

1

Varijacijska formulacija eliptičkih rubnih zadaća

Rubni problemi za diferencijalne jednačbe eliptičkog tipa predstavljaju široku klasu matematičkih zadaća koje opisuju ravnotežna stanja različitih fizikalnih sustava. *Klasična rješenja* tih zadaća moraju zadovoljiti diferencijalnu jednačbu i rubni uvjet u svakoj točki domene i njezine granice te stoga koeficijenti diferencijalne jednačbe moraju biti neprekidne funkcije, odnosno neprekidno derivabilne ako se nalaze pod znakom derivacije. S fizikalnog (nematematičkog) stajališta prirodno je zahtijevati da koeficijenti diferencijalne jednačbe, čak i kad se nalaze pod znakom deriviranja, nisu neprekidne funkcije, odnosno da imaju *skokove*. Time dolazimo do potrebe da se pojam rješenja rubne zadaće generalizira kako bi se mogao primijeniti i na zadaće s diskontinuiranim koeficijentima.

Postoji više načina da se generalizira pojam rješenja rubne zadaće. Dva su osnovna, zamjena diferencijalne jednačbe *integralnom jednačbom* te uvođenje *varijacijske jednačbe*. Integralna formulacija rubne zadaće je na određen način prirodnija od varijacijske jer u izvodu diferencijalne jednačbe iz fizikalnog zakona najčešće polazimo od integralne jednačbe koja formulira određen zakon sačuvanja te koristimo princip lokalizacije. Integralna jednačba ima stoga strogo fizikalno značenje, a zahtjevi glatkoće koeficijenata potrebni su da bi se mogla izvršiti *lokalizacija* koja vodi do diferencijalne jednačbe (vidi npr. [?]). Integralna formulacija stoga predstavlja prirodan način generalizacije rubne zadaće, ali s teorijskog stajališta nije jako korisna pa se ne koristi za matematičku analizu rubnih zadaća. S druge strane, integralna formulacija je osnova klase numeričkih metoda koje se nazivaju *metodama konačnih volumena* i koje pored metoda konačnih elemenata predstavljaju najrašireniji način numeričkog rješavanja rubnih zadaća.

Formulacija rubne zadaće u obliku varijacijske jednačbe ima dosta zajedničkih točaka s integralnom formulacijom i puno je pogodnija za teorijsku analizu rubnih zadaća. Pomoću varijacijske jednačbe formulira se tzv. *slabo rješenje* rubne zadaće koje postoji uz puno slabije uvjete na koeficijente diferencijalne

jednadžbe od onih nužnih za egzistenciju klasičnog rješenja. K tome, egzistenciju slabog rješenja je lakše dokazati te je svako slabo rješenje ujedno i klasično ako ima dovoljnu glatkoću. Varijacijska se formulacija koristi kao polazna točka za klasu numeričkih postupaka koje nazivamo *metoda konačnih elemenata*. Stoga ćemo u ovom poglavlju pokazati kako se postavlja varijacijska formulacija eliptičke rubne zadaće i kako se na toj osnovi formulira numerička metoda. U dodatku ćemo dati rezultate iz funkcionalne analize koji omogućuju dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti slabog rješenja linearne eliptičke zadaće.

1.1 Uvodni primjer

Razmotrit ćemo sljedeću Dirichletovu rubnu zadaću:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{u } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren i povezan skup, a $\partial\Omega$ njegova granica. Klasično rješenje zadaće (1.1) je funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ koja diferencijalnu jednadžbu¹ (1.1)₁ zadovoljava u svakoj točki domene Ω i poništava se u svakoj točki granice $\partial\Omega$. Da bi takvo rješenje postojalo evidentno desna strana f mora biti neprekidna funkcija.

Metoda konačnih elemenata se temelji na varijacijskoj formulaciji rubne zadaće, koja se u slučaju zadaće (1.1) dobiva množenjem jednadžbe (1.1)₁ s test funkcijom $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$ i integracijom po Ω :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u)v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} fv \, d\mathbf{x}.$$

Parcijalnom integracijom u integralu na lijevoj strani dobivamo

$$-\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n})v \, d\sigma + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} fv \, d\mathbf{x},$$

gdje je \mathbf{n} jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$. Budući da se test funkcija v poništava na rubu domene Ω , integral po $\partial\Omega$ propada i dobivamo

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} fv \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega). \quad (1.2)$$

To je varijacijska formulacija rubne zadaće (1.1). Uočimo da se u njoj ne pojavljuju druge derivacije nepoznate funkcije $u(\mathbf{x})$ te da ju može zadovoljavati funkcija iz

¹Za definiciju funkcijskih prostora vidi Poglavlje ???. Prostor $C_0(\Omega)$ čine funkcije iz $C(\overline{\Omega})$ koje se poništavaju na rubu.

prostora $C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$. Na toj činjenici se bazira generalizacija pojma rješenja diferencijalne zadaće. Pri tome, da bismo imali korektnu generalizaciju, treba pokazati da je svako rješenje zadaće (1.2), koje je dva puta neprekidno derivabilno, ujedno i rješenje zadaće (1.1). Pretpostavimo stoga da imamo funkciju $u(\mathbf{x})$ koja zadovoljava (1.2) i koja pripada prostoru $C^2(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$. Parcijalnom integracijom u (1.2), prebacujući derivacije na funkciju u , dobivamo,

$$-\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n})v \, d\sigma = \int_{\Omega} (\Delta u - u + f)v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega).$$

Kako je lijeva strana jednaka nuli izlazi

$$\int_{\Omega} (\Delta u - u + f)v \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega).$$

Sada trebamo iskoristiti osnovnu lemu varijacijskog računa:

Propozicija 1.1 Neka je $g \in C(\Omega)$ funkcija koja zadovoljava

$$\int_{\Omega} gv \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tada je $g(\mathbf{x}) = 0$ za svako $\mathbf{x} \in \Omega$.

[Napomena o dokazu i općenitijem rezultatu ...]

Primjenjujući Propoziciju 1.1 na $g = \Delta u - u + f$ dobivamo da je diferencijalna jednadžba (1.1)₁ zadovoljena u svakoj točki domene Ω . Kako je rubni uvjet zadovoljen već pretpostavkom da je $u \in C_0(\Omega)$ možemo zaključiti da je funkcija u klasično rješenje zadaće (1.1).

Time smo posve opravdali *varijacijsku jednadžbu* (1.2) kao generalizaciju zadaće (1.1). Pogledajmo sada strukturu jednadžbe (1.2). Prvo uvedimo oznaku $V = C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$ i uočimo da je V linearan prostor uz algebarske uobičajene operacije nad funkcijama. Nadalje, definirajmo preslikavanja

$$a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad F: V \rightarrow \mathbb{R},$$

formulama

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, d\mathbf{x}, \quad F(v) = \int_{\Omega} fv \, d\mathbf{x}. \quad (1.3)$$

Zadaću (1.2) možemo sada apstraktno zapisati u obliku: Treba naći $u \in V$ koje zadovoljava

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = F(v). \quad (1.4)$$

Iz formule (1.3) lako se uočava da je F linearan funkcional, a da je $a(\cdot, \cdot)$ *bilinearan*, tj. linearan u svakoj varijabli zasebno (vidi Definiciju 1.4). Sada možemo iskoristiti vrlo općenit egzistencijalni rezultat iz funkcionalne analize koji nam daje uvjete uz koje zadaća (1.4) ima jedinstveno rješenje:

Teorem 1.1 (Lax-Milgramova lema) Neka je V Hilbertov prostor s normom $\|\cdot\|$ i $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ neka je bilinearna forma sa sljedećim svojstvima:

$\exists M > 0$ takvo da je $\forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$ (ograničenost);

$\exists \alpha > 0$ takvo da je $\forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2$ (koercitivnost).

Tada za svaki linearan i neprekidan funkcional $F \in V'$ zadaća

$$\begin{cases} \text{Naći } u \in V \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle \end{cases} \quad (1.5)$$

ima jedinstveno rješenje $u \in V$ i vrijedi

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}.$$

Dakle da bismo primijenili Lax-Milgramovu lemu trebamo pokazati da je odabrani prostor V Hilbertov, da su bilinearna forma i linearan funkcional ograničeni te uvjet koercitivnosti bilinearne forme. Uvjet koercitivnosti je pri tome najvažniji i usko je vezan uz izbor prostora V .

Budući da je bilinearna forma dana u integralnom obliku nije moguće postići njenu koercitivnost ako za prostor V uzmemo prostor neprekidno derivabilnih funkcija. Da bismo se u to uvjerali, uzmimo $V = C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$, što je prirodan odabir prostora u našem slučaju. Norma, u kojoj je taj prostor funkcija potpun dana je formulom

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} = \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^d \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|.$$

Uvjet koercitivnosti sada glasi: postoji konstanta $\alpha > 0$ takva da je

$$\forall v \in C_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) d\mathbf{x} \geq \alpha \|v\|_{C^1(\bar{\Omega})}^2 \quad (1.6)$$

Uvjet (1.6) nije moguće zadovoljiti, što se može vidjeti tako da se konstruira kontraprimjer u jednoj prostornoj dimenziji. Razlog se nalazi u tome što na lijevoj strani imamo integralni izraz, dok je na desnoj strani max-norma. Naprosto moramo oslabiti normu prostora $C^1(\bar{\Omega})$ da bismo zadovoljili uvjet koercitivnosti, a to onda znači i proširiti prostor u kome tražimo rješenje, jer on mora biti potpun. [Uputa na zadatak -> uvodno poglavlje.]

Izlaz je u tome da prijedemo na itegralne norme. Najjednostavnije bi bilo u prostor $C_0^1(\bar{\Omega})$ uvesti novu normu:

$$\|v\| = \left(\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^2 dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Time je evidentno uvjet koercitivnosti sada zadovoljen, ali smo izgubili potpunost prostora: prostor $C_0^1(\Omega)$ nije potpun u novoj normi. Taj se problem rješava prijelazom na širi prostor koji je *upotpunjenje* prostora $C_0^1(\Omega)$ u normi (1.7) i koji se označava $H_0^1(\Omega)$. To je jedan iz klase prostora Soboljeva.

Uzimajući za prostor $V = H_0^1(\Omega)$ lako se pokazuje da su svi uvjeti Lax-Milgramove leme zadovoljeni i stoga poopćena zadaća

$$\begin{cases} \text{Naći } u \in H_0^1(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.8)$$

ima jedinstveno rješenje. Time smo došli do generalizacije pojma rješenja zadaće (1.1) u kojoj se ne pojavljuju druge derivacije rješenja, a niti prve derivacije ne moraju nužno biti neprekidne. Egzistenciju i jedinstvenost osigurava jednostavan rezultat funkcionalne analize, a jedini nezgodan dio ovog pristupa je u tome što rješenje tražimo u prostoru definiranom na vrlo apstraktan način – kao upotpunjenje prostora $C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$. Detaljnija prezentacija prostora $H_0^1(\Omega)$ i drugih prostora Soboljeva dana je u Dodatku ??, dok osnovne definicije i rezultate iznosimo u sljedećoj sekciji.

U našem je primjeru bilinearna forma simetrična (Definicija 1.7), pa je prema Lemi 1.5 varijacijska jednadžba (1.2) Eulerova jednadžba za funkcional energije

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x},$$

i slabo rješenje zadaće (1.1) predstavlja minimum funkcionala energije na prostoru $H_0^1(\Omega)$. Ta se činjenica može iskoristiti za konstrukciju numeričkog algoritma.

Varijacijska jednadžba (1.5) predstavlja temelj za sustavnu konstrukciju numeričkih postupaka za aproksimaciju rubnih zadaća. Dovoljno je zamijeniti beskonačnodimenzionalan prostor V s nekim njegovim konačnodimenzionalnim potprostorom $V_h \subset V$. Time dobivamo konačnodimenzionalnu varijacijsku zadaću:

$$\begin{cases} \text{Naći } u_h \in V_h \\ \forall v \in V_h, \quad a(u_h, v) = \langle F, v \rangle \end{cases} \quad (1.9)$$

Ako imamo niz prostora $V_h \subset V$ koji sve bolje aproksimiraju prostor V , kada parametar $h \rightarrow 0$, onda očekujemo da će $u_h \rightarrow u$ kada $h \rightarrow 0$. Mi ćemo dokazati i više od toga odnosno, odredit ćemo red konvergencije postupka u ovisnosti o načinu konstrukcije prostora V_h . Pokažimo sada da je konačnodimenzionalni problem (1.9) dobro postavljen.

Lema 1.1 Uz pretpostavke Lax-Milgramove leme problem (1.9) ima jedinstveno rješenje.

Dokaz. Neka je $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ baza u V_h ($n = \dim(V_h)$). Tada je

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n U_j \phi_j(\mathbf{x}).$$

Uzimajući za test funkciju $v = \phi_i$ u (1.9), dobivamo sustav

$$\sum_{j=1}^n U_j a(\phi_j, \phi_i) = \langle F, \phi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

U oznakama

$$\mathbf{U} = (U_j) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{F} = (F_j) \in \mathbb{R}^n, \quad F_j = \langle F, \phi_j \rangle, \quad \mathbf{K} = (K_{i,j}), \quad K_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i),$$

imamo sustav linearnih algebarskih jednadžbi $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$. Matrica \mathbf{K} je pozitivno definitna. Zaista, za $\boldsymbol{\xi} = (\xi_j) \in \mathbb{R}^n$, zbog koercitivnosti, imamo

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum_{i,j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) \xi_i \xi_j = a\left(\sum_{j=1}^n \xi_j \phi_j, \sum_{i=1}^n \xi_i \phi_i\right) \geq \alpha \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \phi_i \right\|^2 \geq 0.$$

Ako je $\mathbf{K}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$, onda zbog linearne nezavisnosti baznih funkcija slijedi $\boldsymbol{\xi} = 0$ i pozitivna definitnost je dokazana. Iz pozitivne definitnosti slijedi regularnost matrice \mathbf{K} , pa problem (1.9) ima jedinstveno rješenje. \square

Matricu \mathbf{K} tradicionalno nazivamo **matrica krutosti** i vidimo da koercitivnost bilinearne forme implicira njenu pozitivnu definitnost. K tome, ako je bilinearna forma simetrična, onda je i matrica krutosti simetrična.

Opisanu shemu definicije slabog rješenja rubne zadaće primijenit ćemo sada na općenitije eliptičke jednadžbe drugog reda no prije toga ćemo s više detalja opisati prostore Soboljeva.

