenja
  - Obično je moguće dobiti nešto točnije modele nego bagging metodom
  - Lošija procjena vjerojatnosti pripadanja nekoj klasi pri testiranju novih primjera

# Ansambli bazirani na manipuliranju ciljnom varijablom

- Algoritmi poput stabla odlučivanja, naivnog Bayes algoritma, neuralnih mreža u principu uče jedan model/klasifikator za višeklasne ( $C > 2$ ) probleme.
- Moguće je konstruirati i meta-algoritme, koji odluku o pripadnosti klasi baziraju na binarnim klasifikatorima
- ECOC – meta-algoritam koji kombinira više (puno) binarnih klasifikatora da bi riješio problem razlikovanja više klasa.

## Ansambli bazirani na manipuliranju ciljnom varijablom

Problem **sa više klasa (>2)** primjera:  $y=1,2,\dots,K$  – klasa

Mogući pristupi:

1. Učenje K binarnih klasifikatora

- $y=1 \leftrightarrow (y=2,3,4,\dots,K)$
- $y=2 \leftrightarrow (y=1,3,4,\dots,K)$
- ....

Odluka: klasa s najvećom  $P(C = C_i | X)$

2. Učenje  $\log_2(K)$  binarnih klasifikatora (bitovi - indeksiranje K klasa)

- $h_0(x) = 1$  ako  $y=2,4,6,8$     inače 0
- $h_1(x) = 1$  ako  $y=3,4,7,8$     inače 0
- ...

Odluka: klasa s najvećim brojem glasova

→ ECOC – Error Correcting Output Coding

# Error Correcting Output Coding

- 3 bitni kod je dovoljan za reprezentiranje 8 klasa ( $\log_2 8 = 3$ ).

Klasa	Binarni klasif. Problem / klasifikator		
	h1	h2	h3
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	1	1

- No, tipično – koriste se kodovi koji imaju više bitova nego što je potrebno !
- Korištenjem redundantnih bitova (=> ime ECOC !!), omogućava robustniji klasifikator, te korigiranje grešaka (...koje su posljedica konačnog trening skupa, „loših“ atributa/variabli, odabira algoritma...)
- ECOC metoda se „oporavlja“ od individualnih grešaka !

# ECOC

- Ako je minimalna Hamming-ova udaljenost između 2 para kodnih riječi =  $d$ , tada će ECOC korigirati minimalno  $(d-1)/2$  bitova:
  - Najbliža kodna riječ onoj koja označava pravu klasu (tj njenu kodnu riječ) je u tom slučaju još uvijek korektna:
  - ECOC model dakle može ispraviti najmanje  $(d-1)/2$  bitova !

Klasa	Binarni klasif. Problem / klasifikator														
	h1	h2	h3	h4	h5	h6	h7	h8	h9	h10	h11	h12	h13	h14	h15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Gornja tablica: 15 kodni zapis – 5-klasnog klasifikacijskog problema.

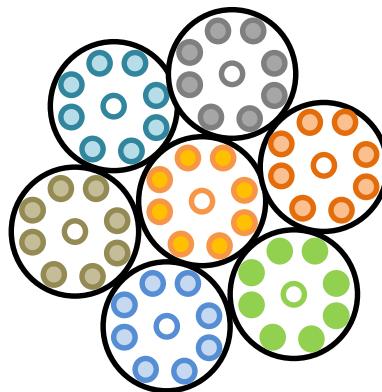
## ECOC: Error Correcting Output Coding

Mapiraj klase koje možeš kodirati sa  $\log_2(K)$  bita, u  $M > \log_2(K)$   
(redundancija => robustnost na šum)

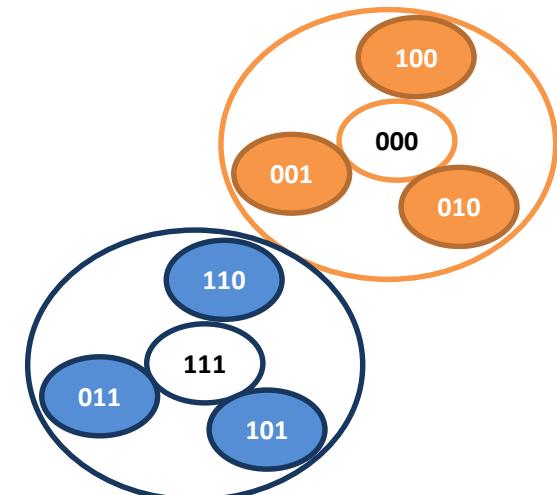
Broj kodova >> broj poruka (klasa)

