

1

Uvod. Jednodimenzionalan primjer

U uvodnom poglavlju želimo objasniti metodu konačnih elemenata na vrlo jednostavnoj jednodimenzionalnoj rubnoj zadaći. Jednostavnost zadaće omogućava da se bez tehničkih poteškoća izlože osnovni elementi matematičke teorije. Nedostatak je u tome što nije moguće prezentirati sve elemente važne za implementaciju metode u punoj općenitosti. Pored opisa metode cilj nam je motivirati uvođenje prostora Soboljeva.

Neka je zadana funkcija $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Promatramo sljedeću zadaću: treba naći funkciju $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ koja zadovoljava

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f & \text{na } (0, 1) \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Iako rješenje zadaće (1.1) možemo izraziti jednostavnom formulom korisno je postaviti pitanje precizne definicije rješenja.

1.1 Varijacijska formulacija

Da bismo precizirali smisao rješenja moramo uvesti neke funkcijske prostore. Svi prostori koje ćemo uvesti imaju strukturu linearnog prostora u odnosu na uobičajeno zbrajanje funkcija i množenja skalarom, tako da to nadalje nećemo naglašavati.

Neka $\Omega \subset \mathbb{R}$ otvoren skup, a $\overline{\Omega}$ njegov zatvarač. Tada definiramo:

$C(\Omega)$ = prostor svih neprekidnih funkcija $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$C(\overline{\Omega})$ = prostor svih uniformno neprekidnih funkcija $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$C^k(\Omega)$ = prostor svih k -puta neprekidno derivabilnih funkcija $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$C^k(\overline{\Omega})$ = prostor funkcija $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ za koje je $\frac{d^j u}{dx^j} \in C(\overline{\Omega})$ za $j = 0, 1, \dots, k$.

Za zadano $f \in C(0, 1)$ funkciju $u \in C^2(0, 1) \cap C^1([0, 1])$ nazivamo **klasično rješenje** zadatke (1.1) ako zadovoljava rubne uvjete (1.1)₂, te ako diferencijalnu jednadžbu (1.1)₁ zadovoljava u svakoj točki $x \in (0, 1)$.

U fizikalnim promjenama funkcija f ne mora nužno biti neprekidna. Na primjer, moguće je imati na desnoj strani funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{za } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Što je rješenje zadatke (1.1) u tom slučaju? Ono evidentno nije funkcija iz $C^2(0, 1)$ već rješenje treba tražiti u prostoru funkcija koje imaju po dijelovima neprekidnu drugu derivaciju. U točki prekida desne strane, $x = 1/2$, druga derivacija ne mora biti definirana, i diferencijalna jednadžba u toj točki nije zadovoljena.

Ako idemo korak dalje, postavlja se pitanje koliko je moguće smanjiti glatkoću desne strane f , a da još uvijek možemo na smislen način definirati rješenje problema (1.1)? Odgovor je u varijacijskoj formulaciji rubne zadaća.

Neka je u klasično rješenje zadatke (1.1). Odaberimo funkciju $v \in C^1([0, 1])$ takvu da je $v(0) = 0$ i s njom pomnožimo jednadžbu (1.1)₁. Nakon integracije dobivamo

$$-\int_0^1 u''(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

Parcijalnom integracijom u prvom integralu dobivamo:

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Zbog $v(0) = 0$ i $u'(1) = 0$ izlazi

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in C^1([0, 1]) \text{ takvo da je } v(0) = 0.$$

Dobivena se jednadžba naziva **varijacijska** stoga što vrijedi za svako $v \in C^1([0, 1])$ takvo da je $v(0) = 0$.

Zapisat ćemo dobivenu varijacijsku zadaću u malo apstraktnijoj formi. Prvo uvodimo linearan prostor funkcija

$$V = \{\phi \in C^1([0, 1]): v(0) = 0\},$$

te funkcionalne

$$a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad F: V \rightarrow \mathbb{R}$$

definirane formulama:

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx, \quad (1.2)$$

$$F(v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx. \quad (1.3)$$

Evidentno je F linearan funkcional, odnosno zadovoljava

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V, \quad F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v).$$

Funkcional $a(\cdot, \cdot)$ je **bilinearna forma** (ili bilinearni funkcional), što znači da je linearan funkcional u svakoj varijabli zasebno. Preciznije,

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V, \quad a(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w), \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V, \quad a(u, \alpha v + \beta w) &= \alpha a(u, v) + \beta a(u, w). \end{aligned}$$

Varijacijska formulacija zadatice (1.1) sada prima oblik

$$\begin{cases} \text{naći } u \in V \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (1.4)$$

Funkciju v iz varijacijske jednadžbe nazivamo **test funkcija**.

Lema 1.1 Neka je $f \in C([0, 1])$ i $u \in C^2([0, 1])$ rješenje zadatice (1.4). Tada je u klasično rješenje zadatice (1.1).