1.2 Prostori $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ i $H_0^1(\Omega)$

U prošoj smo sekciji uveli prostor $H_0^1(\Omega)$ kao upotpunjenje prostora $C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$ u odgovarajućoj normi. U ovoj sekciji dajemo konkretniji opis tog prostora.

Kao i do sada neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren i ograničen skup. Funkcija $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je apsolutno integrabilna ako je

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < +\infty,$$

gdje je integral uzet u odnosu na Lebesgueovu mjeru na \mathbb{R}^d . Skup svih apsolutno integrabilnih funkcija ima strukturu vektorskog prostora i označava se s $L^1(\Omega)$. Štoviše, on postaje potpun normiran prostor kada u njega uvedemo normu

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

S $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ označavamo linearan prostor svih realnih funkcija na Ω koje su apsolutno integrabilne na svakom kompaktnom skupu $K \subset \Omega$. Takve funkcije ne moraju nužno biti apsolutno integrabilne na cijelom skupu Ω , pa imamo strogu inkluziju $L^1(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

Slično se definira $L^2(\Omega)$, kao linearan prostor svih funkcija $u(\mathbf{x})$ na Ω sa svojom svojstvom da je $u^2 \in L^1(\Omega)$, odnosno

$$L^2(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty\}.$$

Norma u $L^2(\Omega)$ je dana formulom

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right]^{1/2}.$$

Uvest ćemo još oznaku $L^\infty(\Omega)$ za prostor svih ograničenih (izmjerivih) funkcija. Norma u tom prostoru definira se formulom

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C: |u(\mathbf{x})| \leq C \text{ s.s.}\}.$$

(s.s. znači skoro svuda u odnosu na Lebesgueovu mjeru, tj. svugdje osim eventualno na skupu mjere nula.) Uvijek imamo

$$|u(\mathbf{x})| \leq \|u\|_{L^\infty} \text{ s.s.}$$

Ako je f neprekidna funkcija, onda je

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})|.$$

Istaknimo sljedeću činjenicu: Prostori $L^1(\Omega)$ i $L^\infty(\Omega)$ su Banchovi uz uvedene norme, a prostor $L^2(\Omega)$ je Hilbertov u skalarnom produktu

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Često ćemo koristiti sljedeći rezultat:

Lema 1.2 Hölderova nejednakost. Neka su $u, v \in L^2(\Omega)$. Tada je $uv \in L^1(\Omega)$ i vrijedi

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Prostore Soboljeva definiramo generalizacijom pojma parcijalne derivacije.

Definicija 1.1 Za funkciju $u \in L^2(\Omega)$ kažemo da ima slabu parcijalnu derivaciju po varijabli x_i , ako postoji funkcija $g \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, takva da za svako $\phi \in C_c^1(\Omega)$ vrijedi²

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Funkcija g je tada slaba parcijalna derivacija funkcije u po x_i pa koristimo standardnu oznaku

$$g = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Iz ove definicije je jasno da je klasična parcijalna derivacija, ako postoji, ujedno i slaba derivacija. Nadalje, lako se pokazuje da je slaba derivacija jedinstvena (vidi Poglavlje ??). Stoga je ovaj pojam dobro proširenje klasičnog pojma derivacije. U tekstu koji slijedi sve parcijalne derivacije se uzimaju u slabom smislu.

Sada možemo definirati

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d\}.$$

Prostor $H^1(\Omega)$ je očito linearan i normu u njemu definiramo formulom

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Ta je norma evidentno generirana skalarnim produktom

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Prostor $H^1(\Omega)$ se naziva prostor Soboljeva i može se dokazati:

Teorem 1.2 Prostor $H^1(\Omega)$ je Hilbertov.

Konačno, uvedimo potprostor $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ kao zatvarač (upotpunjenje) prostora $C_0^1(\Omega)$ u normi prostora $H^1(\Omega)$. To je dakle skup svih funkcija iz $H^1(\Omega)$ koje se mogu dobiti kao limes funkcija iz $C_0^1(\Omega)$. To je evidentno linearan prostor i kao zatvoren potprostor potpunog prostora i sam je potpun. Iz konstrukcije je jasno da se $H_0^1(\Omega)$ sastoji od onih funkcija iz $H^1(\Omega)$ koje se poništavaju na rubu domene $\partial\Omega$ ([link na teorem o tragu](#)).

Definicija poopćenih prvih parcijalnih derivacija lako se generalizira na derivacije proizvoljnog reda. Tako na primjer, kažemo da funkcija $u \in L^2(\Omega)$ ima slabu parcijalnu derivaciju

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

²Funkcije iz $C_c^1(\Omega)$ imaju kompaktan nosač, pa je stoga integral na desnoj strani dobro definiran već za lokalno integrabilnu funkciju (vidi Poglavlje ??).

ako postoji funkcija $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, takva da za svako $\phi \in C^2_c(\Omega)$ vrijedi

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Negativan predznak je nestao zbog “dvostruke primjene formule parcijalne integracije”. Prostor Soboljevleva drugog reda definiramo kao

$$H^2(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq d\}.$$

To je ponovo Hilbertov prostor u skalarnom produktu

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \, d\mathbf{x}.$$

Za definiciju prostora $H^k(\Omega)$ vidi Dodatak.

1.3 Homogena Dirichletova zadaća

Neka je L eliptički diferencijalni operator drugog reda u divergentnom obliku:

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u, \quad (1.10)$$

pri čemu je matrica koeficijenata $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^d$ simetrična i pozitivno definitna u svakoj točki $\mathbf{x} \in \Omega$, te vrijedi

$$a_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Promatramo homogenu Dirichletovu rubnu zadaću

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{u } \Omega \\ u &= 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Za klasično rješenje u i test funkciju $v \in H^1_0(\Omega)$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \left[- \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u \right] v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$- \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} v) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 u v \right] \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Zbog toga što se test funkcije v poništava na rubu domene ($\mathbf{n} = (n_i)$ je vanjska normala na $\partial\Omega$) imamo

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} v) d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\partial\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i v d\sigma = 0.$$

Stoga je klasično rješenje u istovremeno i rješenje varijacijske zadaće

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

gdje je

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right] d\mathbf{x} \quad (1.11)$$

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}. \quad (1.12)$$

Definicija 1.2 Neka je L diferencijalni operator definiran u (1.10). Funkcija $u \in H_0^1(\Omega)$ je slabo rješenje homogene Dirichletove zadaće

$$Lu = f \quad \text{u } \Omega \quad (1.13)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (1.14)$$

ako vrijedi

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle,$$

gdje je $a(\cdot, \cdot)$ pridružena bilinearna forma definirana s (1.11), a desna strana je dana s (1.12).

Kao i u uvodnom primjeru pokazuje se da je svako slabo rješenje koje leži u prostoru $C^2(\bar{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$ ujedno i klasično rješenje.

Precizirajmo sada pretpostavke o operatoru L koje omogućavaju Lax-Milgramove leme:

$$\forall i, j, \quad a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad a_0 \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \quad (1.15)$$

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^d \xi_i^2. \quad (1.16)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \text{matrica } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x})) \text{ je simetrična,} \quad (1.17)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad a_0(\mathbf{x}) \geq \alpha_1 > 0. \quad (1.18)$$

Prije iskaza teorema uvedimo u $H^1(\Omega)$ sljedeću *polunormu*

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \quad (1.19)$$

Funkcija $|\cdot|$ je polunorma na nekom vektorskom prostoru ako ima sva svojstva norme osim svojstva da $|u| = 0$ implicira $u = 0$; iz $|u|_{H^1(\Omega)} = 0$ slijedi da je u konstantna funkcija na Ω .

Teorem 1.3 Neka su zadovoljene pretpostavke (1.15)–(1.18). Tada Dirichletova zadaća (1.13)–(1.14) ima jedinstveno slabo rješenje. Ono minimizira funkcional

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle$$

na prostoru $H_0^1(\Omega)$.

Dokaz. Potrebno je provjeriti uvjete Lax-Milgramove leme. Iz simetrije matrice koeficijenata lako slijedi simetrija bilinearne forme. Da bismo provjerili ograničenost uvedimo konstantu $M = \max\{\|a_{ij}\|_{L^\infty}, \|a_0\|_{L^\infty}\}$. Imamo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\mathbf{x} \right| &\leq M \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| d\mathbf{x} \\ &\leq M \sum_{i,j=1}^d \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &\leq Md |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili nejednakost (1.108) (vidi zadatke). Nadalje,

$$\left| \int_{\Omega} a_0 uv d\mathbf{x} \right| \leq M \int_{\Omega} |uv| d\mathbf{x} \leq M \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Kombinirajući ove dvije ocjene, dobivamo

$$a(u, v) \leq Md |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)} + M \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

gdje je konstanta C jednaka Md . Iz pozitivne definitnosti matrice koeficijenata slijedi

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \geq \alpha \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2. \quad (1.20)$$

Integriranjem dobivamo

$$a(v, v) \geq \min(\alpha, \alpha_1) \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 + v^2 \right) d\mathbf{x} = \min(\alpha, \alpha_1) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (1.21)$$

Linearan funkcional F je neprekidan budući da vrijedi

$$\left| \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Tvrđnja teorema sada slijedi primjenom Lax-Milgramove leme i leme o karakterizaciji varijacijske zadaće (Lema 1.5). \square

Pretpostavka (1.18) može se zamijeniti slabijom pretpostavkom

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad a_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad (1.22)$$

a da Teorem 1.3 ostane vrijediti.

Teorem 1.4 (Poincaréova nejednakost) Ako je domena $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ograničena barem u jednom smjeru, onda postoji konstanta $c = c(\Omega)$ takva da za svako $u \in H_0^1(\Omega)$ vrijedi

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c|u|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.23)$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da se domena nalazi unutar pruge $a < x_d < b$. Uzmimo proizvoljnu funkciju $v \in H_0^1(\Omega)$ i proširimo ju nulom izvan skupa Ω . Imamo

$$v(\mathbf{x}', x_d) = \int_a^{x_d} \frac{\partial v}{\partial x_d}(\mathbf{x}', t) dt.$$

Cauchyjeva nejednakost daje

$$|v(\mathbf{x}', x_d)|^2 \leq (x_d - a) \int_a^b \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(\mathbf{x}', t) \right|^2 dt,$$

pa integriranjem po prvih $d - 1$ varijabli slijedi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(\mathbf{x}', x_d)|^2 d\mathbf{x}' &\leq (x_d - a) \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(\mathbf{x}', t) \right|^2 d\mathbf{x}' dt. \\ \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(\mathbf{x}', x_d)|^2 d\mathbf{x}' dx_d &\leq \frac{1}{2}(b - a)^2 \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(\mathbf{x}', t) \right|^2 d\mathbf{x}' dt. \end{aligned}$$

Budući da je funkcija jednaka nuli izvan Ω slijedi

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2}(b - a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x}. \quad \square$$

Promjenom Poincaréove nejednakosti dobivamo sljedeću ekvivalenciju normi na $H_0^1(\Omega)$:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq |u|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Sada lako vidimo da (1.21) možemo uz pretpostavku (1.39) izvesti na ovaj način:

$$a(v, v) \geq \alpha \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right) d\mathbf{x} = \alpha |v|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \frac{\alpha}{1 + c^2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Time je koercitivnost bilinearne forme dokazana i Lax-Milgramova lema se može ponovo primijeniti.

1.4 Nehomogena Dirichletova zadaća

Promatramo nehomogenu Dirichletovu rubnu zadaću

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{u } \Omega \\ u &= g & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Da bi postojalo klasično rješenje te zadaće funkcija g , koja je zadana samo na rubu $\partial\Omega$, mora imati barem jedno proširenje u_0 na $\bar{\Omega}$ koje je klase C^2 . U tom se slučaju zadaća može svesti na zadaću s homogenim rubnim uvjetom postupkom koji zovemo *homogenizacija rubnog uvjeta*, a sastoji se u tome da se prijeđe na ekvivalentnu zadaću za funkciju $w = u - u_0$:

$$\begin{aligned} Lw &= f_1 & \text{u } \Omega \\ w &= 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

gdje je $f_1 = f - Lu_0$; traženo rješenje je $u = w + u_0$. Prema tome, barem teorijski, uvijek možemo homogenizirati rubni uvjet te je stoga dovoljno promatrati samo homogenu rubnu zadaću.

Postupak homogenizacije rubnog uvjeta možemo provesti i na slabom rješenju zadaće. Prvo uočimo da postupak izvoda slabe formulacije ne ovisi o homogenosti ili nehomogenosti Dirichletovog rubnog uvjeta jer test funkciju uzimamo jednaku nuli na rubu u oba slučaja. Varijacijska formulacija stoga prima sljedeći oblik:

$$\begin{cases} \text{Naći } u \in H^1(\Omega), & u = g \text{ na } \partial\Omega \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), & a(u, v) = \langle F, v \rangle. \end{cases} \quad (1.24)$$

Jedina je razlika u tome što rješenje više ne tražimo u prostoru test funkcija, $H_0^1(\Omega)$, već u *linearnoj mnogostrukosti*

$$g + H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = g \text{ na } \partial\Omega\}.$$

To ima za posljedicu da ne možemo neposredno primijeniti Lax-Milgramovu lemu već se prvo mora homogenizirati rubni uvjet.

Da bi varijacijska zadaća (1.24) imala rješenje nužno moramo pretpostaviti da postoji barem jedna funkcija $u_g \in H^1(\Omega)$ takva da je $u_g = g$ na $\partial\Omega$. Funkcija $w = u - u_g \in H_0^1(\Omega)$ tada zadovoljava

$$\begin{cases} \text{Naći } w \in H_0^1(\Omega), \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), & a(w, v) = \langle F, v \rangle - a(u_g, v), \end{cases} \quad (1.25)$$

To je ponovo varijacijska zadaća na koju možemo primijeniti Lax-Milgramovu lemu. Jedinu novu stvar je provjeriti da je desna strana linearan i neprekidan funkcional na $H_0^1(\Omega)$, što slijedi iz ocjene:

$$\begin{aligned} |\langle F, v \rangle - a(u_g, v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + M \|u_g\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + M \|u_g\|_{H^1(\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Napomena 1.1 Uočimo da konstanta $K = (\|f\|_{L^2} + M\|u_g\|_{H^1(\Omega)})$, koja se javlja u ovoj ocjeni, ne ovisi o načinu proširenja funkcije g u unutrašnjost domene stoga što u desnoj strani ocjene možemo uzeti infimum po svim takvim proširenjima.