Kod dekodiranja klasa se određuje prema najbližoj kodnoj-riječi

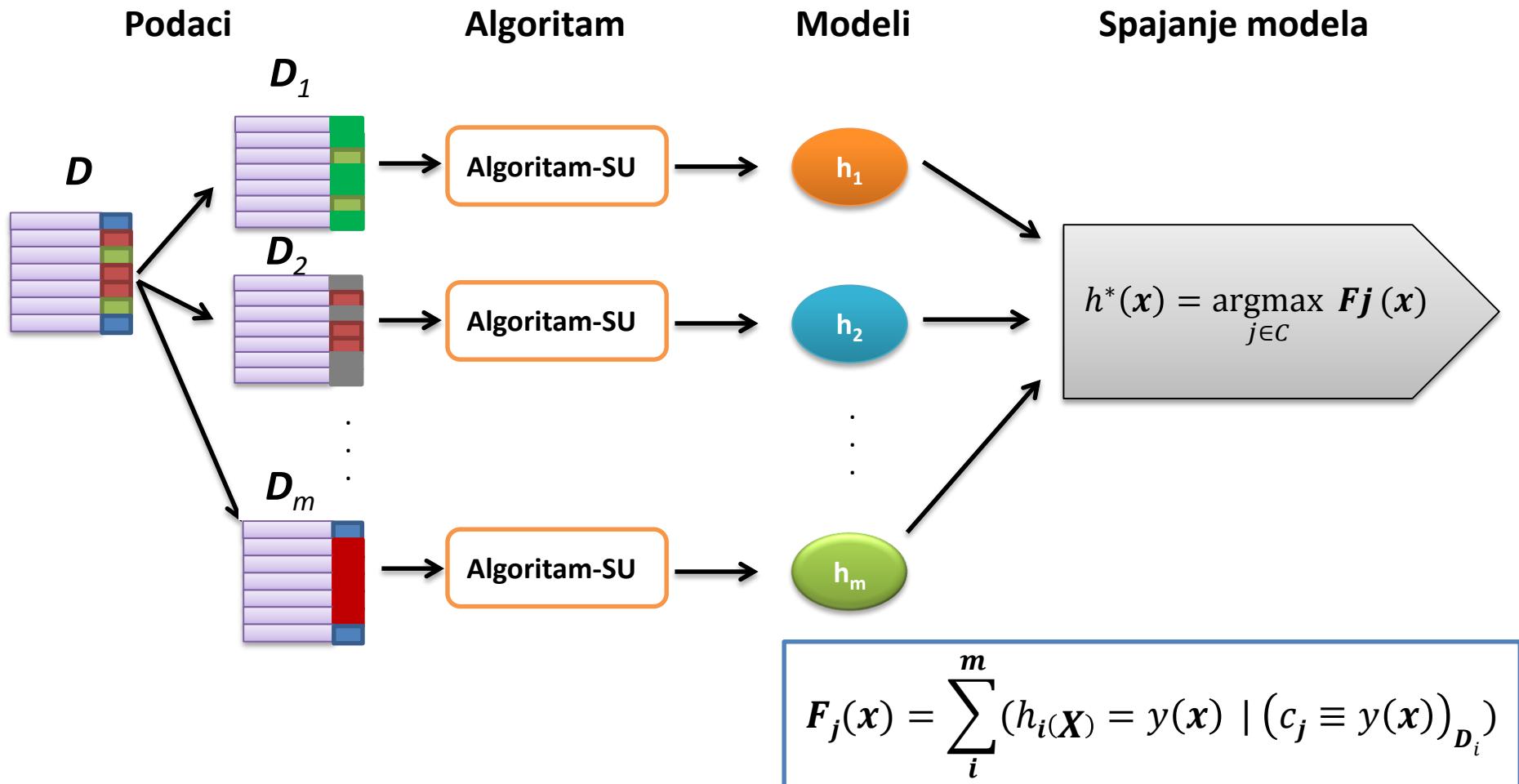
- Svaka  $\log_2(K)$  kodna-riječ (klasa) „okružena je“ sa buffer-zonom sličnih  $M$ -bitnih kodnih-riječi – nijedna druga kodna-riječ(klasa) ne može biti mapirana u buffer-zonu