Dokaz. Zbog pretpostavljene glatkoće u varijacijskoj jednadžbi možemo izvršiti parcijalnu integraciju.

$$\int_0^1 [(u'(x)v(x))' - u''(x)v(x)] dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in V. \quad (1.5)$$

Odaberemo li test funkciju $v \in V$ koja zadovoljava $v(0) = v(1) = 0$, dobivamo

$$\int_0^1 (u''(x) + f(x))v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C^1([0, 1]), v(0) = v(1) = 0.$$

Funkcija $w = u'' + f$ je iz $C([0, 1])$. Kada bi bila različita od nule, onda bi morao postojati interval $(x_0, x_1) \subset (0, 1)$ na kome je strogo pozitivna ili strogo

negativna. Uzmimo, b.s.o., da postoji jedan takav interval na kome je w strogo pozitivna i definirajmo test funkciju

$$v(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2(x - x_1)^2 & \text{za } x_0 < x < x_1 \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Kako je $v(0) = v(1) = 0$ dobivamo

$$\int_{x_0}^{x_1} w(x)v(x) dx = 0,$$

no budući da je podintegralna funkcija stogo pozitivna, dobili smo kontradikciju i zaključujemo da je nužno $w \equiv 0$. Time smo dokazali da je diferencijalna jednačba zadovoljena u svakoj točki $x \in (0, 1)$. Vratimo se sada u (1.5) gdje uzimamo proizvoljnu funkciju $v \in V$ i dobivamo

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 (u''(x) + f(x))v(x) dx = 0,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz do sada dokazanog. Kako je $v(0) = 0$, dovoljno je uzeti test funkciju koja zadovoljava $v(1) = 1$ da bismo zaključili da je $u'(1) = 0$; zbog $u \in V$, automatski je zadovoljeno $u(0) = 0$ i time su rubni uvjeti zadovoljeni. \square

Napomena 1.1 *Pokazali smo da varijacijska formulacija sadrži sve informacije o rubnoj zadaći kao i klasična. Pri tome se u varijacijskoj formulaciji javljaju samo derivacije prvog reda, što ju čini općenitijom od klasične.*

Napomena 1.2 *Dirchletov rubni uvjet, $u(0) = 0$, u varijacijskoj formulaciji je ugrađen u prostor V , pa se stoga naziva i esencijalni rubni uvjet. Neumannov rubni uvjet, $u'(1) = 0$, zadovoljen je implicitno samom varijacijskom jednačbom, pa ga nazivamo i prirodni rubni uvjet.*

Napomena 1.3 *Korisno je uvesti pojam nosača funkcije: to je zatvarač skupa na kojem je funkcija različita od nule. Oznaka je $\text{supp}(u)$, i ako je (a, b) domena funkcije $u(x)$, onda je*

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in (a, b) : u(x) \neq 0\}}.$$

Potez iznad skupa označava zatvarač. Nosač funkcije je stoga uvijek zatvoren skup i sadrži pojedine točke u kojima se funkcija poništava.

Funkcija ima kompaktan nosač ako je njen nosač kompaktan skup. (Da bi nosač bio kompaktan dovoljno je da je ograničen.) Prostori neprekidnih (neprekidno derivabilnih) funkcija s kompaktnim nosačem označavaju se slovom c : $C_c(a, b)$, $C_c^k(a, b)$ itd. Uočimo da ako funkcija definirana na otvorenom intervalu (a, b) i ima kompaktan nosač, onda ona postaje identički jednaka nuli na pozitivnoj udaljenosti od rubova intervala a i b .

Napomena 1.4 U dokazu Leme 1.1 dokazali smo i osnovnu lemu varijacijskog računa koja kaže da ako funkcija $w \in C(a, b)$ zadovoljava

$$\int_a^b w(x)v(x) dx = 0, \quad \forall v \in C_c^\infty(a, b),$$

onda je $w \equiv 0$. Ovdje je s $C_c^\infty(a, b)$ označen prostor svih beskonačno puta derivabilnih funkcija

$$C_c^\infty(a, b) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_c^k(a, b).$$

Lema 1.1 nam govori da je varijacijska zadaća (1.4) generalizacija rubne zadaće (1.1). Stoga rješenje zadaće (1.4) nazivamo **poopćeno** (ili **slabo**) rješenje zadaće (1.1). Slabo rješenje ima smisla za svaku funkciju f za koju je linearni funkcional (1.3) dobro definiran i neprekidan, što ćemo precizirati kasnije.

Varijacijska formulacija složenijih rubnih zadaća radi s na isti način, parcijalnom integracijom. Homogeni Dirichletovi rubni uvjeti se ugrađuju u prostor, a Neumannovi uvjeti su zadovoljeni implicitno.

Zadatak 1.1 *Nadite varijacijsku formulaciju ovih rubnih zadaća postavljenih na intervalu (a, b) :*

$$-u'' + cu = f, \quad u(a) = u(b) = 0, \quad (1.6)$$

$$-(ku')' + cu = f, \quad u(a) = 0, u'(b) + \alpha u(b) = 0, \quad (1.7)$$

$$-\varepsilon u'' + cu' + du = f, \quad u'(a) = u'(b) = 0. \quad (1.8)$$

Ovdje su c, d i f funkcije iz $C([a, b])$, $k \in C^1([a, b])$ i $\varepsilon > 0$. Pokažite da je svako dovoljno glatko rješenje varijacijske jednadžbe ujedno i klasično rješenje.

Rješenje. ad) (1.6). $V = \{u \in C^1([a, b]) : v(a) = v(b) = 0\}$; Za svako $v \in V$,

$$\int_a^b (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx;$$

ad) (1.7). $V = \{u \in C^1([a, b]) : v(a) = 0\}$; Za svako $v \in V$,

$$\int_a^b (k(x)u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)) dx + \alpha k(b)u(b)v(b) = \int_a^b f(x)v(x) dx;$$

ad) (1.8). $V = C^1([a, b])$; Za svako $v \in V$,

$$\int_a^b (\varepsilon u'(x)v'(x) + c(x)u'(x)v(x) + d(x)u(x)v(x)) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx.$$

Dirichletovi rubni uvjeti mogu biti nehomogeni (različiti od nule) i tada ih ne možemo ugraditi u prostor u kome biramo test funkcije jer bi time izgubio linearnost (postao bi afina mnogostrukost). Stoga se nehomogeni rubni uvjeti prvo homogeniziraju i na taj se način rubna zadaća svodi na rubnu zadaću s homogenim rubnim uvjetom.