Kako zadaća (1.25) ima jedinstveno rješenje $w \in H_0^1(\Omega)$ zaključujemo da i polazna nehomogena zadaća (1.24) ima rješenje $u = u_g + w \in H^1(\Omega)$. Jedinstvnost rješenja nehomogene zadaće slijedi iz toga što se razlika bilo koja dva rješenja $w = u_1 - u_2$ zadaće (1.24) nalazi u $H_0^1(\Omega)$ i zadovoljava homogenu varijacijsku jednadžbu

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(w, v) = 0.$$

Time smo dokazali

Teorem 1.5 Neka su ispunjeni uvjeti Teorema 1.3 i neka je Ω Lipschitzova domena. Tada za svaku funkciju $g \in L^2(\partial\Omega)$ koja ima barem jedno proširenje $G \in H^1(\Omega)$, $G|_{\partial\Omega} = g$, varijacijska zadaća (1.24) ima jedinstveno rješenje u $H^1(\Omega)$.

Nehomogena Dirichletova zadaća nas vodi do prostora funkcija definiranih na $\partial\Omega$ koji definiramo na ovaj način:

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{\phi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}, \exists \Phi \in H^1(\Omega), \Phi|_{\partial\Omega} = \phi\}.$$

Linearnost ovakvog skupa funkcija lako se provjerava. S druge strane, restrikcija funkcije iz $H^1(\Omega)$ na rub domene $\partial\Omega$ ne može se neposredno definirati budući da su u $H^1(\Omega)$ funkcije koje su definirane samo na Ω i tamo su kvadratno integrabilne, zajedno sa svojim prvim slabim derivacijama. Ipak se može pokazati da se vrijednost funkcije na rubu može jednoznačno definirati za svaku funkciju iz $H^1(\Omega)$ ukoliko domena ima određenu *glatkoću*, na primjer ako je Lipschitzova (o tome više u Dodatku ??), pa je stoga to uvjet Teorema 1.5. Restrikcija funkcije iz prostora Soboljeva na rub domene dobila je naziv *trag funkcije*, a operator $\gamma = \gamma_{\partial\Omega}$ koji pridružuje funkciji njen trag naziva se *operator traga*. Prostor $H^{1/2}(\partial\Omega)$ je u toj terminologiji prostor tragova funkcija iz $H^1(\Omega)$ i u njega se uvodi norma

$$\|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\gamma\Phi = \phi} \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ovdje se infimum uzima po svim funkcijama $\Phi \in H^1(\Omega)$ čiji trag na $\partial\Omega$ jednak ϕ . Operator traga

$$\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$$

je evidentno linearna surjekcija i očito je neprekidan u ovoj normi.

Nadalje, u teoriji prostora Soboljeva se pokazuje da je $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ i da je to pravi podskup. Kanonsko ulaganje je pri tome neprekidno, što znači da postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$\forall v \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Drugim riječima Teorem 1.5 govori da je nehomogena Dirichletova zadaća rješiva za svaki rubni uvjet $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, ali ne i za svako $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Sumirajmo do sada rečeno.

Teorem 1.6 (Teorem o tragu) Neka je Ω Lipschitzova domena. Tada preslikavanje $\gamma_{\partial\Omega}$ koje svakoj funkciji $u \in C^1(\overline{\Omega})$ pridružuje njenu restrikciju na $\partial\Omega$ ima jedinstveno proširenje do linearnog i neprekidnog operatora

$$\gamma_{\partial\Omega}: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega).$$

Operator $\gamma_{\partial\Omega}$ se naziva operator traga i vrijedi $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_{\partial\Omega}v = 0\}$. Slika operatora traga je prostor $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Uočimo da neprekidnost operatora traga znači da postoji konstanta $C > 0$ takva da za svako $v \in H^1(\Omega)$ vrijedi

$$\|\gamma_{\partial\Omega}v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Nadalje, kako je operator traga tek generalizacija operatora restrikcije, nećemo ga eksplicitno pisati već ćemo ga *podrazumijevati*. Tako ćemo, na primjer, gornju nejednakost jednostavno pisati

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Napomena 1.2 *Homogenizacija rubnog uvjeta je nužna da bi se pokazalo da nehomogena zadaća ima rješenje. S druge strane, u numeričkom rješavanju homogenizacija rubnog uvjeta najčešće nije izvediva u varijacijskoj formulaciji već se sličan postupak radi na razini diskretne zadaće. [Vidi prvo poglavlje ...]*

1.5 Neumannova i mješovita zadaća

U ovoj sekciji formiramo slabo rješenje zadaće

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u = f & \text{u } \Omega \\ \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = g & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.26)$$

u kojoj smo postavili *Neumannov* odnosno *prirodni* rubni uvjet. Pretpostavljat ćemo da koeficijenti diferencijalne jednadžbe zadovoljavaju uvjete (1.15)–(1.18).

Postupak izvođenja varijacijske jednadžbe je isti kao i za Dirichletovu zadaću, s tom razlikom da se test funkcija ne mora poništavati na granici domene. Stoga množimo jednadžbu (1.26)₁ s test funkcijom $v \in H^1(\Omega)$ i integriramo po domeni:

$$\int_{\Omega} \left[-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u \right] v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Parcijalnom integracijom u prvom članu dobivamo kao i ranije

$$-\sum_{i,j=1}^d \int_{\partial\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i v \, d\sigma + \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right] d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Funkcija koja se pojavljuje u integralu po rubu domene upravo nam je zadana pa iz toga proizlazi naziv *prirodan rubni uvjet*.

Definicija 1.3 Funkcija $u \in H^1(\Omega)$ je slabo rješenje zadaće (1.26) ako zadovoljava

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right] d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma. \quad (1.27)$$

Uočimo da Neumannov rubni uvjet nije *ugrađen u prostor*, već je implicitno zadovoljen varijacijskom jednadžbom. U to ćemo se uvjeriti tako da pretpostavimo da je domena Ω dovoljno glatka, da su svi koeficijenti jednadžbe najmanje neprekidni na $\bar{\Omega}$, te da varijacijska jednadžba ima rješenje $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Tada u jednadžbi (1.27) možemo izvršiti parcijalnu integraciju u prvom članu (ponavljajući već izvršeni račun u suprotnom smjeru),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right] d\mathbf{x} &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\partial\Omega} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i) v \, d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega} \left[- \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u \right] v \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

iz (1.27) dobivamo

$$\int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i - g \right) v \, d\sigma + \int_{\Omega} \left[- \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u - f \right] v \, d\mathbf{x} = 0,$$

gdje je $\mathbf{n} = (n_i)$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$. Uzimajući test funkcije koje se poništavaju na $\partial\Omega$ dobivamo da za svaku takvu vrijedi

$$\int_{\Omega} \left[- \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u - f \right] v \, d\mathbf{x} = 0.$$

Odavde se lako pokazuje, po osnovnoj lemi varijacijskog računa (Propozicija 1.1), da je diferencijalna jednadžba zadovoljena u svakoj točki domene Ω , pa onda integral propada za svaki izbor test funkcije (a ne samo one koja se poništava na rubu). Iz prethodne jednakosti stoga dobivamo

$$\int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i - g \right) v \, d\sigma = 0.$$

Oдавде slijedi, ponovo prema verziji osnovne leme varijacijskog računa za plošni integral,

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = g \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Time smo pokazali da je Neumannov rubni uvjet implicitno sadržan u varijacijskoj jednadžbi i ona stoga predstavlja dobru generalizaciju diferencijalne rubne zadaće.

Preostaje nam pokazati da na zadaću (1.27) možemo primijeniti Lax-Milgramovu lemu. Budući da je bilinearna forma ista kao u slučaju Dirichletove zadaće prethodni računi pokazuju ograničenost i koercitivnost forme na $H^1(\Omega)$ (vidi (1.21)).

Ostaje pokazati neprekidnost linearnog funkcionala. U tu svrhu treba pretpostaviti da je $f \in L^2(\Omega)$ i

$$g \in L^2(\partial\Omega). \quad (1.28)$$

Tada za funkcional

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma, \quad (1.29)$$

koristeći teorem o tragu (Teorem 1.6), dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned} |\langle F, v \rangle| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Sada Lax-Milgramova lema i Lema 1.5 daju sljedeći zaključak:

Teorem 1.7 Neka je Ω Lipschitzova domena i neka su zadovoljene pretpostavke (1.15)—(1.18) i (1.28). Tada Neumannova zadaća (1.26) ima jedinstveno slabo rješenje koje minimizira funkcional

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma$$

na prostoru $H^1(\Omega)$.

Teorem 1.7 ne možemo primijeniti na problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{u } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.30)$$

budući da pripadna bilinearna forma

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$$

nije koecitivna na $H^1(\Omega)$. U (1.30)₂ koristimo oznaku

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i.$$

Uočimo da je klasično rješenje zadaje (1.30) određeno do na aditivnu konstantu, pa dakle nije jedinstveno i stoga je prirodno da Lax-Milgramova lema ne može biti primijenjena. Nadalje, lako je uočiti da postoji nužan uvjet egzistencije rješenja koji glasi

$$\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0, \quad (1.31)$$

i koji se dobiva integracijom diferencijalne jednadžbe (1.30)₁ po Ω .

Rješenje zadaje (1.30) možemo učiniti jedinstvenim tako da ga tražimo u užem funkcijskom prostoru $V \subset H^1(\Omega)$, iz kojeg su eliminirane sve konstante osim nule. Takav prostor možemo definirati na sljedeći način:

$$V = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}. \quad (1.32)$$

Na njemu je bilinearna forma

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$$

ponovo koercitivna. To slijedi iz ove varijante Poincaréove nejednakosti:

Lema 1.3 Neka je Ω ograničena Lipschitzova domena. Tada postoji konstanta C , takva da za svako $v \in H^1(\Omega)$ vrijedi

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(|v|_{H^1(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right|).$$

Za dokaz vidi Evans [?].

Na osnovu ove leme lako se pokazuje da je $v \mapsto |v|_{H^1(\Omega)}$ norma na V ekvivalentna s $H^1(\Omega)$ normom, pa se stoga može primijeniti Lax-Milgramova lema na problem: naći $u \in V$, takvo da

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma, \quad (1.33)$$

koji stoga ima jedinstveno rješenje $u \in V$. Da bi to rješenje bilo klasično, mora biti zadovoljen, pored glatkoće rješenja, i nužan uvjet egzistencije (1.31).

Pretpostavimo, konačno, da imamo mješovitu zadaću. Granicu $\partial\Omega$ ćemo podijeliti u dva disjunktna podskupa

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset.$$

Na Γ_D zadajemo Dirichletov, a na Γ_N Neumannov rubni uvjet. Na primjer,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{u } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{na } \Gamma_N. \end{cases}$$

Da bi se definirala slaba formulacija ove zadaće prvo se definira operator traga na *dio* granice Γ_D , koji ćemo označavati s γ_{Γ_D} . Taj operator ima svojstva analogna svojstvima operatora traga na čitavu granicu $\partial\Omega$. Zatim se pomoću njega definira funkcijski prostor V , u kome tražimo slabo rješenje:

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_{\Gamma_D} v = 0\}.$$

To su dakle funkcije iz $H^1(\Omega)$ koje se poništavaju na Γ_D . Uz uvjet da je površinska mjera skupa Γ_D strogo pozitivna može pokazati se da za funkcije iz $V = H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ vrijedi Poincaréova nejednakost. Stoga je $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ je norma na V ekvivalentna s $H^1(\Omega)$ normom. Formulacija slabog rješenja i primjena Lax-Milgramove leme sada slijedi analogno kao u prethodnim primjerima: treba naći $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ takvo da je

$$\forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} g v \, d\sigma.$$

Ako je *Dirichletov rubni uvjet nehomogen*, na primjer $u = u_0$ na Γ_D , onda je nužno da postoji funkcija $U \in H^1(\Omega)$ koja se podudara s u_0 na Γ_D (u smislu da je $\gamma_{\Gamma_D} U = u_0$) i koja *ne kviri* Neumannov rubni uvjet na Γ_D , tj. takva za koju je

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_D.$$

Kad god takvu funkciju možemo naći, onda mješovita zadaća ima jedinstveno slabo rješenje u skupu $U + H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$.

1.6 Nesimetrične zadaće

Diferencijalni operatori koje smo do sada promatrali vode na simetričnu bilinearnu formu. Varijacijska zadaća za takvu formu uvijek odgovara problemu minimizacije pripadnog funkcionala. Ako forma nije simetrična, onda to nije slučaj, što je lako provjeriti. Ipak tvrdnja Lax-Milgramove leme ostaje vrijediti.

Pogledajmo jedan primjer operatora koji vodi na nesimetričnu varijacijsku zadaću.

$$-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \quad \text{u } \Omega \quad (1.34)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \quad (1.35)$$

Odabrali smo homogeni Dirichletov rubni uvjet, a novost u diferencijalnom operatoru je član s derivacijama prvog reda. Pretpostavke o koeficijentima jednadžbe su sljedeće:

$$\forall i, j, \quad a_{ij}, b_i, a_0 \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \quad (1.36)$$

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^d \xi_i^2. \quad (1.37)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \text{matrica } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x})) \text{ je simetrična,} \quad (1.38)$$

$$\mathbf{b} = (b_i), \quad \text{div } \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega). \quad (1.39)$$

Varijacijsku formulaciju izvodimo množenjem s test funkcijom $v \in H_0^1(\Omega)$ i integracijom po Ω ,

$$-\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) v \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x},$$

a onda parcijalnom integracijom u prvom članu dovivamo

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Time dolazimo do varijacijskog problema: naći $u \in H_0^1(\Omega)$ takvo da je

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle,$$

gdje je

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_0 u v \, d\mathbf{x} \quad (1.40)$$

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (1.41)$$

Nova je forma evidentno bilinearna i nesimetrična, tj. općenito je $a(u, v) \neq a(v, u)$. Da bismo pokazali njenu neprekidnost, potrebno je samo ocijeniti dodatni član

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\mathbf{x} \right| &\leq \max_i \|b_i\|_{L^\infty} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right| \, d\mathbf{x} \\ &\leq \max_i \|b_i\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Uvedemo li oznaku $M = \max\{\|a_{ij}\|_{L^\infty}, \|a_0\|_{L^\infty}, \|b_i\|_{L^\infty}\}$ dobivamo

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq Md(\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}) \\ &\leq 3Md \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Kod dokaza koercitivnosti treba ocijeniti samo drugi integral u formi $a(\cdot, \cdot)$ budući da imamo

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\mathbf{x} \geq \alpha |u|_{H^1(\Omega)}^2.$$

To se može učiniti na razne načine. Uz pretpostavku $\operatorname{div} \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)$ imamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u^2}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u^2) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{b} u^2 d\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{b} u^2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili rubni uvjet. Stoga dobivamo

$$a(u, u) \geq \alpha |u|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (a_0 - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b}) u^2 d\mathbf{x}.$$

Prema Poincaréovoj nejednakosti postoji konstanta C_Ω , koja ovisi samo o domeni Ω , takva da je

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2} \leq C_\Omega |v|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.42)$$

Pretpostavimo sada da postoji broj η takav da vrijedi:

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad a_0(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \geq -\eta. \quad (1.43)$$

Tada imamo ocjenu

$$a(u, u) \geq \alpha |u|_{H^1(\Omega)}^2 - \eta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq (\alpha - \eta C_\Omega) |u|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Time dolazimo do sljedećeg dovoljnog uvjeta koercitivnosti: ako postoji broj η takav da je

$$\alpha - \eta C_\Omega > 0, \quad (1.44)$$

i za koji vrijedi (1.43), onda je bilinearna forma (1.40) koercitivna na $H_0^1(\Omega)$.