Klasa – kodna riječ	
$(Y=-1)$	$(Y=1)$
000	111
„Buffer“ zona	
001	011
010	110
100	101



# ECOC: Error Correcting Output Coding



## ECOC: Error Correcting Output Coding

(Dietterich/Bakiri, 1995)

Ideja: Učenje klasifikatora  $[h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})]$  kao kodnih-riječi  
 $M \gg \log_2(K)$  - redundancija ?!

### Učenje

Za  $i=1, M$

- (Slučajno) particioniranje  $K$  klasa u dva različita podskupa  $\{A, B\}_i$
- Re-labeliranje primjera u dvije nove klase  $\{A, B\}_i$
- Učenje  $h_i(\mathbf{x})$  za klasifikaciju primjera  $\{A, B\}_i$
- Ponavljanje

### Klasifikacija novog primjera

- Ako je  $h_i(\mathbf{x})=A_i$ , tada sve originalne klase u  $A_i$  dobiju 1 glas; odnosno ukoliko je  $h_i(\mathbf{x})=B_i$  sve originalne klase u  $B_i$  dobiju 1 glas
- Konačno, klasa s najviše dobivenih glasova je predikcija ECOC ansambla

# Kombiniranje predikcija u ansamblu

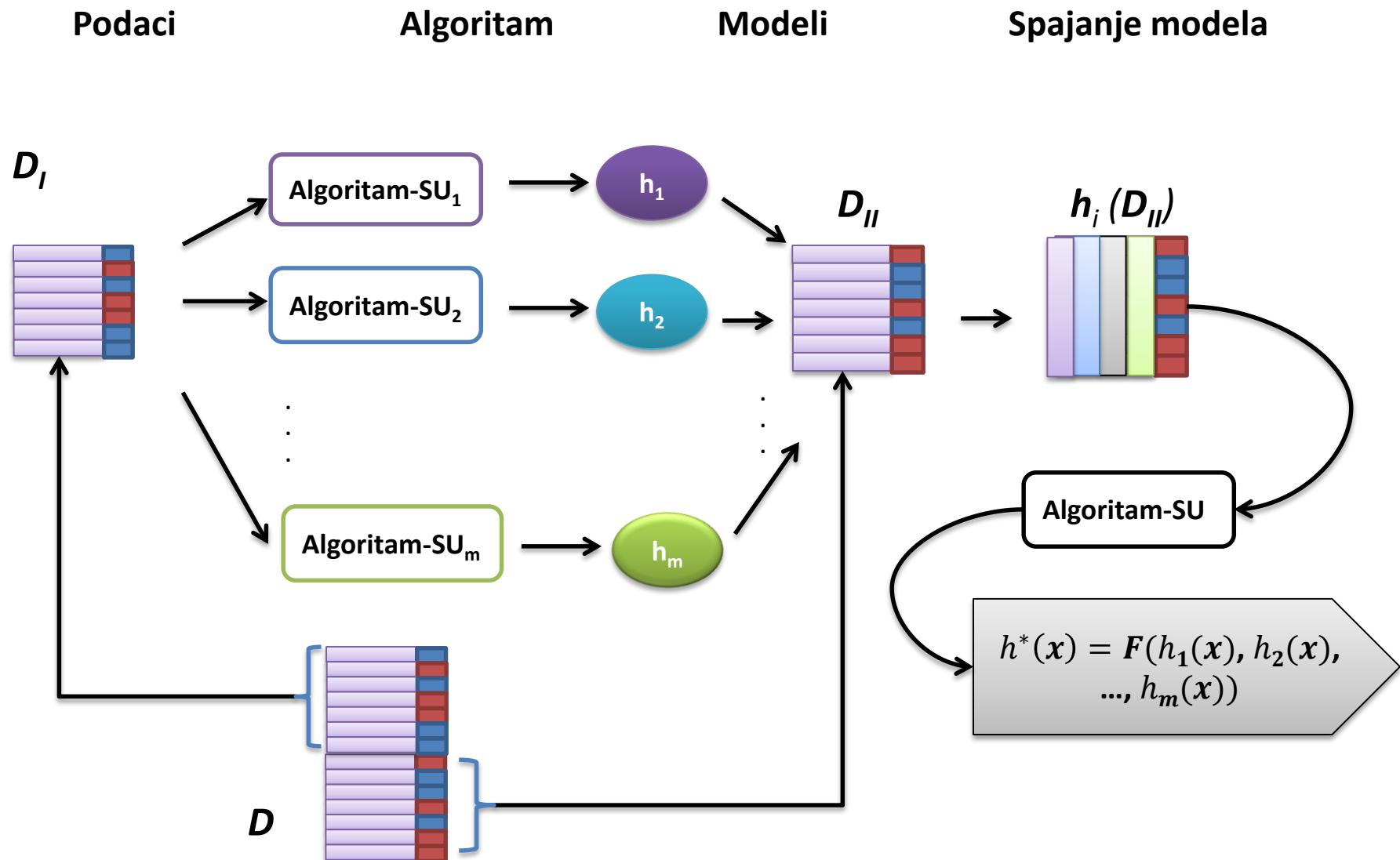
## Glasanje

- Svaki član ansambla daje glas za jednu klasu (za ECOC je malo komplikiranije)
- Predviđanje klase – ona koja ima najveći broj glasova

## Težinsko glasanje

- Težinska suma glasova članova ansambla
- Težine koje se daju članovima zavise o:
  - Pouzdanost koju pojedini klasifikator daje uz svoju predikciju (vjeroj. Pripadanja predviđenoj klasi)