Na primjer, u zadaći

$$-u'' + du = f, \quad u(0) = A, u(1) = B, \quad (1.9)$$

postavljenoj na $(0, 1)$, uveli bismo funkciju $w(x) = (B - A)x + A$, koja zadovoljava rubne uvjete. Traženu funkciju u napišemo kao $u(x) = U(x) + w(x)$, gdje sada funkcija U zadovoljava

$$-U'' + dU = f - dw, \quad U(0) = U(1) = 0.$$

Rubni uvjeti su time homogenizirani, a u jednadžbi se promijenila samo desna strana.

Zadatak 1.2 Homogenizirajte rubne uvjete u sljedećim zadaćama postavljenim na (a, b) :

$$\begin{aligned} -u'' + 3u &= f, & u(a) &= A, u(b) = B, \\ -(ku')' + cu &= f, & u(a) &= A, u(b) = B, (k(x) = 1 + x^2, c(x) = \cos(x)) \\ -u'' + u' + u &= f, & u(a) &= A, u'(b) = B. \end{aligned}$$

Nehomogeni Neumannov rubni uvjet nije potrebno homogenizirati.

Zadatak 1.3 Formirajte varijacijsku zadaću za

$$-u'' + u' + u = f, \quad x \in (a, b) \quad u'(a) = A, u'(b) = B.$$

Pokažite da je svako dovoljno glatko slabo rješenje ujedno i klasično rješenje.

Rješenje. $V = C^1([a, b])$; Za svako $v \in V$,

$$\int_a^b (\varepsilon u'(x)v'(x) + u'(x)v(x) + u(x)v(x)) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx + Bv(b) - Av(a).$$

1.2 Egzistencija rješenja varijacijske jednadžbe

Da bismo vidjeli pod kojim uvjetima varijacijska jednadžba (1.4) ima jedinstveno rješenje trebamo problem postaviti u okviru funkcionalne analize.

Prije svega, uočimo da je prostor V beskonačnodimenzionalan linearan prostor. Da bismo mogli koristiti standardne rezultate funkcionalne analize moramo postaviti zahtjev da je V potpun normiran prostor. To znači da je na V definirana

norma, koju ćemo označavati s $\|\cdot\|_V$, te da je u njemu svaki Cauchyjev niz konvergentan (potpunost). Funkcijski prostori koji su vezani uz linearne diferencijalne jednadžbe obično imaju strukturu potpunog unitarnog prostora. To je prostor u kojem je definiran skalarni produkt, kojeg označavamo s (\cdot, \cdot) , a pripadna norma je dana formulom $\|u\|_V = \sqrt{(u, u)}$. U toj normi prostor mora biti potpun.

Standardna terminologija funkcionalne analize je sljedeća: potpun normiran prostor naziva se **Banachov** prostor, a potpun unitaran prostor je **Hilbertov** prostor. Osnovne definicije i rezultati funkcionalne analize koji su nam potrebni dani su u Dodatku ??.

Dualni prostor prostora V je prostor svih linearnih i neprekidnih funkcionala $F: V \rightarrow \mathbb{R}$. To je linearan normiran prostor koji označavamo V' , a normu definiramo formulom

$$\|F\|_{V'} = \sup\{|F(v)|: v \in V, \|v\|_V \leq 1\}.$$

On je potpun čak ako V to nije.

Uobičajeno je primjenu funkcionala $F \in V'$ na nekom elementu označavati oštrim zagradama

$$F(v) = \langle F, v \rangle_{V', V}.$$

Oznake prostora se ispuštaju kad je jasno o kojim se prostorima radi. Uočimo još da je po definiciji dualne norme

$$|\langle F, v \rangle_{V', V}| \leq \|F\|_{V'} \|v\|_V. \quad (1.10)$$

Varijacijska formulacija linearne rubne zadaće prirodno se postavlja u Hilbertovom prostoru. Na osnovu Rieszovog teorema reprezentacije svaki linearan i neprekidan funkcional nad Hilbertovim prostorom može se prikazati kao skalarni produkt s nekim elementom prostora.

O bilinearnoj formi ćemo napraviti dvije pretpostavke: ograničenost i koercitivnost.

Definicija 1.1 *Kažemo da je bilinearna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena ako postoji konstanta M , takva da vrijedi*

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V. \quad (1.11)$$

Definicija 1.2 *Kažemo da je bilinearna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ koercitivna ako postoji konstanta $\alpha > 0$ takva da je*

$$\forall v \in V, \quad \alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v). \quad (1.12)$$

Kasnije ćemo dokazati ovaj teorem.

Teorem 1.1 (Lax-Milgramova lema) *Neka je V Hilbertov prostor i $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna, ograničena i koercitivna forma. Tada za svako $F \in V'$ problem (1.4) ima jedinstveno rješenje $u \in V$.*

Lax-Milgramova lema nam kaže sljedeće: ako želimo dokazati da varijacijska zadaća (1.4) ima jedinstveno rješenje dovoljno je provjeriti da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

1. Prostor V je Hilbertov;
2. $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilinearna forma;
3. $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ linearan funkcional;
4. $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ zadovoljava uvjet ograničenosti (1.11);
5. $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ zadovoljava uvjet koercitivnosti (1.12);
6. $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ zadovoljava uvjet neprekidnosti (1.10).

Napomena 1.5 * Ovdje želimo pokazati da su uvjeti Lax-Milgramove leme prirodni zahtjevi (s matematičke strane gledano) koje treba postaviti na elemente varijacijske jednadžbe (1.4).

Bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ definira jedinstven linearan operator $A: V \rightarrow V'$ pomoću formule

$$\forall u, v \in V, \quad \langle Au, v \rangle_{V', V} = a(u, v).$$

Stoga, zadaću (1.4) možemo zapisati u obliku operatorske jednadžbe

$$Au = F. \tag{1.13}$$

Problem (1.13) je dobro postavljen ili korektan ako ima jedinstveno rješenje u koje neprekidno ovisi o desnoj strani F . To znači da operator A mora biti bijekcija, a inverz A^{-1} neprekidan operator. Prema teoremu o otvorenom preslikavanju (vidi S. Kurepa [?], str. 389) neprekidnost bijektivnog operatora A povlači neprekidnost inverznog operatora, pa stoga dolazimo do sljedećeg zaključka: Problem (1.13) je dobro postavljen ako je operator A neprekidna bijekcija.

Prostor svih neprekidnih linearnih operatora $A: V \rightarrow V'$ označava se $\mathcal{L}(V, V')$. To je linearan prostor u koji se uvodi operatorska norma

$$\|A\| = \sup\{\|Av\|_{V'} : v \in V, \|v\|_V \leq 1\}.$$

Ako je V potpun, onda je i $\mathcal{L}(V, V')$ potpun prostor.

Ograničenost (=neprekidnost) linearnog operatora A bit će osigurana ako imamo ograničenost bilinearne forme. Iz (1.11) se lako pokazuje da za pripadni operator A vrijedi $\|A\| \leq M$. Nadalje, potrebno je osigurati injektivnost operatora A . Jedan prirodan i jednostavan uvjet na formu $a(\cdot, \cdot)$, koji osigurava injektivnost, je uvjet koercitivnosti. Iz (1.12) slijedi

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v) = \langle Av, v \rangle_{V', V} \leq \|Av\|_{V'} \|v\|_V,$$

što povlači da za svako $v \in V$ vrijedi $\alpha \|v\|_V \leq \|Av\|_{V'}$. Iz te nejednakosti lako slijedi injektivnost operatora A i na isti način injektivnost adjungiranog operatora, te zatvorenost slike operatora A . Tada prema Banachovom teoremu o zatvorenoj slici dobivamo surjektivnost operatora A (za detalje vidi H. Brezis [?], II.7). Time dolazimo do egzistencije i jedinstvenosti rješenja jednadžbe (1.13).

1.3 Prostori Soboljeva

Vratimo se sada našem polaznom primjeru i provjerimo možemo li zadovoljiti gornje zahtjeve.

U prostor $V = \{\phi \in C^1([0, 1]): \phi(0) = 0\}$ prirodno je uvesti normu

$$\|\phi\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\phi(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |\phi'(x)|,$$

uz koji je on potpun. Zatim je lako pokazati da je uz tu normu bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ ograničen:

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

Nasuprot tome, ne postoji konstanta α takva da je

$$a(u, u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx \geq \alpha \|u\|^2 \geq \alpha \sup_{0 \leq x \leq 1} |u'(x)|^2.$$

Zadatak 1.4 *Konstruirajte niz funkcija (u_n) iz prostora V za koji vrijedi*

$$\int_0^1 u_n'(x)^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty,$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u_n'(x)| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problem koji se ovdje javlja je u tome što je prirodna norma prostora V suviše jaka. Varijacijska formulacija nam diktira normu integralnog oblika.

Uvedimo prostor

$$L^2(a, b) = \{\phi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}: \int_a^b \phi^2(x) dx < +\infty\}.$$

To je prostor svih kvadratno integrabilnih funkcija i u njemu dobro definiran skalarni produkt

$$(\phi, \psi)_{L^2(a, b)} = \int_a^b \phi(x)\psi(x) dx, \quad (1.14)$$

te pripadna norma

$$\|\phi\|_{L^2(a, b)} = \left(\int_a^b \phi^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (1.15)$$

Prostor $L^2(a, b)$ s ovom normom je Hilbertov.

Napomena 1.6 * *Teorija $L^2(a, b)$ -prostora se oslanja na Lebesgueovu teoriju integracije. Formulom (1.15) definirana je norma na prostoru svih klasa ekvivalencije skoro svuda jednakih funkcija (u odnosu na Lebesgueovu mjeru). Prema tome, elementi $L^2(a, b)$ -prostora nisu funkcije nego klase ekvivalencija skoro svuda jednakih funkcija.*

Ta se tehnička komplikacija može izbjeći tako da se $L^2(a, b)$ promatra kao prostor funkcija, a da se uzima da su dvije funkcije jednake ako su jednake svuda osim na skupu (Lebesgueove) mjere nula. Uz takav dogovor ne možemo govoriti o vrijednosti funkcije u točki ili na bilo kojem skupu mjere nula.

Iz činjenice da je formulom (1.14) dobro definiran skalarni produkt slijedi:

Lema 1.2 (Schwarz–Cauchyjeva nejednakost) *Za svake dvije funkcije $\phi, \psi \in L^2(a, b)$ vrijedi*

$$\left| \int_a^b \phi(x)\psi(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b \phi^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b \psi^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Za dokaz vidi [?].

Prostor $L^2(a, b)$ će biti zamjena za $C([a, b])$. Prostor $C^1([a, b])$ zamjenjujemo prostorom

$$H^1(a, b) = \left\{ \phi \in L^2(a, b) : \int_a^b \phi'(x)^2 dx < +\infty \right\}.$$

To je prostor kvadratno integrabilnih funkcija koje imaju kvadratno integrabilnu derivaciju. U pitanje kako precizno definirati derivaciju funkcije iz $L^2(a, b)$ ovdje nećemo ulaziti (vidi Dodatak ??).