Teorem 1.8 Neka su zadovoljeni uvjeti (1.36)–(1.39) te neka postoji konstanta $\eta \geq 0$ koja zadovoljava (1.43) i (1.44), gdje je C_Ω konstanta iz Poincaréove nejednakosti (1.42). Tada zadaća (1.34), (1.35) ima jedinstveno slabo rješenje.

Napomena 1.3 Jedan važan specijalan slučaj je $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$ i $a_0 \geq 0$.

Zadatak. Zadan je rubni problem

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u + \mathbf{c}u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + a_0 u = f \quad u \in \Omega \quad (1.45)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (1.46)$$

pri čemu pretpostavljamo da su ispunjeni uvjeti (1.36)–(1.39), te da vektorska funkcija \mathbf{c} zadovoljava iste uvjete kao i \mathbf{b} (uniformnu ograničenost svih komponenti c_i i divergencije $\operatorname{div} \mathbf{c}$). Pokažite da na zadaću (1.45), (1.46) možemo primijeniti Lax-Milgramovu lemu ako postoji broj η takav da je

$$\alpha - \eta C_\Omega > 0, \quad (1.47)$$

i za koji vrijedi

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad a_0(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{x})) \geq -\eta.$$

C_Ω je kao i ranije Poincaréova konstanta.

Zadatak. Kako se uvjet (1.47) mijenja ako homogeni Dirichletov uvjet zamijenimo Neumannovim uvjetom, a kako ako imamo mješoviti Dirichlet-Neumannov uvjet?

Napomena 1.4 Do sada smo egzistenciju i jedinstvenost slabih rješenja eliptičnih rubnih zadaća dokazivali svođenjem na Lax-Milgramov teorem. Postavlja se pitanje da li su uvjeti tog teorema nužni za egzistenciju i jedinstvenost pripadne varijacijske jednadžbe. Pokazuje se da je odgovor na to pitanje negativan, odnosno da zadaća s bilinearnom formom koja nije koercitivna može imati jedinstveno rješenje. Jedan generalniji teorem egzistencije i jedinstvenosti (korektnosti) rješenja zasniva se na Fredholmovoj alternativi za kompaktne operatore na Banachovim prostorima i može se naći npr. u [?].

1.7 Spektralna zadaća

Spektralne zadaće za parcijalne diferencijalne jednadžbe također mogu biti formulirane varijacijski, posve analogno kao i druge zadaće. Pogledajmo na primjer sljedeći spektralni problem postavljen u ograničenoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^d$:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u \in \Omega, \quad (1.48)$$

$$u = 0, \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (1.49)$$

Nepoznanice u zadaći (1.48), (1.49) su svojstvena funkcija u i svojstvena vrijedost λ . Standardnim postupkom formiramo varijacijsku zadaću:

$$\begin{cases} \text{Naći } u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \lambda \int_{\Omega} uv \, d\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.50)$$

Spektralna zadaća definira svojstvenu funkciju do na skalarni multiplikatora pa je uobičajeno normirati rješenje u , tj. tražiti spektralnu funkciju koja zadovoljava $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

Apstraktnu varijacijsku spektralnu zadaću postavljamo na sljedeći način:

- (A) Zadana su dva realna separabilna Hilbertova prostora V i H takvi da je $V \subset H$ a neprekidnom injekcijom i V je gust podskup od H ;
- (B) Zadana je bilinearna i neprekidna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Označit ćemo skalarni produkt i normu u prostoru H respektivno s (\cdot, \cdot) i $|\cdot|$, dok će norma prostora V biti označena s $\|\cdot\|$. Spektralna zadaća sada ima sljedeću formu: naći $\lambda \in \mathbb{R}$ i $u \in V$, $u \neq 0$, takve da vrijedi

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = \lambda(u, v). \quad (1.51)$$

Za skalar λ kažemo da je svojstvena vrijednost, a za element $u \in V$ da je svojstveni vektor ili svojstvena funkcija.

U našem prvom primjeru je $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ te

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}.$$

Lako je provjeriti da su uvjeti A i B ispunjeni.

Napomena 1.5 *Svojstvena zadaća, kako je ovdje postavljena, nije dana u svoj općenitosti budući da su svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori općenito kompleksni. Da bismo korektno postavili opću spektralnu zadaću trebali bismo krenuti od kompleksnih Hilbertovih prostora H i V i na $V \times V$ promatrati seskvilinearnu formu $a: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ (linearnu u prvom argumentu i antilinearnu u drugom). Svojstvena zadaća je tada zadana s (1.51) pri čemu tražimo $\lambda \in \mathbb{C}$. Ako je seskvilinearna forma a hermitska, tj. ako vrijedi*

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \overline{a(v, u)},$$

onda se lako pokazuje da je svaka svojstvena vrijednost realna. Na ako je više od toga bilinearna forma realna i simetrična, onda zadaća (1.51) ima i realne svojstvene vektore (u smislu da ako je svojstveni vektor kompleksan, onda su njegov realni i imaginarni dio i sami svojstveni vektori). Stoga tu zadaću možemo promatrati na realnim Hilbertovim prostorima.

Pored uvjeta A i B postavljamo i sljedeće uvjete na bilinearnu formu:

- (C) Bilinearna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je simetrična;
- (D) Bilinearna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je koercitivna na V .

Sada smo u uvjetima Lax-Milgramove leme pa zadaća: naći $u \in V$ takvo da je

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = (f, v), \quad (1.52)$$

ima jedinstveno rješenje za svako $f \in H$. Uočimo da tu koristimo neprekidnost ulaganja prostora V u H zbog koje postoji konstanta c_0 takva da je

$$\forall v \in V, \quad |v| \leq c_0 \|v\|.$$

Uz taj uvjet je $v \mapsto (f, v)$ element prostora V' za svako $f \in H$.

Budući da svaki $f \in H$ određuje jedinstveni element $u \in V$ za koji vrijedi (1.52) dobro je definirani operator $T: H \rightarrow V$ koji djeluje po pravilu $Tf = u$. Operator T je evidentno linearan i neprekidan s ocjenom norme

$$\|Tf\| \leq \frac{c_0}{\alpha} |f|. \quad (1.53)$$

Pomoću operatora T spektralnu zadaću (1.51) možemo zapisati u obliku jednadžbe

$$u = \lambda Tu. \quad (1.54)$$

Rješenje zadaće (1.54) proizlazi iz općih rezultata funkcionalne analize ako je operator T kompaktan. Prisjetimo se pri tome da je neprekidno preslikavanje s jednog metričkog prostora u drugi kompaktan ukoliko ograničene skupove preslikava u relativno kompaktne.

Lema 1.4 Neka su ispunjeni uvjeti A, B i D te neka je kanonsko ulaganje prostora V u prostor H kompaktan. Tada je operator T , promatran kao operator s V u V kompaktan

Dokaz. Neka je $\iota: V \rightarrow H$ kanonsko ulaganje ($\iota(v) = v$). Tada je operator T promatran kao operator s V u V ustvari $T \circ \iota$. Oba operatora, T i ι , su neprekidni i prema pretpostavci ι je kompaktan. Stoga je i kompozicija kompaktan operator. \square

Ponovimo sada neke rezultate funkcionalne analize. Niz vektora $(e_n; n \in \mathbb{N})$ je *topološka baza* prostora X ako se svaki vektor $x \in X$ može na jedinstven način prikazati u obliku

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

gdje su α_i skalari i red konvergira po normi. Lako se pokazuje da je svaki normirani prostor koji ima topološku bazu separabilan.

Ako je prostor X unitaran onda uvodimo pojam ortonormirane baze: Ortonormirani niz vektora $(e_n; n \in \mathbb{N})$ je *ortonormirana baza* ako za svako $x \in X$ vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n,$$

pri čemu red konvergira po normi. Korisne su još dvije definicije: Familija vektora $(e_j, j \in \mathcal{J})$ je *fundamentalna* (totalna) u X ako je linearan prostor razapet skupom $\{e_j: j \in \mathcal{J}\}$ gust u X . Ortonormirana familija vektora $(e_j, j \in \mathcal{J})$ je *maksimalna* u X ako je nulvektor jedini vektor okomit na skup $\{e_j: j \in \mathcal{J}\}$. Za detalje vidi na primjer Kurepa [3]. Nam je potreban sljedeći rezultat:

Teorem 1.9 Neka je V separabilan Hilbertov prostor i (e_n) niz u njemu. Sljedeća su svojstva ekvivalentna.

1. Niz (e_n) je ortonormirana baza u V ;
2. Niz (e_n) je fundamentalan ortonormiran niz u V ;
3. Niz (e_n) je maksimalan ortonormiran niz u V .

Za dokaz vidi Kurepa [3], str. 51.

Teorem 1.10 Neka je V unitaran prostor i $T: V \rightarrow V$ kompaktan simetričan operator beskonačnog ranga. Tada postoji ortonormiran niz $(e_n; n \in \mathbb{N})$ i niz realnih brojeva $(\mu_n; n \in \mathbb{N})$ takvi da je:

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots \geq |\mu_n| \geq \cdots > 0, \quad (1.55)$$

$$Te_n = \mu_n e_n \quad (n \in \mathbb{N}); \quad \lim \mu_n = 0, \quad (1.56)$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n \quad (u \in V). \quad (1.57)$$

Niz (μ_n) sadrži sve svojstvene vrijednosti operatora T različite od nule. Svojstveni potprostor svake svojstvene vrijednosti različite od nule je konačnodimenzionalan. Niz (e_n) je maksimalan u V ako i samo ako nula nije svojstvena vrijednost operatora T .

Dokaz se može naći u [3], str 210.

Neka su ispunjene pretpostavke A, B, C i D. Tada bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ predstavlja jedan skalarni produkt na V koji generira normu ekvivalentnu s normom prostora V . Štoviše, u tom skalarnom produktu je operator T , promatran kao operator s V u V , simetričan i pozitivan. Simetrija:

$$a(Tu, v) = (u, v) = (v, u) = a(Tv, u) = a(u, Tv).$$

Pozitivnost: za $v \neq 0$,

$$a(Tv, v) = |v|^2 > 0.$$

Uz pretpostavku da je kanonsko ulaganje $V \subset H$ kompaktno možemo primijeniti Teorem 1.10.

Teorem 1.11 Neka su ispunjene pretpostavke A, B, C i D te neka je kanonsko ulaganje $V \subset H$ kompaktno. Tada postoji niz brojeva $(\lambda_n; n \in \mathbb{N})$ i niz vektora $(w_n; n \in \mathbb{N})$, $w_n \in V$, koji zadovoljavaju:

$$\forall v \in V, \quad a(w_n, v) = \lambda_n(w_n, v), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, niz $(\lambda_n; n \in \mathbb{N})$ zadovoljava

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots; \quad \lim \lambda_n = +\infty, \quad (1.58)$$

niz $(w_n; n \in \mathbb{N})$ je ortonormirana baza u H dok je niz $(\lambda_n^{-1/2} w_n; n \in \mathbb{N})$ ortonormirana baza u prostoru V opskrbljenom skalarnim produktom $a(\cdot, \cdot)$.

Dokaz. Zanimljivo ćemo konačnodimenzionalni slučaj buduću da je on jednostavniji i može se tretirati elementarnim sredstvima i primijenit ćemo Teorem 1.10 na operator T koji generira bilinearna forma. Već smo vidjeli da u prostoru V opskrbljenom skalarnim produktom $a(\cdot, \cdot)$ operator T postaje simetričan, pozitivan i kompaktan. Nadalje, njegov rang ne može biti konačan jer bi tada iz

$$\forall v \in V, \quad a(Tf, v) = (f, v) \quad (1.59)$$

slijedilo da su svi elementi iz V okomiti na $\mathcal{R}(T)$ u novom skalarnom produktu (svi $v \in V$ takvi da je $a(Tf, v) = 0$ za sve $f \in H$) ujedno okomiti na čitav H ($(f, v) = 0$ za sve $f \in H$), no uzimajući $f = v$ dolazimo do $v = 0$, odnosno da nema vektora okomitih na sliku od T . Rang operatora je dakle beskonačan i svi uvjeti Teorema 1.10 su ispunjeni.