  - O procjeni prosječne točnosti klasifikatora (npr. boosting)
- **Stacking**
  - Zašto ne učiti iz predviđanja članova ansambla ?

# Stacking - Stacked generalization



## Stacking; Stacked generalization (Wolpert -1992)

(? Stog modela; generalizacija preko stoga modela? )  
= Učenje meta-modela nad predikcijama baznih modela

Učenje se odvija u dva nivoa:

- 1 Razdvoji skup za učenje  $D$  na dva dijela  $D_1$  i  $D_{II}$  (slučajno stratificirano uzorkovanje)  
Na prvom dijelu  $T$ , se "uči" nekoliko baznih algoritama  $L_i$  – za koje je poželjno da stvaraju što različitije modele  $h_i$ ,
- 2 Nakon što su naučeni modeli baznih algoritama na  $D_1$ , ti se modeli iskoriste za predikcije na  $D_{II}$  => i stvara se novi skup primjera na bazi tih predikcija  $D'_{II}$
- 3 Novi algoritam uči kombinirati predikcije modela (**meta-model**) na  $D'_{II}$

Klasifikacija novog primjera

- 1 Bazni modeli prvo daju svoje predikcije
- 2 Meta-model koristi ove predikcije da bi napravio konačnu predikciju ansambla

## Zašto kombiniranje modela dobro funkcioniра (I)

### Statistički pogled

- Uz konačni skup primjera za učenje – mnoge hipoteze tipično funkciraju približno jednako dobro
- Podsjetnik : Klasifikator prema Optimalnom Bayesovom principu

$$c(x_i) = \arg \max_{c_j \in C} \sum_{h_k \in H} P[c_j | h_k] \cdot P[h_k | D]$$