U prostoru $H^1(a, b)$ definiramo skalarni produkt

$$(\phi, \psi)_{H^1(a,b)} = \int_a^b \phi(x)\psi(x) dx + \int_a^b \phi'(x)\psi'(x) dx,$$

i pripadnu normu

$$\|\phi\|_{H^1(a,b)} = \left(\int_a^b \phi(x)^2 dx + \int_a^b \phi'(x)^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.16)$$

Pokazuje se da je $H^1(a, b)$ s ovim skalarnim produktom Hilbertov prostor. To je jedan od prostora iz familije prostora Soboljeva.

Reformulirajmo sada varijacijsku jednadžbu (1.4) tako da za prostor V uzmemo

$$V = \{ \phi \in H^1(0, 1) : \phi(0) = 0 \}. \quad (1.17)$$

To je Hilbertov prostor s normom prostora $H^1(0, 1)$. Štoviše, u njemu možemo uzeti ekvivalentnu normu

$$\|\phi\| = \left(\int_0^1 \phi'(x)^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.18)$$

To je posljedica Poincaréove nejednakosti koju dokazujemo sada.

Lema 1.3 Za svaku funkciju $\phi \in H^1(a, b)$, za koju je $\phi(a) = 0$, vrijedi Poincaréova nejednakost

$$\|\phi\|_{L^2(a,b)} \leq C \|\phi'\|_{L^2(a,b)}. \quad (1.19)$$

Dokaz. Za svako $\phi \in V$ imamo

$$\phi(x) = \phi(x) - \phi(a) = \int_a^x \phi'(t) dt \leq \left(\int_a^x 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^x \phi'(t)^2 dt \right)^{1/2},$$

gdje smo iskoristili Cauchyjevu nejednakost. Time dobivamo

$$|\phi(x)| \leq \left((b-a) \int_a^x \phi'(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

pa kvadriranjem i integriranjem izlazi

$$\int_a^b \phi(x)^2 dx \leq (b-a) \int_a^b \int_a^x \phi'(t)^2 dt dx \leq (b-a)^2 \int_a^b \phi'(x)^2 dx. \quad \square$$

Iz (1.19) lako slijedi da je na potprostoru svih funkcija iz $H^1(a, b)$, koje se poništavaju u $x = a$, norma (1.16) ekvivalentna s normom

$$|\phi|_{H^1(a,b)} = \left(\int_a^b \phi'(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Napomena 1.7 *Ekvivalentne norme generiraju istu topologiju na vektorskom prostoru. Drugim riječima, ako jedan niz konvergira u jednoj normi, onda on konvergira i u svakoj drugoj, njoj ekvivalentnoj, normi. Prostor koji je potpun u jednoj normi, potpun je i u njoj ekvivalentnoj normi.*

Zadatak 1.5 *Funkcije iz prostora $H^1(a, b)$ su uniformno neprekidne. Naime, za svaku funkciju $v \in H^1(a, b)$ i za svake dvije točke $x, y \in (a, b)$ vrijedi*

$$|v(x) - v(y)| \leq \sqrt{|x - y|} \|v'\|_{L^2(a,b)}.$$

Dokažite.

Zadatak 1.6 *Uvedimo oznaku $\|v\|_\infty = \sup_{x \in (a,b)} |v(x)|$. Prema zadatku 1.5 $\|v\|_\infty$ je konačno za svaku funkciju $v \in H^1(a, b)$. Pokažite da za svaku funkciju $v \in H^1(a, b)$, za koju je $v(a) = 0$ ili $v(b) = 0$, vrijedi*

$$\|v\|_\infty \leq \sqrt{b-a} \|v'\|_{L^2(a,b)}.$$

Vratimo se sada našem primjeru. Sada znamo da na prostoru V , definiranom u (1.17), možemo uzeti normu $\|\cdot\|$, definiranu s (1.18), budući da je ona prema dokazanom ekvivalentna s $H^1(0, 1)$ normom na $V \subset H^1(0, 1)$. Imamo,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 u'(x)v'(x) dx \right| \leq \|u'\|_{L^2(0,1)} \|v'\|_{L^2(0,1)} = \|u\| \|v\|, \\ a(v, v) &= \int_0^1 v'(x)^2 dx = \|v\|^2. \end{aligned}$$

Uz pretpostavku da je $f \in L^2(0, 1)$ dobivamo neprekidnost linearnog funkcionala F :

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left| \int_0^1 f(x)v(x) dx \right| \leq \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 v^2(x) dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|v\|. \end{aligned}$$

U zadnjoj smo nejednakosti ponovo koristili ekvivalenciju normi (1.16) i (1.18) na prostoru V . Dakle, promijenjenom osnovnog prostora s lakoćom se pokazuje da varijacijska zadaća (1.4) ima jedinstveno rješenje za svako $f \in L^2(0, 1)$.

Zaključak. Prelaskom na varijacijsku formulaciju rubne zadaće proširili smo pojam rješenja rubne zadaće. Rješenje varijacijske zadaće nazivamo **slabim rješenjem** zadaće postavljene u diferencijalnom obliku. Na varijacijsku zadaću možemo primijeniti teoreme funkcionalne analize koji na relativno jednostavan način daju korektnost zadaće, pod uvjetom da je funkcijski prostor u kome tražimo rješenje ispravno odabran. To nas vodi do zamjene prostora neprekidno derivabilnih funkcija prostorima Soboljeva. Istodobno dobivamo i nove, slabije, uvjete na funkciju $f(x)$ uz koju je slabo rješenje zadaće (1.1) dobro definirano.