Prema Teoremu 1.10 svojstvena zadaća $Te = \mu e$ prebrojivo mnogo rješenja: $(\mu_n), (e_n)$. Zbog pozitivnosti operatora T nula nije svojstvena vrijednost i sve svojstvene vrijednosti su strogo pozitivne, pa stoga prema (1.55), (1.56) one čine niz,

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq \dots > 0, \quad \lim \mu_n = 0.$$

Zadaća $u = \lambda Tu$, koja predstavlja ekvivalentni zapis zadaće (1.51), ima stoga prebrojivo mnogo rješenja $(\lambda_n), (e_n)$, gdje je $\lambda_n = 1/\mu_n$, pa stoga vrijedi (1.58). Teorem 1.10 nam govori da je niz (e_n) ortonormirana baza u prostoru V opskrbljenom skalarnim produktom induciranim bilinearnom formom. Definirajmo $w_n = \lambda_n^{1/2} e_n$ i pokažimo da niz (w_n) predstavlja ortonormiranu bazu u H . Uočimo prvo da je $w_n = \lambda_n T w_n$, tj. skaliranje ponovo daje rješenje svojstvene zadaće. Odavde, po definiciji operatora T (vidi (1.59)) slijedi

$$(w_n, w_m) = \frac{1}{\lambda_n} a(w_n, w_m) = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda_n}} a(e_n, e_m) = \delta_{n,m}.$$

Time smo pokazali da je niz (w_n) ortonormiran u H . Pokažimo sada da je on maksimalan u H , tj. da je samo nulvektor okomit na sve w_n u H . Neka je $f \in H$

takav da je $(f, w_n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada je evidentno $(f, e_n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ a kako niz (e_n) čini ortonormiranu bazu u V to je f okomit na čitav V . Budući da je V gust u H slijedi da je $f = 0$ i maksimalnost je dokazana. Prema Teoremu 1.9 niz je ortonormirana baza u H . \square

Primijenjujući Teorem 1.11 na primjer (1.48), (1.49) možemo naći niz (w_n) u $H_0^1(\Omega)$ koji čini ortogonalnu bazu u $H_0^1(\Omega)$ i ortonormiranu bazu u $L^2(\Omega)$. Promatrajući Neumannovu spektralnu zadaću možemo takav niz naći u $H^1(\Omega)$.

Napomena 1.6 U Teoremu 1.11 možemo oslabiti pretpostavku koercitivnosti. Dovoljno je pretpostaviti da bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ zadovoljava sljedeći uvjet: postoje brojevi $\alpha > 0$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\forall v \in V, \quad a(v, v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2.$$

Tada promatrajući bilinearnu formu $a(u, v) + \lambda(u, v)$ dolazimo u uvjete Teorema 1.11 koji daje niz svojstvenih parova modificirane zadaće. Polazna zadaća ima iste svojstvene funkcije, s istim svojstvima, ali pomaknute svojstvene vrijednosti za λ . Stoga sada svojstvene vrijednosti zadovoljavaju

$$-\lambda < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots; \quad \lim \lambda_n = +\infty. \quad \square$$

1.8 Nelinearne zadaće

Teorija egzistencije rješenja nelinearnih diferencijalnih jednadžbi je značajno složenija od linearne teorije i stoga se ovdje u nju nećemo upuštati. Ipak, varijacijska formulacija zadaće se u mnogim slučajevima postavlja na posve isti način kao za linearne zadaće što nam omogućava formiranje varijacijske aproksimacije i konačno upotrebu metode konačnih elemenata. Temeljna je razlika u tome što nas varijacijska aproksimacija sada vodi na nelinearnu jednadžbu koju treba riješiti nekim iterativnim postupkom, na primjer *Newtonovom metodom*.

Ilustrirajmo to jednim promjerom. Promatramo sljedeću rubnu zadaću u ograničenoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^d$:

$$\operatorname{div}(\alpha(u)\mathbf{A}(\nabla u - \mathbf{b}(u))) = 0, \quad \text{na } \Omega \quad (1.60)$$

$$\alpha(u)\mathbf{A}(\nabla u - \mathbf{b}(u)) \cdot \mathbf{n} = g, \quad \text{na } \Gamma_1 \quad (1.61)$$

$$u = 0, \quad \text{na } \Gamma_2, \quad (1.62)$$

u kojoj je granica domene podijeljena na Dirichletov i Neumannov dio: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Matrična funkcija $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ simetrična i uniformno pozitivno definitna, s ograničenim koeficijentima (vidi (1.15) i (1.16)). Funkcije $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $\mathbf{b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ su dovoljno glatke (minimalno neprekidne) i postoji konstanta $\alpha_0 > 0$ takva da je

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \alpha(u) \geq \alpha_0. \quad (1.63)$$

Ta je pretpostavka nužna kako bi zadaća bila uniformno eliptična. Konačno, o zadanoj funkciji g pretpostavljamo

$$g \in L^2(\Gamma_1). \quad (1.64)$$

Napomena 1.7 *Zadaća (1.60)–(1.62) u slučaju $\mathbf{b}(u) = \alpha(u)\mathbf{g}$ opisuje jednofazni stacionarni tok fluida kroz poroznu sredinu. Pri tome rješenje u ima značenje tlaka, $a(u)$ je gustoća fluida, \mathbf{A} je propusnost sredine, a \mathbf{g} je vektor ubrzanja sile teže. Prirodni uvjeti na funkciju $\alpha(u)$ su stroga monotonost (rasuća) i stroga pozitivnost.*

Varijacijsku zadaću formiramo kao i do sada, množenjem s dovoljno glatkom test funkcijom v koja se poništava na Γ_2 i parcijalnom integracijom:

$$\int_{\Omega} \alpha(u)\mathbf{A}(\nabla u - \mathbf{b}(u)) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_1} gv \, d\sigma.$$

Time smo dobili zadaću naizgled sličnu do sada promatranim zadaćama. Apstraktno zapisana ona prima sljedeći oblik:

$$\begin{cases} \text{Naći } u \in V \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle, \end{cases} \quad (1.65)$$

gdje je $V = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ na } \Gamma_2\}$, te

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \alpha(u)\mathbf{A}(\nabla u - \mathbf{b}(u)) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}, \quad \langle F, v \rangle = \int_{\Gamma_1} gv \, d\sigma. \quad (1.66)$$

Osnovna razlika je to što forma $a(\cdot, \cdot)$ više nije bilinearana: ona je linearna u drugom argumentu, ali nelinearna u prvom, i stoga se Lax-Milgramova lema ne može primijeniti.

Istaknimo da kod nelinearnih zadaća uvijek treba pažljivo provjeriti je li forma $a(\cdot, \cdot)$ (i isto tako funkcional desne strane) dobro definirana na odabranom funkcijskom prostoru, odnosno jesu li svi integrali u definiciji varijacijske jednadžbe konačni. U našem slučaju ograničenost nelinearnih funkcija $\alpha(u)$ i $\mathbf{b}(u)$ osigurava da je forma $a(\cdot, \cdot)$ dobro definirana na $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Varijacijsku aproksimaciju zadaće (1.65) definiramo prirodno, odabirom konačnodimenzionalnog potprostora $V_h \subset V$:

$$\begin{cases} \text{Naći } u_h \in V_h \\ \forall v \in V_h, \quad a(u_h, v) = \langle F, v \rangle \end{cases} \quad (1.67)$$

Odaberimo jednu bazu u prostoru V_h i označimo njene elemente s $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$. Funkciju u_h ćemo raspisati po vektorima baze:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{U} = (U_j)_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N \text{ je vektor koeficijenata.}$$

Time smo dobili sustav nelinearnih algebarskih jednadžbi

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}) = 0,$$

gdje je $\mathcal{F}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ funkcija definirana formulama

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{U}) = a\left(\sum_{j=1}^N U_j \phi_j, \Phi_i\right) - \langle F, \phi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, N.$$

Dobiveni sustav možem rješavati Newtonovom metodom, koja se bazira na linearnoj aproksimaciji. Pretpostavimo da imamo aproksimaciju nultočke \mathbf{U} i da želimo naći korekciju \mathbf{V} takvu da je $\mathcal{F}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 0$. Tada razvojem u Taylorov red dobivamo

$$0 = \mathcal{F}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \mathcal{F}(\mathbf{U}) + D\mathcal{F}(\mathbf{U})\mathbf{V} + \dots$$

Zanemarujući više članove u razvoju dolazimo do jednadžbe za \mathbf{V} :

$$0 = \mathcal{F}(\mathbf{U}) + D\mathcal{F}(\mathbf{U})\mathbf{V} \tag{1.68}$$

iz koje slijedi $\mathbf{V} = -D\mathcal{F}(\mathbf{U})^{-1}\mathcal{F}(\mathbf{U})$, a $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ je nova aproksimacija. Time dolazimo do sljedećeg iterativnog postupka: za zadanu početnu iteraciju $\mathbf{U}^0 \in \mathbb{R}^N$ i $n = 0, 1, \dots$ imamo

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - D\mathcal{F}(\mathbf{U}^n)^{-1}\mathcal{F}(\mathbf{U}^n).$$

To je Newtonov iterativni postupak koji prirodnije zapisujemo u obliku:

$$D\mathcal{F}(\mathbf{U}^n)\mathbf{V} = -\mathcal{F}(\mathbf{U}^n), \tag{1.69}$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \mathbf{V}, \tag{1.70}$$

gdje u (1.69) rješavamo linearan sustav s matricom koja je derivacija funkcije \mathcal{F} u prethodnoj iteraciji. Novu iteraciju dobivamo u (1.70) korekcijom prethodne.

Linearni sustav koji treba riješiti u svakom koraku Newtonovog algoritma predstavlja jednu linearnu eliptičku rubnu zadaću. To je najlakše vidjeti ako Newtonovu metodu izvedemo neposredno na varijacijskoj formulaciji nelinearne zadaće, bez uvođenja baze u prostoru konačnih elemenata. S tim ciljem uvedimo funkciju

$$\mathcal{F}_v(u_h) = a(u_h, v) - \langle F, v \rangle = \int_{\Omega} \alpha(u) \mathbf{A}(\nabla u - \mathbf{b}(u)) \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_1} gv \, d\sigma,$$

u kojoj test funkcija v igra ulogu parametra.

Uzmimo da je u_h^n poznata aproksimacija rješenja u_h zadaće (1.67), tj. rješenje jednadžbe $\mathcal{F}_v(u_h) = 0$, za svako $v \in V_h$, i sljedeću aproksimaciju potražimo u obliku $u_h^{n+1} = u_h^n + w_h$. Definiramo realnu funkciju

$$f(t) = \mathcal{F}_v(u_h^n + tw_h) = a(u_h^n + tw_h, v) - \langle F, v \rangle,$$

koju razvijemo Taylorov red,

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \dots \quad (1.71)$$

Ako je u_h^{n+1} točno rješenje, onda je $f(1) = 0$. Približnu korekciju w_h stoga računamo, zanemarujući više članove u razvoju (1.71), iz jednadžbe

$$0 = f(0) + f'(0), \quad (1.72)$$

koja je ekvivalentna s (1.68). Raspisivanjem (1.72) dobivamo:

$$0 = a(u_h^n, v) - \langle F, v \rangle + \frac{d}{dt}a(u_h^n + tw_h, v)|_{t=0}$$

i nova iteracija je $u_h^{n+1} = u_h^n + w_h$. Neposrednim računom dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a(u_h^n + tw_h, v)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \alpha(u_h^n + tw_h) \mathbf{A}(\nabla(u_h^n + tw_h) - \mathbf{b}(u_h^n + tw_h)) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \alpha(u_h^n) \mathbf{A}(\nabla w_h - w_h \mathbf{b}'(u_h^n)) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \alpha'(u_h^n) w_h \mathbf{A}(\nabla u_h^n - \mathbf{b}(u_h^n)) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Time smo došli do sljedeće linearne varijacijske zadaće koja definira $w_h \in V_h$:

$$\forall v \in V_h, \quad \mathcal{A}^n(w_h, v) = \langle \mathcal{F}^n, v \rangle \quad (1.73)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^n(w_h, v) &= \int_{\Omega} \alpha(u_h^n) \mathbf{A}(\nabla w_h - w_h \mathbf{b}'(u_h^n)) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \alpha'(u_h^n) w_h \mathbf{A}(\nabla u_h^n - \mathbf{b}(u_h^n)) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \\ \langle \mathcal{F}^n, v \rangle &= \int_{\Gamma_1} g v \, d\sigma - \int_{\Omega} \alpha(u_h^n) \mathbf{A}(\nabla u_h^n - \mathbf{b}(u_h^n)) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Da bi ta varijacijska jednadžba (1.73) bila dobro definirana moramo postaviti dodatne pretpostavke o nelinearnim koeficijentima i minimalno tražiti da α' u \mathbf{b}' budu ograničene funkcije te da je α' strogo pozitivna.

1.9 Varijacijska aproksimacija

Kada smo jednom rubnu zadaću zapisali u varijacijskoj formi njena se numerička aproksimacija svodi na zamjenu beskonačnodimenzionalnog prostora V , na kome je varijacijska jednadžba postavljena, nekim njegovim konačnodimenzionalnim potprostorom $V_h \subset V$. Taj se postupak naziva varijacijska aproksimacija, a

greška aproksimacije zavisi samo o tome koliko dobro V_h aproksimira prostor V , u smislu koji će biti razjašnjen u Teoremu 1.12.

Mogući su različiti načini konstrukcije prostora V_h . Na primjer, ako možemo naći jednu prebrojivu bazu u prostoru V , onda je prirodno za V_h uzeti potprostor razapet s prvih N svojstvenih vektora. Uzimajući sve veći N dobivamo sve bolju aproksimaciju prostora V . Metoda aproksimacije zasnovana na tom izboru naziva se *Galerkinova metoda* i predstavlja moćan postupak za dokazivanje egzistencije rješenja nelinearnih eliptičkih rubnih zadaća. Metoda konačnih elemenata, s druge strane, konstruira V_h kao prostor po dijelovima polinomijalnih funkcija, dovoljno glatkih kako bi imali $V_h \subset V$. Tu se prvo domena na kojoj je zadaća postavljena aproksimira unijom jednostavnih (najčešće poliedarskih) skupova koji čine *triangulaciju* domene. Funkcije iz V_h se zatim definiraju kao polinomi određenog stupnja na svakom pojedinom elementu iz triangulacije, s određenim uvjetima neprekidnosti na granici susjednih elemenata, koji osiguravaju inkluziju $V_h \subset V$. U toj situaciji parametar h predstavlja dijametar najvećeg elementa triangulacije i pokazuje se da prostor V_h aproksimira V tim bolje što je h manji.

Za analizu varijacijske aproksimacije polazimo od varijacijske jednadžbe koja zadovoljava uvjete Lax-Milgramove leme koje ovdje sumiramo:

Pretpostavke (A):

- V je realan Hilbertov prostor s normom $\|\cdot\|$;
- $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilinearna forma;
- $\exists M > 0$ takvo da $\forall u, v \in V \quad |a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$ (ograničenost);
- $\exists \alpha > 0$ takvo da $\forall v \in V \quad a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2$ (koercitivnost);
- $F \in V'$.