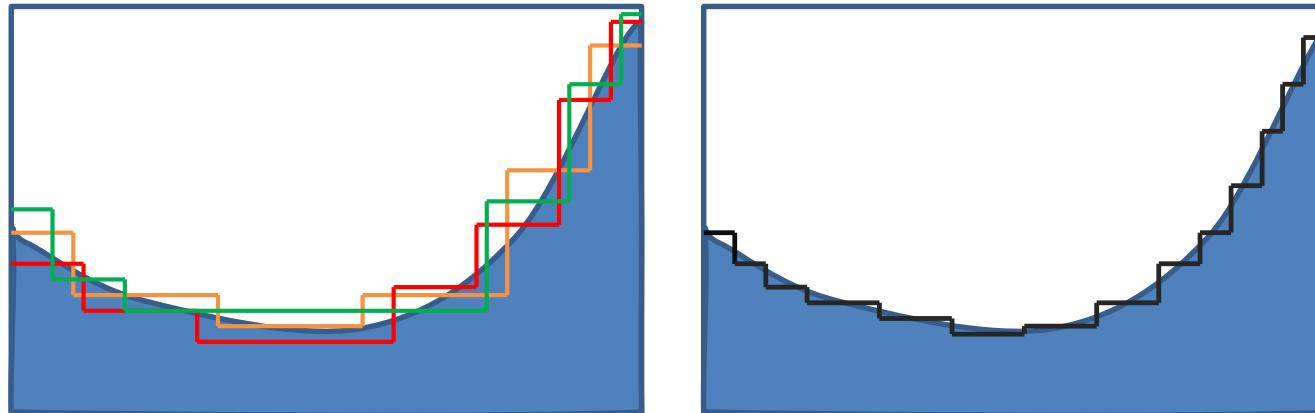
- Težinski usrednjeno glasanje svih hipoteza
- Težine – aposteriorne vjerojatnosti hipoteza
- Teorijski pokazano – najbolji mogući klasifikator!

Ansambli predstavljaju aproksimaciju Optimalnog Bayesovog klasifikatora !

# Zašto kombiniranje modela dobro funkcionira (II)

## Problem reprezentacije modela

- Optimalna funkcija cilja ne mora biti ni jedan individualni klasifikator – no može se bolje aproksimirati usrednjavanjem većeg broja individualnih modela
- Primjer – Stabla odlučivanja => slučajna šuma



# Zašto kombiniranje modela dobro funkcionira (III)

## Problem optimizacije

- Svi algoritmi pretražuju prostor hipoteza tražeći dovoljno dobru hipotezu
- Kako takvih može biti beskonačno mnogo – heuristika pretraživanja postaje ključna
- Algoritam pretraživanja može zapeti u lokalnom minimumu
- Jedna strategija za izbjegavanje lokalnih minimuma – ponavljanje pretraživanja uz randomizaciju (početne točke)
  - To vodi na => bagging !

# Ansambli: sažetak

- Metode bazirane na kombiniranju više modela u jednu predikciju
- Poboljšavaju točnost u odnosu na individualne modele, jer reduciraju ili varijancu ili bias (ili oboje !)
- Bagging – redukcija “varijance”; efikasna za nestabilne, kompleksnije modele/hipoteze
  - “paralelno” stvaranje modela
  - Osnova su: repetitivno (bootstrap) uzorkovanje i usrednjavanje predikcija (regresija), odnosno većinsko glasanje (klasifikacija)
- Boosting – redukcija pristranosti (bias-a), ali i povećanje margine
  - “sekvencijalno” stvaranje modela
  - fokus na teže dijelove/primjere; daje težinu pojedinim modelima prema njihovoj točnosti
  - osjetljivost na „outliere“

# Ansambli: sažetak

- S obzirom da zahtijevaju učenje većeg broja modela
  - vremenski su i memorijski zahtjevne metode
- Gotovo na svim realnim problemima, kod kojih je važna prediktivna točnost - najbolje rezultate postižu ansambli (Kaggle => XGBoost) !

## Literatura - Ansamblji

- The Elements of Statistical Learning  
Hastie, Tibshirani, Friedman (ch. 15)
- AI – Modern approach  
Russel & Norvig (ch 18.4)
- T. Dietterich: Ensemble Methods in Machine Learning  
Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1857 (2000), pp. 1-15
- Bagging (L. Breiman)  
Random forests: <http://stat-www.berkeley.edu/users/breiman/rf.html>  
Bolje: R -package (randomForest); PARF => IRB
- Boosting ([www.boosting.org](http://www.boosting.org))  
Y. Freund, Robert E. Schapire: Experiments with a new boosting algorithm.  
In: Thirteenth International Conference on Machine Learning, San Francisco,  
148-156, 1996