Napomena 1.8 Analogno kao $H^1(a, b)$ definiraju se prostori Soboljeva višeg reda:

$$H^k(a, b) = \{\phi \in L^2(a, b) : \phi', \phi'', \dots, \phi^{(k)} \in L^2(a, b)\}.$$

Pripadna norma je

$$\|\phi\|_{H^k(a,b)} = \left(\int_a^b \phi(x)^2 dx + \sum_{i=1}^k \int_a^b \phi^{(i)}(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Vrlo je korisna sljedeća elementarna nejednakost.

Lema 1.4 Za svaka dva broja $a, b \geq 0$ i svako $\eta > 0$ vrijedi

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{1}{4\eta} b^2. \quad (1.20)$$

Dokaz. Slijedi iz

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

transformacijom $a \mapsto \sqrt{2\eta}a$ i $b \mapsto b/\sqrt{2\eta}$. \square

Zadatak 1.7 Dokažite Poincaréovu nejednakost za funkcije iz $H^1(a, b)$ koje se poništavaju u $x = b$.

Zadatak 1.8 Pokažite primjerom da Poincaréova nejednakost ne vrijedi na čitavom prostoru $H^1(a, b)$.

Zadatak 1.9 *Provjerite uz koje uvjete na koeficijente diferencijanih jednadžbi su ispunjeni uvjeti Lax-Milgramove leme za primjere iz Zadatka 1.1.*

Rješenje. *Uočimo odmah da u varijacijskim zadaćama prostor $C^1([a, b])$ treba zamijeniti s $H^1(a, b)$, te da u svim primjerima funkcija $f(x)$ mora zadovoljavati $f \in L^2(a, b)$.*

ad) (1.6). Dovoljno je uzeti $c(x) \geq 0$ za sve $x \in (a, b)$ i $\|c\|_\infty < +\infty$;

ad) (1.7). Dovoljno je uzeti $\alpha \geq 0$, $k(x) \geq k_0 > 0$, za sve $x \in (a, b)$, gdje je k_0 zadana pozitivna konstanta, $\|k\|_\infty < +\infty$ te $c(x) \geq 0$ za sve $x \in (a, b)$ i $\|c\|_\infty < +\infty$. U dokazu ograničenosti bilinearne forme treba se koristiti rezultat zadatka 1.6.

ad) (1.8). Ovaj primjer je složeniji zbog pojave člana $c(x)u'(x)v(x)$ pod integralom. Za ograničenost bilinearne forme moramo imati $\|c\|_\infty < +\infty$ i $\|d\|_\infty < +\infty$. U ocjeni konstante koercitivnosti možemo iskoristiti (1.20) na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \int_a^b c(x)u'(x)v(x) dx &\leq \|c\|_\infty \int_a^b \left(\frac{\varepsilon}{2\|c\|_\infty} u'(x)^2 + \frac{\|c\|_\infty}{2\varepsilon} u(x)^2 \right) dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_a^b u'(x)^2 dx + \frac{\|c\|_\infty^2}{2\varepsilon} \int_a^b u(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Sada se koercitivnost dobija uz uvjet

$$d(x) \geq d_0 > \frac{\|c\|_\infty^2}{2\varepsilon} > 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Zadatak 1.10 *Dokažite neprekidnost funkcionala na desnoj strani u zadatku 1.3.*

Definicija 1.3 *Za bilinearnu formu $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je simetrična ako vrijedi*

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = a(v, u).$$

Zadatak 1.11 *Ispitajte simetriju bilinearnih formi u primjerima iz Zadatka 1.1.*

Napomena 1.9 *Varijacijske jednadžbe sa simetričnom bilinearnom formom mogu se interpretirati kao Eulerove jednadžbe za odgovarajući funkcional energije. Preciznije, tada varijacijskoj jednadžbi (1.4) možemo pridružiti funkcional energije*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v).$$

Varijacija funkcionala je

$$\frac{d}{dt}J(u + tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - F(u + tv) \right)_{t=0} = a(u, v) - F'(v) = 0,$$

gdje smo iskoristili da je $u \in V$ rješenje varijacijske zadaće (1.4). Stoga rješenje varijacijske zadaće možemo interpretirati kao minimim funkcionala energije (za detalje vidi Poglavlje ??).

1.4 Varijacijska aproksimacija

Varijacijska formulacija rubne zadaće za diferencijalnu jednadžbu vrlo je pogodna za numeričku aproksimaciju. Rekapitulirajmo prvo ono što je do sada učinjeno.

Problem (1.1) smo reformulirali u obliku

$$\begin{cases} \text{naći } u \in V \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

gdje je

- V beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor zadan s (1.17), i s normom (1.18);
- $a(\cdot, \cdot)$ je bilinearna, ograničena i koercitivna forma zadana s (1.2);
- $F \in V'$ funkcional zadan s (1.3), pri čemu je pretpostavljeno $f \in L^2(0, 1)$.

Da bismo aproksimirali rješenje ove zadaće uvodimo konačnodimenzionalni prostor $S \subset V$ koji predstavlja “aproksimaciju” prostora V i formiramo novu varijacijsku zadaću:

$$\begin{cases} \text{naći } u_S \in S \\ a(u_S, v) = F(v), \quad \forall v \in S. \end{cases} \quad (1.21)$$

Dobiveni problem je konačnodimenzionalan pa se njegovo rješenje može efektivno izračunati. Opisani se postupak naziva varijacijska aproksimacija. Uočimo da diskretna zadaća (1.21), prema Lax-Milgramovoj lemi, ima jedinstveno rješenje ako su uvjeti Lax-Milgramove leme ispunjeni za kontinuiranu varijacijsku zadaću (1.4).