Apstraktna varijacijska zadaća ima sljedeći oblik:

Zadaća (P):

$$\begin{cases} \text{Naći } u \in V \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle \end{cases}$$

Odabirom konačnodimenzionalnog potprostora $V_h \subset V$ dolazimo do *aproksimativne* varijacijske zadaće:

Zadaća (P_h):

$$\begin{cases} \text{Naći } u_h \in V_h \\ \forall v \in V_h, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle \end{cases}$$

Zadaću (P_h) smo promatrali u Lemi 1.1 i tamo smo pokazali da se uvođenjem baze u prostor V_h ona svodi na jedan matricni sustav s pozitivno definitnom matricom (koercitivnost bilinearne forme), koja je simetrična ukoliko je bilinearna

forma simetrična. Pozitivna definitnost matrice sustava ima za posljedicu da zadaća (P_h) ima jedinstveno rješenje, no do tog zaključka dolazimo direktno: ako su zadovoljeni svi uvjeti koji osiguravaju da se Lax-Milgramova lema može primijeniti na zadaću (P) , onda ti isti uvjeti osiguravaju jedinstvenu rješivost zadaće (P_h) , jer je jedina razlika između njih u funkcijskom prostoru. Iz činjenice da je svaki konačnodimenzionalni potprostor Hileberovog prostora i sam Hilbertov (u nasljeđenom skalarnom produktu) vidimo da su sve pretpostavke Lax-Milgramove leme ispunjene i za zadaću (P_h) .

Egzistencija i jedinstvenost rješenja diskretne zadaće slijedi dakle direktno iz egzistencije i jedinstvenosti kontinuirane zadaće. Ostaje još pitanje greške aproksimacije, tj. ocjene razlike $\|u - u_h\|$ u različitim normama. To se pitanje, za normu prostora V , rješava sljedećim teoremom koji problem svodi na pitanje *koliko dobro prostor V_h aproksimira prostor V .*

Teorem 1.12 (Céa-ina lema) Neka su ispunjene pretpostavke (A) i neka je $u \in V$ rješenje zadaće (P) te $u_h \in V_h \subset V$ rješenje zadaće $(P)_h$. Tada je

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|,$$

gdje je $\|\cdot\|$ norma prostora V .

Dokaz. Iz

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in V_h \subset V \\ a(u_h, v) &= \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in V_h, \end{aligned}$$

dobivamo *relaciju ortogonalnosti*

$$a(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (1.74)$$

Za proizvoljno $v \in V_h$, koristeći koercitivnost i neprekidnost bilinearne forme te (1.74), dobivamo

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) \\ &\leq M \|u - u_h\| \|u - v\|. \end{aligned}$$

Time smo dobili ocjenu

$$\forall v \in V_h, \quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\|.$$

Uzimanjem infimuma po svim $v \in V_h$ dobivamo tvrdnju. \square

U slučaju simetrične bilinearne forme možemo dobiti bolju konstantu u ocjeni. Uočimo prvo da je u slučaju simetričnosti bilinearne forma $a(u, v)$ jedan dobar skalarni produkt i izraz $\sqrt{a(u, u)}$ predstavlja normu na V , ekvivalentnu s normom $\|\cdot\|$; tu normu nazivamo *energetska norma*.

Zbog ortogonalnosti (1.74) i simetrije imamo za proizvoljno $v \in V_h$

$$\begin{aligned} a(u - v, u - v) &= a(u - u_h + (u_h - v), u - u_h + (u_h - v)) \\ &= a(u - u_h, u - u_h) + 2a(u - u_h, u_h - v) + a(u_h - v, u_h - v) \\ &= a(u - u_h, u - u_h) + a(u_h - v, u_h - v) \end{aligned}$$

Time smo dobili optimalnu ocjenu u energetske norme

$$a(u - u_h, u - u_h) = \inf_{v \in V_h} a(u - v, u - v). \quad (1.75)$$

Oдавde je

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq M \|u - v\|^2,$$

izlazi da je za svako $v \in V_h$

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - v\|.$$

Time vidimo da Teorem 1.12 u simetričnom slučaju vrijedi s konstantom $C = \sqrt{M/\alpha}$ koja može biti značajno manja od M/α .

Napomena 1.8 *Uzmimo da imamo niz rastućih potprostora $V_{h_i} \subset V$, $i \in \mathbb{N}$; $V_{h_1} \subset V_{h_2} \subset V_{h_3} \subset \dots$. Tada je iz Teorema 1.12 jasno da je minimalna pretpostavka koja osigurava konvergenciju aproksimacijskog procesa sljedeća:*

$$\forall v \in V, \quad \lim_i \left(\inf_{v_h \in V_{h_i}} \|v - v_h\| \right) = 0.$$

Teorem 1.12 želimo primijeniti na varijacijske zadaće koje dobivamo diskretizacijom eliptičkih rubnih zadaća. Pri tome se susrećemo sa sljedećom poteškoćom: Bilinearne je forma u varijacijskoj zadaći dana određenim integralom koji u diskretnoj zadaći općenito moramo aproksimirati nekom integracijskom formulom. Izuzetak je slučaj kada su koeficijenti diferencijalne jednadžbe konstantni, kada najčešće sve integrale možemo izračunati egzaktno.

Ako želimo obuhvatiti situaciju u kojoj integrale u varijacijskoj jednadžbi izračunavamo primjenom neke integracijske formule, onda trebamo diskretnu zadaću $(P)_h$ zamijeniti zadaćom sljedećeg oblika:

Zadaća (P_{hh}) :

$$\begin{cases} \text{Naći } u_h \in V_h \\ \forall v \in V_h, \quad a_h(u_h, v) = F_h(v) \end{cases}$$

gdje je $a_h(\cdot, \cdot): V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma koja aproksimira formu $a(\cdot, \cdot)$ i $F_h: V_h \rightarrow \mathbb{R}$ linearan funkcional koji aproksimira $F \in V'$. Uočimo dobro da ne pretpostavljamo da je bilinearna forma definirana na čitavom $V \times V$ (i analogno za F_h).

Sljedeći teorem daje apstraktnu ocjenu greške aproksimacije. On pokazuje da se greška sastoji od greške aproksimacije prostora V potprostorom V_h i *greške konzistencije* koja mjeri koliko su dobro aproksimirani bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ i funkcional $F \in V'$. Budući da koercitivnost diskretne bilinearne forme sada treba posebno dokazivati, ovdje ćemo ju uvrstiti kao pretpostavku.

Teorem 1.13 (Prva Strangova lema) Neka su ispunjene pretpostavke (A) i neka je $u \in V$ rješenje zadaće (P) te $u_h \in V_h \subset V$ rješenje zadaće (P_h) . Pretpostavimo da je diskretna bilinearna forma a_h **uniformno V_h -eliptična** tj. da postoji konstanta $\tilde{\alpha}$, neovisna o potprostoru V_h , takva da je

$$\forall v \in V_h, \quad \tilde{\alpha}\|v\|^2 \leq a_h(v, v). \quad (1.76)$$

Tada vrijedi

$$\|u - u_h\| \leq \inf_{v \in V_h} \left\{ \left(1 + \frac{M}{\tilde{\alpha}}\right)\|u - v\| + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \sup_{0 \neq w \in V_h} \frac{|a(v, w) - a_h(v, w)|}{\|w\|} \right\} + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \sup_{0 \neq w \in V_h} \frac{|\langle F, w \rangle - F_h(w)|}{\|w\|}. \quad (1.77)$$

Dokaz. Neka je $v \in V_h$ proizvoljan element. Uniformna V_h -eliptičnost daje

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}\|u_h - v\|^2 &\leq a_h(u_h - v, u_h - v) \\ &= a_h(u_h - v, u_h - v) + a(u, u_h - v) - \langle F, u_h - v \rangle \\ &= a(u - v, u_h - v) + \{a(v, u_h - v) - a_h(v, u_h - v)\} \\ &\quad + F_h(u_h - v) - \langle F, u_h - v \rangle. \end{aligned}$$

Koristeći neprekidnost bilinearne forme $a(\cdot, \cdot)$, dobivamo

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}\|u_h - v\| &\leq M\|u - v\| + \frac{|a(v, u_h - v) - a_h(v, u_h - v)|}{\|u_h - v\|} + \frac{|F_h(u_h - v) - \langle F, u_h - v \rangle|}{\|u_h - v\|} \\ &\leq M\|u - v\| + \sup_{w \in V_h} \frac{|a(v, w) - a_h(v, w)|}{\|w\|} + \sup_{w \in V_h} \frac{|F_h(w) - \langle F, w \rangle|}{\|w\|}. \end{aligned}$$

Koristeći nejednakost trokuta

$$\|u - u_h\| \leq \|u - v\| + \|u_h - v\|,$$

te zbog proizvoljnosti $v \in V_h$, izlazi tvrdnja. \square

Napomena 1.9 Uočimo da se u slučaju $a(\cdot, \cdot) = a_h(\cdot, \cdot)$, i $F_h(\cdot) = \langle F, \cdot \rangle$, Prva Strangova lema svodi na Céa-inu lemu, no konstanta više nije optimalna. To je posljedica toga što u dokazu nismo pretpostavljali da je bilinearna forma a_h dobro definirana na čitavom V .

U dosadašnjim razmatranjima pretpostavljali smo da je aproksimativna metoda konformna, što znači da je $V_h \subset V$, odnosno da aproksimativno rješenje tražimo u prostoru u kojem se nalazi i egzaktno rješenje. Za metodu kažemo na je nekonformna ako uvjet $V_h \subset V$ nije zadovoljen. Nekonformnu aproksimaciju koristimo tipično onda kada funkcije iz prostora aproksimativnih rješenja nemaju glatkoću koja se zahtjeva od funkcija iz V .

Diskretna zadaća u nekonformnoj aproksimaciji općenito će imati oblik (P_{hh}) . Sljedeće pretpostavke će osigurati da je zadaća (P_{hh}) dobro postavljena:

Pretpostavke (A_h) :

- V_h je konačnodimenzionalni prostor s normom $\|\cdot\|_h$;
- $a_h: (V + V_h) \times (V + V_h) \rightarrow \mathbb{R}$ je bilinearna forma;
- $\exists M^* > 0$, neovisno o h , takvo da $\forall u, v \in V + V_h \quad |a_h(u, v)| \leq M \|u\|_h \|v\|_h$ (ograničenost);
- $\exists \alpha^* > 0$, neovisno o h , takvo da $\forall v \in V_h \quad a_h(v, v) \geq \alpha \|v\|_h^2$ (koercitivnost);
- F_h je linearan funkcional na V_h .

Prostor $V + V_h$ definira se na uobičajen način:

$$V + V_h = \{w = v_1 + v_2 : v_1 \in V, v_2 \in V_h\}.$$

Pretpostavke (A_h) evidentno osiguravaju jedinstvenu rješivost diskretne zadaće (P_{hh}) , čak i kad prostor $V + V_h$ zamijenimo s V_h . Pretpostavka da je bilinearna forma definirana i ograničena na širem prostoru $V + V_h$ bit će korištena u sljedećoj ocjeni greške aproksimacije.

Teorem 1.14 (Druga Strangova lema) Neka su ispunjene pretpostavke (A) i (A_h) te neka je $u \in V$ rješenje zadaće (P) i $u_h \in V_h$ rješenje zadaće (P_{hh}) . Tada vrijedi

$$\|u - u_h\|_h \leq \left(1 + \frac{M^*}{\alpha^*}\right) \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h + \frac{1}{\alpha^*} \sup_{0 \neq w \in V_h} \frac{|a_h(u, w) - F_h(w)|}{\|w\|_h}. \quad (1.78)$$

Dokaz. Neka je $v \in V_h$ proizvoljan element. Prema pretpostavkama (A_h) imamo

$$\begin{aligned} \alpha^* \|u_h - v\|_h^2 &\leq a_h(u_h - v, u_h - v) \\ &= a_h(u - v, u_h - v) + (F_h(u_h - v) - a_h(u, u_h - v)) \\ &\leq M^* \|u - v\|_h \|u_h - v\|_h + |a_h(u, u_h - v) - F_h(u_h - v)|, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} \alpha^* \|u_h - v\|_h &\leq M^* \|u - v\|_h + \frac{|a_h(u, u_h - v) - F_h(u_h - v)|}{\|u_h - v\|_h} \\ &\leq M^* \|u - v\|_h + \sup_{0 \neq w \in V_h} \frac{|a_h(u, w) - F_h(w)|}{\|w\|_h}. \end{aligned}$$

Rezultat sada slijedi iz nejednakosti trokuta

$$\|u - u_h\|_h \leq \|u - v\|_h + \|u_h - v\|_h. \quad \square$$

Napomena 1.10 U Drugoj Strangovoj lemi kao greška konzistencije pojavljuje se residual – greška koju dobivamo kada u aproksimativnu varijacijsku formulaciju uvrstimo točno rješenje u . Analognu ocjenu greške aproksimacije možemo izvesti, na posve isti način, i u konformnom slučaju, ako pretpostavimo da je aproksimativna bilinearna forma definirana i ograničena na širem prostoru $V + V_h$.

1.10 Dodatak. Lax-Milgramova lema

Teorem poznat pod nazivom *Lax-Milgramova lema* predstavlja osnovni egzistencijalni rezultat na kojem se bazira teorija slabih rješenja eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U osnovi se radi o generalizaciji Rieszovog teorema o reprezentaciji linearnog funkcionala, no zbog važnosti rezultata donosimo nekoliko njegovih varijanti. Premda se posve analogna teorija može zasnovati na kompleksnim prostorima mi ćemo, radi jednostavnosti, promatrati isključivo realne prostore funkcija. Čitatelj zainteresiran za *kompleksnu* teoriju može pogledati npr. [?].

U ovoj sekciji V označava realan Hilbertov prostor (vidi npr. Kurepa [3]). V je dakle linearan (vektorski) prostor u kome postoji skalarni produkt koji ćemo jednostavno označavati s (\cdot, \cdot) . On generira normu po formuli

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

i u toj normi je V potpun prostor (u njemu je svaki Cauchyjev niz konvergentan, [3]). Uz svaki normirani prostor V redovito promatramo i linearan prostor V' koji se sastoji od svih linearnih i neprekidnih funkcionala nad V . Budući da je neprekidnost linearnog funkcionala ekvivalentna njegovoj ograničenosti ([3]), prostor V' je normiran prostor s normom

$$\|F\| = \sup_{u \neq 0} \frac{F(u)}{\|u\|}.$$

Pri tome ćemo djelovanje funkcionala $F \in V'$ na element $u \in V$ označavati funkcijski s $F(u)$ ili kao $\langle F, u \rangle$, pri čemu je druga oznaka uobičajenija u funkcionalnoj analizi. Prostor V' je potpun (Banachov) čak i kada normirani prostor V to nije (vidi [3], Teorem 2, str. 60).