Neka je $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ baza u S ($n = \dim(S)$). Tada rješenje u_S možemo raspisati po vektorima baze,

$$u_S(x) = \sum_{j=1}^n U_j \phi_j(x).$$

Uzimajući test funkciju $v = \phi_i$ u zadaći (1.21), dobivamo

$$\sum_{j=1}^n U_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.22)$$

Sustav (1.22) je jedna matrična jednadžba, stoga uvedimo oznake

$$\mathbf{U} = (U_j) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{F} = (F_j) \in \mathbb{R}^n, \quad F_j = F(\phi_j), \quad \mathbf{K} = (K_{i,j}), \quad K_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i).$$

Jednadžbe (1.22) se zapisuju sada u obliku

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}.$$

Pokažimo da iz koercitivnosti bilinearne forme slijedi da je matrica \mathbf{K} pozitivno definitna, odnosno da vrijedi

$$\forall \mathbf{V} \neq 0, \quad \mathbf{K}\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} > 0. \quad (1.23)$$

Formirajmo funkciju

$$v(x) = \sum_{j=1}^n V_j \phi_j(x).$$

Imamo,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} &= \sum_{i,j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) V_i V_j \\ &= a\left(\sum_{i=1}^n V_i \phi_j, \sum_{j=1}^n V_j \phi_j\right) = a(v, v) \\ &\geq \alpha \|v\|^2. \end{aligned}$$

Kako je $\|\cdot\|$ norma na prostoru V , znamo da

$$\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Budući da funkcija $v(x)$ ne može biti identički jednaka nuli za netrivialan vektor \mathbf{V} , zaključujemo da vrijedi (1.23).

Matrica \mathbf{K} je, dakle, pozitivno definitna pa je i regularna. Time smo na drugi način pokazali egzistenciju i jedinstvenost diskretnog problema.

Napomena 1.10 Matrica \mathbf{K} se tradicionalno naziva matrica krutosti. \square

1.5 Ocjena greške aproksimacije

Željeli bismo ocijeniti s kojom točnošću rješenje zadatice (1.21) aproksimira rješenje zadatice (1.4), odnosno htjeli bismo ocijeniti grešku aproksimacije $u - u_S$. U toj ocjeni osnovnu ulogu ima svojstvo ortogonalnosti koje izlazi iz toga što je $S \subset V$ (konformnost aproksimacije). Do njega dolazimo oduzimanjem jednadžbi

$$\begin{aligned} a(u, v) &= F(v), \quad \forall v \in S \subset V \\ a(u_S, v) &= F(v), \quad \forall v \in S, \end{aligned}$$

te dobivamo

$$a(u - u_S, v) = 0, \quad \forall v \in S. \quad (1.24)$$

Pretpostavimo da je naša bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ simetrična, tj da vrijedi

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = a(v, u),$$

pa zbog koercitivnosti ona ima sva svojstva skalarnog produkta. Stoga je

$$\|v\|_E = \sqrt{a(v, v)}$$

dobro definirana norma koju nazivamo **energetska norma**. Kako za svaki skalarni produkt vrijedi Cauchyjeva nejednakost imamo

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq \|u\|_E \|v\|_E. \quad (1.25)$$

Koristeći ortogonalnost (1.24) i Cauchyjevu nejednakost, za proizvoljno $v \in S$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \|u - u_S\|_E^2 &= a(u - u_S, u - u_S) \\ &= a(u - u_S, u - v) + a(u - u_S, v - u_S) \\ &= a(u - u_S, u - v) \quad (\text{ortogonalnost}) \\ &\leq \|u - u_S\|_E \|u - v\|_E. \end{aligned}$$

Time smo dobili ocjenu

$$\forall v \in S, \quad \|u - u_S\|_E \leq \|u - v\|_E.$$

Uzimanjem infimuma po svim $v \in S$ dobivamo

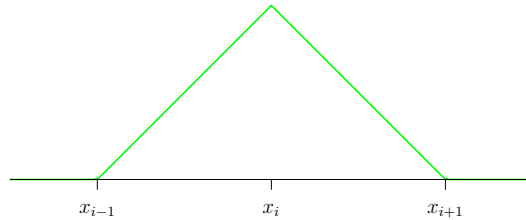
Teorem 1.2 Neka je $u \in V$ rješenje varijacijske zadaće (1.4), a $u_S \in S$ rješenje zadaće (1.21). Tada je

$$\|u - u_S\|_E \leq \inf\{\|u - v\|_E : v \in S\}.$$

Teorem 1.2 kaže da je varijacijska aproksimacija ujedno najbolja aproksimacija u energetske norme. Infimum na desnoj strani se naravno postiže u $v = u_S$. Štoviše, za potpunu ocjenu greške aproksimacije treba samo vidjeti kako dobro prostor S aproksimira funkcije iz prostora V .

1.6 Konstrukcija konačnodimenzionalnog prostora S

Metoda konačnih elemenata bazira se varijacijskoj aproksimaciji i specifičnom izboru konačnodimenzionalnog prostora S . Općenito metoda konstrukcije prostora S je sljedeća: domena u kojoj je postavljena rubna zadaća razbije se na



Slika 1.1: Primjer bazne funkcije tipa krovića.

konačno mnogo podskupova jednostavne geometrije: segmenata u jednoj dimenziji, trokuta ili pravokutnika u dvije, tetraedara i heksaedara u tri itd. Takav rastav domene naziva se *triangulacija*. Prostor S se tada sastoji od funkcija koje su na svakom elementu triangulacije polinomi određenog stupnja, a globalno su neprekidni. Takav izbor dozvoljava konstrukciju baze koja ima povoljna numerička svojstva.