Definicija 1.4 Preslikavanje $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilinearna forma (ili bilinearni funkcional) ako je linearan funkcional u svakoj varijabli zasebno. Preciznije,

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V, \quad a(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w), \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V, \quad a(u, \alpha v + \beta w) &= \alpha a(u, v) + \beta a(u, w). \end{aligned}$$

Definicija 1.5 Bilinearna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je ograničena ako postoji konstanta M , takva da vrijedi

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V. \quad (1.79)$$

Neprekidnost bilinearne forme je ekvivalentna s ograničenosti ([3], Propozicija 8, str 73). Sljedeće svojstvo je fundamentalno za Lax-Milgramovu lemu.

Definicija 1.6 Bilinearna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je koercitivna ako postoji konstanta $\alpha > 0$ takva da je

$$\forall v \in V, \quad \alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v). \quad (1.80)$$

Definicija 1.7 Bilinearna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je simetrična ako vrijedi

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = a(v, u). \quad (1.81)$$

Napomena 1.11 *Neka je V Hilbertov prostor s normom $\|\cdot\|$. Tada svaka simetrična bilinearna, ograničena i koercitivna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ predstavlja jedan skalarni produkt na V i formulom*

$$\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$$

je dobro definirana norma ekvivalentna s $\|\cdot\|$. Tu normu nazivamo energetska norma.

Vidjeli smo da se eliptička rubna zadaća može preformulirati u obliku varijacijska zadaće sljedećeg oblika:

$$\begin{cases} \text{naći } u \in V \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (1.82)$$

Funkciju v iz varijacijske jednadžbe nazivamo test funkcija.

Sljedeća lema pokazuje da u slučaju simetrične bilinearne forme varijacijskoj jednadžbi (1.82) možemo pridružiti jedan problem minimizacije kome je ona ekvivalentna. Pokazuje se da je (1.82) Eulerova jednadžba za pripadni problem minimizacije. Takva karakterizacija je vrlo korisna jer je jednostavno pokazati da problem minimizacije ima jedinstveno rješenje.

Eliptičke parcijalne diferencijalne jednadžbe, pa onda i pripadne varijacijske zadaće, modeliraju ravnotežne fizikalne procese. Ravnotežna konfiguracija je u principu ona u kojoj je pripadna energija minimalna, tako da pridruženi funkcional ima redovito interpretaciju *energije sustava*.

Lema 1.5 Neka je V linearan prostor i $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simetrična, pozitivna bilinearna forma, tj. $a(v, v) > 0$ za svako $0 \neq v \in V$. Zadan je još linearan funkcional $F: V \rightarrow \mathbb{R}$. Tada funkcional

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle$$

dostiže svoj minimum na V u točki $u \in V$ ako i samo ako vrijedi

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle. \quad (1.83)$$

Štoviše, (1.83) ima najviše jedno rješenje.

Dokaz. Za $u, v \in V$ i $t \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - \langle F, u + tv \rangle \\ &= J(u) + t[a(u, v) - \langle F, v \rangle] + \frac{1}{2}t^2a(v, v). \end{aligned}$$

Ako $u \in V$ zadovoljava (1.83), onda za $t = 1$ imamo

$$J(u + v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) > J(u), \quad \forall v \in V, v \neq 0.$$

Prema tome, $u \in V$ je jedinstvena točka minimuma. Obratno, neka J ima minimum u točki $u \in V$. Tada derivacija funkcije $t \mapsto J(u + tv)$, za svako $v \in V$, mora biti nula u $t = 0$ (radi se o kvadratnoj funkciji). Iz

$$\left. \frac{d}{dt} J(u + tv) \right|_{t=0} = a(u, v) - \langle F, v \rangle$$

izlazi tvrdnja. \square

Sada dokazujemo verziju Lax-Milgramove leme koja se bazira na simetriji bilinearne forme. Štoviše, možemo dokazati jednu generalizaciju koja se primjenjuje na *varijacijske nejednakosti*.

Teorem 1.15 (Lax-Milgramova lema za konveksan skup). Neka je $K \subset V$ neprazan zatvoren i konveksan podskup Hilbertovog prostora V te neka je $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simetrična bilinearna, ograničena i koercitivna forma. Tada za svako $F \in V'$ minimizacijska zadaća

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v), \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle, \quad (1.84)$$

ima jedinstveno rješenje $u \in K$,

Dokaz. 1) Funkcional J je ograničen odozdo:

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1}{2}\alpha\|v\|^2 - \|F\|\|v\| \\ &= \frac{1}{2\alpha}(\alpha\|v\| - \|F\|)^2 - \frac{1}{2\alpha}\|F\|^2 \geq -\frac{1}{2\alpha}\|F\|^2. \end{aligned}$$

2) Neka je $c_1 = \inf\{J(v): v \in K\}$. Po definiciji infimuma možemo naći niz (v_n) (tzv. minimizirajući niz) takav $J(v_n) \rightarrow c_1$ kada $n \rightarrow \infty$. Koristeći bilinearne forme dobivamo

$$\begin{aligned} \alpha\|v_n - v_m\|^2 &\leq a(v_n - v_m, v_n - v_m) \\ &= 2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) - a(v_n + v_m, v_n + v_m) \\ &= 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \\ &\leq 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8c_1. \end{aligned}$$

U zadnjoj ocjeni smo koristili konveksnost skupa K koja daje $(v_n + v_m)/2 \in V$. Sada evidentno desna strana teži u nulu kada $n, m \rightarrow \infty$ pa izlazi da je (v_n) Cauchyjev niz. Zbog potpunosti prostora, postoji $v \in V$ takav da je $u = \lim v_n$. Zatvorenost skupa K povlači da je $u \in K$, a neprekidnost funkcionala J daje

$$J(u) = \lim J(v_n) = \inf_{v \in K} J(v).$$

3) Jedinstvenost. Pretpostavimo da su u_1 i u_2 rješenja problema minimizacije. Niz $u_1, u_2, u_1, u_2, \dots$ je evidentno minimizirajući niz. Prema dokazanom, on je Cauchyjev, što je moguće jedino ako je $u_1 = u_2$. \square

Napomena 1.12 U dokazu smo koristili jednakost paralelograma

$$2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) = a(v_n - v_m, v_n - v_m) + a(v_n + v_m, v_n + v_m)$$

koja slijedi iz bilinearne forme.

Napomena 1.13 U konačnodimenzionalnom prostoru, umjesto koercitivnosti u Teoremu 1.15 je dovoljno zahtijevati da forma zadovoljava strogu pozitivnost

$$\forall v \in V, v \neq 0, \quad a(v, v) > 0.$$

Koercitivnost slijedi iz kompaktnosti jedinične kugle u konačno dimenzionalnom prostoru.

U specijalnom slučaju $K = V$ problem minimizacije (1.84) je prema Lemi 1.5 ekvivalentan varijacijskoj zadaći (1.83) i stoga imamo ovaj rezultat:

Teorem 1.16 (Lax-Milgramova lema. Simetričan slučaj) Neka je V Hilbertov prostor i $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna, ograničena, simetrična i koercitivna forma. Tada za svako $F \in V'$ problem

$$\begin{cases} \text{Naći } u \in V \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle \end{cases} \quad (1.85)$$

ima jedinstveno rješenje $u \in V$ koje je ujedno rješenje minimizacijske zadaće (1.84) uz $K = V$.

Teorem 1.16 možemo primijeniti na skalarni produkt u V i time dobivamo:

Teorem 1.17 (Rieszov teorem o reprezentaciji linearnog funkcionala) Za svako $F \in V'$ postoji jedinstveni element $u_F \in V$ sa svojstvom

$$\forall v \in V, \quad (u_F, v) = \langle F, v \rangle.$$

Pri tome je $\|F\|_{V'} = \|u_F\|_V$.

Za kompleksan Hilbertov prostor vidi Teorem 4, str. 112 u [3].

Teorem 1.18 (Projekcija na zatvoren konveksan skup) Neka je $K \subset V$ neprazan zatvoren i konveksan podskup Hilbertovog prostora V . Za svako $u \in V$ postoji jedinstven element $u_K \in K$ takav da je

$$\|u - u_K\| = \min_{v \in K} \|u - v\|. \quad (1.86)$$

Dokaz. Primijenimo Teorem 1.15 na

$$J(v) = \frac{1}{2}(v, v) - (u, v)$$

i definirajmo $u_K \in K$ kao jedinstveno rješenje problema minimizacije

$$J(u_K) = \min_{v \in K} J(v).$$

Budući da je

$$\frac{1}{2}\|u - v\|^2 = J(v) + \frac{1}{2}\|u\|^2$$

imamo

$$\frac{1}{2}(\min_{v \in K} \|u - v\|)^2 = \min_{v \in K} J(v) + \frac{1}{2}\|u\|^2 = J(u_K) + \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}\|u - u_K\|^2,$$

i time dobivamo da je u_K rješenje zadaće (1.86). Jedinственost slijedi iz jedinstvenosti minimuma funkcionala J . \square

Teorem 1.18 pokazuje da je dobro definirano preslikavanje $P_K: V \rightarrow K$ po formuli $P_K(u) = u_K$. Uočimo da općenito P_K nije linearan operator.

Lema 1.5 daje Eulerovu jednadžbu za problem minimizacije na čitavom prostoru V . Analogan rezultat možemo dokazati i za problem minimizacije na zatvorenom konveksnom skupu $K \subset V$. U tom je slučaju minimum karakteriziran pomoću varijacijske nejednakosti.

Lema 1.6 Neka je V linearan prostor i $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simetrična, pozitivna bilinearna forma, tj. $a(v, v) > 0$ za svako $0 \neq v \in V$. Zadan je još linearan funkcional $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ i neprazan zatvoren i konveksan podskup $K \subset V$. Tada funkcional

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle$$

dostiže svoj minimum na K u točki $u \in K$ ako i samo ako vrijedi

$$\forall v \in K, \quad a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle. \quad (1.87)$$

Štoviše, (1.87) ima najviše jedno rješenje.

Dokaz. Za $u, v \in K$ i $t \in [0, 1]$ znamo da je $tv + (1 - t)u = u + t(v - u) \in K$ te vrijedi

$$J(tv + (1 - t)u) = J(u) + t[a(u, v - u) - \langle F, v - u \rangle] + \frac{1}{2}t^2a(v - u, v - u). \quad (1.88)$$

1. Ako $u \in K$ zadovoljava (1.87), onda se iz (1.88) vidi da je

$$J(tv + (1 - t)u) > J(u), \quad \forall v \in K, v \neq u, \quad \forall t \in (0, 1],$$

što pokazuje da je u točka strogog minimuma funkcionala. Budući da je minimum strogi, on je i jedinstven, a onda i zadaća (1.87) može imati najviše jedno rješenje.

2. Neka J ima minimum na K u točki $u \in K$. Tada je za proizvoljno $v \in K$ i $t \in [0, 1]$, $J(tv + (1 - t)u) \geq J(u)$ i prema (1.88) za svako $t \in (0, 1]$ vrijedi

$$[a(u, v - u) - \langle F, v - u \rangle] + \frac{t}{2}a(v - u, v - u) \geq 0.$$

Prijelazom na limes kada $t \rightarrow 0+$ dobivamo (1.87). \square

Napomena 1.14 (*Stampacchia*) Kombinacijom Teorema 1.15 i Leme 1.6 dolazimo do zaključka da u uvjetima Teorema 1.15 varijacijska nejednakost (1.87) ima jedinstveno rješenje i da je to rješenje minimum funkcionala J na skupu K .

Posljedica 1.1 Neka je K neprazan zatvoren i konveksan podskup Hilbertovog prostora V i $P_K: V \rightarrow K$ pripadni projektor, definiran prema Teoremu 1.18. Tada je $u_K = P_K(u)$ ako i samo ako vrijedi

$$\begin{cases} u_K \in K \\ \forall v \in K, \quad (u - u_K, v - u_K) \leq 0. \end{cases} \quad (1.89)$$

Štoviše, za svako $u, v \in V$ vrijedi

$$\|P_K(u) - P_K(v)\| \leq \|u - v\|. \quad (1.90)$$

Dokaz. U Teoremu 1.18 je dokazano da je $u_K = P_K(u)$ ako i samo ako je u_K minimum funkcionala $J(v) = a(v, v)/2 - \langle F, v \rangle$ na skupu K , gdje je $a(w, v) = (w, v)$ i $\langle F, v \rangle = (u, v)$. Prema Lemi 1.6 u_K je traženi minimum ako i samo ako zadovoljava

$$\forall v \in K, \quad (u_K, v - u_K) \geq (u, v - u_K),$$

odakle slijedi (1.89).

Da bismo dokazali (1.90) uzmimo $u, v \in V$ i napišimo karakterizacije projektor: za sve $w \in K$

$$(u - P_K(u), w - P_K(u)) \leq 0, \quad (v - P_K(v), w - P_K(v)) \leq 0.$$

Pogodnim izborom funkcije $w \in K$ u obje jednačbe dobivamo:

$$(u - P_K(u), P_K(v) - P_K(u)) \leq 0, \quad (v - P_K(v), P_K(u) - P_K(v)) \leq 0.$$

Zbrajanjem i reorganizacijom izraza dobivamo

$$(P_K(u) - P_K(v), P_K(u) - P_K(v)) \leq (P_K(u) - P_K(v), u - v)$$

odakle slijedi tvrdnja. \square

Posljedica 1.2 Neka je K zatvoren potprostor Hilbertovog prostora V i $P_K: V \rightarrow K$ pripadni projektor, definiran prema Teoremu 1.18. Tada je $u_K = P_K(u)$ ako i samo ako vrijedi

$$\begin{cases} u_K \in K \\ \forall v \in K, \quad (u - u_K, v) = 0. \end{cases} \quad (1.91)$$

Štoviše, operator P_K je linearan.

Dokaz je evidentan i izlazi iz činjenice da test funkciju u (1.89) možemo uzeti u obliku $v = u_K \pm w$, gdje je $w \in K$ proizvoljan element.

Da bismo dokazali Lax-Milgramovu lemu za nesimetrične ograničene i koercitivne bilinearne forme moramo se poslužiti Rieszovim teoremom o reprezentaciji funkcionala na Hilbertovom prostoru i njegovom generalizacijom na bilinearne forme.

Prvo se prisjetimo da svakom bilinearnoj i ograničenoj formi možemo pridružiti jedinstven neprekidan linearan operator.

Lema 1.7 Neka je V Hilbertov prostor sa skalarnim produktom (\cdot, \cdot) i $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna ograničena forma. Tada postoji jedinstveni ograničeni linearni operator $A: V \rightarrow V$ takav da je

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = (Au, v).$$

Dokaz. Primjenom Rieszovog teorema o reprezentaciji funkcionala (Teorem 1.17) za svako $u \in V$ možemo naći jedinstveni element $A(u) \in V$ takav da je $a(u, v) = (A(u), v)$ za svako $v \in V$. Time je definiran operator $u \mapsto A(u)$ koji je linearan zbog bilinearne forme. Iz ograničenosti bilinearne forme slijedi

$$|(Au, v)| = |a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|,$$

i time $\|A\| \leq M$. \square

Nadalje, iz svojstva koercitivnosti bilinearne forme dobivamo

$$\forall u \in V, \quad (Au, u) \geq \alpha\|u\|^2, \quad (1.92)$$

pa primjenom Schwarzove nejednakosti slijedi

$$\forall u \in V, \quad \|Au\| \geq \alpha\|u\|. \quad (1.93)$$

Oдавde je jasno da je operator A injektivan i ako pokažemo da je *surjektivan* iz (1.93) će slijediti da je ograničen te $\|A^{-1}\| \leq 1/\alpha$.

Iz (1.93) slijedi da je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren prostor. Zaista, neka je $f \in V$ takav da postoji niz $v_n \in V$ takav da $Av_n \rightarrow f$ kada $n \rightarrow \infty$. Niz (Av_n) je konvergentan pa je i Cauchyjev, a zbog (1.93) je i niz (v_n) Cauchyjev. Potpunost prostora V osigurava da niz (v_n) konvergira prema nekom $v \in V$, a neprekidnost (ograničenost) operatora A daje da niz (Av_n) konvergira prema Av . Zbog jedinstvenosti limesa je $f = Av$ i time je zatvorenost slike $\mathcal{R}(A)$ dokazana.

Pokažimo da je $\mathcal{R}(A) = V$. U suprotnom bismo prema Posljedici 1.2 mogli naći netrivialan vektor $v \in V$ okomit na $\mathcal{R}(A)$, tj.

$$(Au, v) = 0 \quad \forall u \in V.$$

No zbog (1.92) izlazi $v = 0$, što je kontradikcija te zaključujemo da je operator A surjektivan. Sada se lako dokazuje

Teorem 1.19 (Lax-Milgramova lema) Neka je V Hilbertov prostor i $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna, ograničena i koercitivna forma. Tada za svako $F \in V'$ problem

$$\begin{cases} \text{naći } u \in V \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle \end{cases} \quad (1.94)$$

ima jedinstveno rješenje $u \in V$ i preslikavanje $F \mapsto u$ je neprekidno sa V' u V .

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$ linearan operator pridružen bilinearnoj formi a . Zadaća (1.94) se svodi na jednadžbu

$$Au = f,$$

gdje je $f \in V$ element definiran po Rieszovom teoremu s $\langle F, v \rangle = (f, v)$. Prema dokazanom operator A je neprekidna bijekcija, pa stoga zadaća ima jedinstveno rješenje. Nadalje, iz (1.93) slijedi $\|u\| \leq \|f\|/\alpha$. \square

Ovaj se dokaz lako generalizira na varijacijske zadaće u kojima se prostor u kome se traži rješenje i prostor test funkcija razlikuju. Neka su V i W dva Hilbertova prostora i $a: W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma sa sljedećim svojstvima:

$$\exists M > 0, \forall w \in W, \forall v \in V, \quad |a(w, v)| \leq M\|w\|_W\|v\|_V \quad (1.95)$$

$$\exists \alpha > 0, \forall w \in W, \quad \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{a(w, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha\|w\|_W, \quad (1.96)$$

$$\forall v \in V, v \neq 0, \quad \sup_{w \in W} a(w, v) > 0. \quad (1.97)$$

Za proizvoljno $F \in V'$ imamo varijacijsku zadaću:

$$\begin{cases} \text{naći } u \in W \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle \end{cases} \quad (1.98)$$

Teorem 1.20 (Nečas) Neka su V i W dva Hilbertova prostora i $a: W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma koja zadovoljava (1.95), (1.96) i (1.97). Tada za svako $F \in V'$ problem (1.98) ima jedinstveno rješenje $u \in W$ za koje vrijedi

$$\|u\|_W \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}. \quad (1.99)$$

Dokaz. Postoji linearan i neprekidan operator $A: W \rightarrow V$ takav da je $a(w, v) = (Aw, v)$ za sve $w \in W$ i $v \in V$, te zbog (1.95) vrijedi $\|Aw\|_V \leq M\|w\|_W$. Analogno, postoji jedinstveni element $f \in V$ takav da je $\langle F, v \rangle = (f, v)$. Time zadaća (1.98) postaje ekvivalentna jednadžbi $Aw = f$ u prostoru V .

1. Operator A je injektivan jer iz (1.96) slijedi $\|Aw\| \geq \alpha\|w\|$ za svako $w \in W$.
2. Iz te relacije izlazi, kao ranije, da je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren prostor.
3. Iz (1.97) slijedi da je jedini element okomit na $\mathcal{R}(A)$ nulvektor, pa je stoga $\mathcal{R}(A) = V$.

Time su egzistencija i jedinstvenost dokazani, a ocjena (1.99) slijedi lako iz točke 1. \square

Da bismo dokazali nesimetričnu verziju Lax-Milgramove leme za konveksan skup preba nam Banachov teorem o fiksnoj točki:

Teorem 1.21 (Banach) Neka je (X, d) potpun metrički prostor i $S: X \rightarrow X$ preslikavanje sa svojstvom da postoji konstanta $L < 1$ takva da je

$$\forall u, v \in X, \quad d(S(u), S(v)) \leq Ld(u, v).$$

Tada S ima jedinstvenu fiksnu točku, $u = S(u)$.

Za dokaz vidi [?], Teorem 8, str 131.

Teorem 1.22 (Lax-Milgramova lema za konveksan skup - nesimetrični slučaj) Neka je V Hilbertov prostor i $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna, ograničena i koercitivna forma, te neka je $K \subset V$ neprazan, zatvoren i konveksan skup. Tada za svako $F \in V'$ problem

$$\begin{cases} \text{naći } u \in K \\ \forall v \in K, \quad a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle \end{cases} \quad (1.100)$$

ima jedinstveno rješenje $u \in K$.

Dokaz.

1. *Jedinstvenost.* Neka su $u_1, u_2 \in K$ dva rješenja varijacijske nejednakosti (1.100). Imamo:

$$a(u_1, v - u_1) \geq \langle F, v - u_1 \rangle, \quad a(u_2, v - u_2) \geq \langle F, v - u_2 \rangle.$$

Odabirom test funkcije slijedi

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq \langle F, u_2 - u_1 \rangle, \quad a(u_2, u_1 - u_2) \geq \langle F, u_1 - u_2 \rangle.$$

Zbrajanjem se desne strane krata pa imamo

$$0 \leq a(u_1, u_2 - u_1) + a(u_2, u_1 - u_2) = -a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq -\alpha \|u_1 - u_2\|^2$$

gdje smo iskoristili koercitivnost. Odavdje slijedi $u_1 = u_2$.

2. *Egzistencija.* Prijedimo na operatorsku formulaciju zadaće. Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$ operator pridružen bilinearnoj formi $a: a(u, v) = (Au, v)$ za sve $u, v \in V$; neka je $f \in F$ reprezentacija funkcionala $F \in V'$: $\langle F, v \rangle = (f, v)$. Sada se zadaća (1.100) svodi na

$$\forall v \in K, \quad (Au - f, v - u) \geq 0. \quad (1.101)$$

Odaberimo proizvoljan $\rho > 0$ i zapišimo (1.101) u obliku

$$\forall v \in K, \quad (u - \rho(Au - f) - u, v - u) \leq 0. \quad (1.102)$$

Usporedimo li (1.102) s karakterizacijom (1.89) projekcije na konveksan skup K dobivamo da se (1.102) ekvivalentno može zapisati u obliku:

$$u = P_K(u - \rho(Au - f)). \quad (1.103)$$

Definirajmo (nelinearni) operator $W_\rho: V \rightarrow V$ formulom $W_\rho(u) = P_K(u - \rho(Au - f))$ i pokažimo da je za dovoljno malo ρ on kontrakcija. Zaista, za $u_1, u_2 \in V$, koristeći (1.90) (P_K je kontrakcija) imamo

$$\begin{aligned} \|W_\rho(u_1) - W_\rho(u_2)\|^2 &= \|P_K(u_1 - \rho(Au_1 - f)) - P_K(u_2 - \rho(Au_2 - f))\|^2 \\ &\leq \|(u_1 - \rho(Au_1 - f)) - (u_2 - \rho(Au_2 - f))\|^2 \\ &= \|(u_1 - u_2) - \rho A(u_1 - u_2)\|^2 \\ &= \|u_1 - u_2\|^2 + \rho^2 \|A(u_1 - u_2)\|^2 - 2\rho(u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)) \\ &\leq \|u_1 - u_2\|^2(1 + \rho^2 \|A\|^2 - 2\rho\alpha). \end{aligned}$$

U zadnjem koraku smo iskoristili koercitivnost. Sad je jasno da za dovoljno malo $\rho > 0$ možemo postići

$$1 + \rho^2 \|A\|^2 - 2\rho\alpha < 1;$$

dovoljno je uzeti $0 < \rho < 2\alpha/\|A\|^2$. Time je prslkavanje W_ρ kontrakcija i po Teoremu 1.21 ima jedinstvenu fiksnu točku u : $u = W_\rho(u) = P_K(u - \rho(Au - f))$. Time je egzistencija rješenja dokazana. \square

Pogledajmo sada primjer zadaće:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{u } \Omega \quad (1.104)$$

$$u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \geq g \quad \text{na } \partial\Omega \quad (1.105)$$

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - g\right) = 0 \quad \text{s.s. na } \Omega. \quad (1.106)$$

Uvedim skup

$$K = \{v \in H^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ na } \partial\Omega\}.$$

Skup K je zatvoren (neprekidnost operatora traga) i konveksan potskup od $V = H^1(\Omega)$. Za svako $v \in K$ imamo

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u)v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

te parcijalnom integracijom

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Posebno za $v = u \in K$ imamo

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} u \, dS + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u + u^2) \, dx = \int_{\Omega} f u \, dx$$

i oduzimanjem

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla(v - u) + u(v - u)) \, dx = \int_{\Omega} f(v - u) \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(v - u) \, dS.$$

Koristeći (1.105) i (1.106) dobivamo

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(v - u) \, dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v - g u \, dS \geq \int_{\partial\Omega} g(v - u) \, dS.$$

Time dolazimo do varijacijske nejednadžbe: Naći $u \in K$ takvo da je

$$\forall v \in K, \quad a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle, \quad (1.107)$$

gdje je

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx, \quad \langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v dS.$$

Uz pretpostavke $f \in L^2(\Omega)$ i $g \in L^2(\partial\Omega)$ taj problem evidentno zadovoljava uvjete Teorema 1.22 i ima jedinstveno rješenje. Pokažimo da je to slabo rješenje dobra generalizacija klasičnog rješenja.

Odaberimo u varijacijskoj nejednadžbi $v = u + w$, gdje je $w \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tada je

$$\forall w \in \mathcal{D}(\Omega), \quad a(u, w) \geq \int_{\Omega} f w dx.$$

Oдавdje se lako dokazuje da je diferencijalna jednadžba (1.104) zadovoljena skoro svuda. Sada parcijalnom integracijom iz diferencijalne jednadžbe ponovo možemo izvesti

$$a(u, v - u) = \int_{\Omega} f(v - u) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(v - u) dS.$$

Iskoristimo li varijacijsku nejednakost, dobivamo

$$\int_{\Omega} f(v - u) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(v - u) dS \geq \langle F, v - u \rangle$$

odnosno

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - g \right) (v - u) dS \geq 0.$$

Ovdje, uzimajući $v = u + w$, $w \geq 0$ na $\partial\Omega$ prvo dobivamo

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - g \geq 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Oдавde i zbog $u \geq 0$ na $\partial\Omega$, uz izbor $v = u/2$, dobivamo

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - g \right) = 0 \quad \text{s.s. na } \Omega.$$

Time je u potpunosti dokazano da je zadaća (1.107) generalizacija zadaće (1.104)–(1.106).

1.11 Zadaci

1. Dokažite da za svakih n brojeva a_1, \dots, a_n vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n |a_i|^2. \quad (1.108)$$

Uputa: Treba iskoristiti konveksnost kvadratne funkcije i indukcijom po n dokazati

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i| \right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i|^2.$$

Ta se nejednakost zove *Jensenova* i vrijedi za svaku konveksnu funkciju $f(x)$, dok smo je mi iskazali samo za $f(x) = x^2$. Generalizirajte.

2. Dokažite da je s (1.19) dana jedna polunorma na $H^1(\Omega)$.
3. Neka je prostor V definiran s (1.32). Pokažite da je $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ norma na V , ekvivalentana s $H^1(\Omega)$ normom.
4. Pokažite da je rješenje varijacijske zadaće (1.33), koje je klase $C^2(\overline{\Omega})$, ujedno klasično rješenje zadaće (1.30), ako je zadovoljen uvjet kompatibilnosti (1.31). Koja je interpretacija slabog rješenja ako uvjet kompatibilnosti nije zadovoljen?
5. Dokažite da je dovoljno glatko rješenje varijacijske zadaće (1.33) ujedno i klasično rješenje zadaće (1.30) samo ako je zadovoljen uvjet kompatibilnosti (1.31).
6. Definirajte slabo rješenje zadaće s Robinovim rubnim uvjetom

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{u } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u = g & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uz koje uvjete na $\alpha(\mathbf{x})$ možemo primijeniti Lax-Milgramovu lemu?

Bibliografija

- [1] Jean-Luc Guermond Alexandre Ern. *Éléments finis: théorie, applications, mise en oeuvre*, volume 36 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [2] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.
- [3] Svetozar Kurepa. *Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora*. Školska knjiga, Zagreb, 1990.