Napomena 1.11 *Pri aproksimaciji diferencijalnih jednadžbi četvrtog reda obično se traži da funkcije iz prostora S imaju neprekidne prve parcijalne derivacije. S druge strane, postoji klasa metoda konačnih elemenata koje koriste prostor S čije funkcije nisu globalno neprekidne.*

Uvedimo najjednostavniji primjer prostora S koji sadrži po dijelovima affine funkcije. Uzmimo da je zadana jedna particija segmenta $[0, 1]$ (triangulacija)

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1.$$

Prostor S definiramo kao prostor svih funkcija $v(x)$ koje zadovoljavaju sljedeća tri svojstva:

- $v \in C([0, 1])$;
- $v|_{[x_{i-1}, x_i]}$ je afina funkcija za sve $i = 1, 2, \dots, n$;
- $v(0) = 0$.

Lako se pokazuje da je $S \subset H^1(0, 1)$, tj. da je naša aproksimacija konformna.

Prvi zadatak je konstruirati bazu prostora $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$. Standardna baza je sastavljena od *krovića*:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \cap [0, 1] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \cap [0, 1] \end{cases}$$

ili jednostavnije, $\phi_i(x)$ je funkcija iz S sa svojstvom

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j},$$

za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$. Linearna nezavisnost takvih funkcija je evidentna. Lako je vidjeti da se svaka funkcija $v \in S$ može na jedinstven način napisati u obliku

$$v(x) = \sum_{i=1}^n V_i \phi_i(x),$$

gdje je $V_i = v(x_i)$.

Deriviranjem dobivamo

$$v'(x) = \sum_{i=1}^n V_i \phi_i'(x) = \text{po dijelovima konstantna funkcija}$$

pa je stoga $v' \in L^2(0, 1)$ i time smo provjerali da je $S \subset H^1(0, 1)$.

Uz prostor S definira se i **interpolacijski operator**. Za svaku funkciju $v \in C([0, 1]) \cap V$ definiramo funkciju $v_I \in S$ formulom

$$v_I(x) = \sum_{i=1}^n v(x_i) \phi_i(x).$$

Tu smo evidentno interpolirali funkciju v u čvorovima mreže pomoću afinih funkcija. Interpolacijski operator $\mathcal{I}: C([0, 1]) \cap V \rightarrow S$ definira se formulom $\mathcal{I}v = v_I$. On ima važnu ulogu u ocjeni veličine $\inf\{\|u - v\|_E : v \in S\}$, budući da koristeći ocjenu

$$\inf\{\|u - v\|_E : v \in S\} \leq \|u - u_I\|_E,$$

ocjenu greške svodimo na ocjenu greške interpolacije.

Napomena 1.12 *Točke u kojima uzimamo vrijednosti funkcije u interpolacijskom operatoru nazivaju se **nodalne točke**. U ovom primjeru, nodalne točke su točke x_i , za $i = 1, \dots, n$.*

Teorem 1.3 *Neka je $u \in H^2(0, 1) \cap V$ i $h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$. Tada postoji konstanta C , neovisna o h i u , takva da je*

$$\|u - u_I\|_E \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Dokaz. Ako pogledamo definiciju normi, dovoljno je za svako $j = 1, \dots, n$ dokazati

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |(u - u_I)'(x)|^2 dx \leq c(x_j - x_{j-1})^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} |u''(x)|^2 dx.$$

Tvrđnja se dobije sumiranjem po j . Uvedimo oznaku $e(x) = u(x) - u_I(x)$. Kako je u_I afina funkcija, prethodna nejednakost je ekvivalentna s

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |e'(x)|^2 dx \leq c(x_j - x_{j-1})^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} |e''(x)|^2 dx.$$

Napravimo li zamjenu varijabli

$$x = x_{j-1} + y(x_j - x_{j-1}), \quad \tilde{e}(y) = e(x_{j-1} + y(x_j - x_{j-1})),$$

izlazi

$$\int_0^1 |\tilde{e}'(y)|^2 dy \leq c \int_0^1 |e''(y)|^2 dy. \quad (1.26)$$

Potrebno je dokazati samo posljednju nejednakost. Prethodna onda slijedi zamjenom varijabli. Takav se postupak često koristi pa je dobio ime argument skaliranja.

Da bismo dokazali (1.26) uočimo da je $\tilde{e}(0) = \tilde{e}(1) = 0$ (tu koristimo činjenicu da je u_I interpoland funkcije u). Po Rolleovom teoremu postoji točka $\xi \in (0, 1)$ u kojoj je $\tilde{e}'(\xi) = 0$. Stoga je

$$\tilde{e}'(y) = \int_{\xi}^y \tilde{e}''(t) dt.$$

Pomoću Cauchyjeve nejednakosti izlazi

$$\begin{aligned} |\tilde{e}'(y)| &= \left| \int_{\xi}^y \tilde{e}''(t) dt \right| \leq \left(\int_{\xi}^y 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\xi}^y \tilde{e}''(t)^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq |y - \xi|^{1/2} \left(\int_0^1 \tilde{e}''(t)^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Uzmemo li u obzir da je

$$\max_{0 \leq \xi \leq 1} \int_0^1 |y - \xi| dy = \frac{1}{2}, \quad (1.27)$$

integriranjem dobivamo

$$\int_0^1 |\tilde{e}'(y)|^2 dy \leq \int_0^1 |y - \xi| dy \left(\int_0^1 \tilde{e}''(t)^2 dt \right) \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{e}''(t)^2 dt.$$

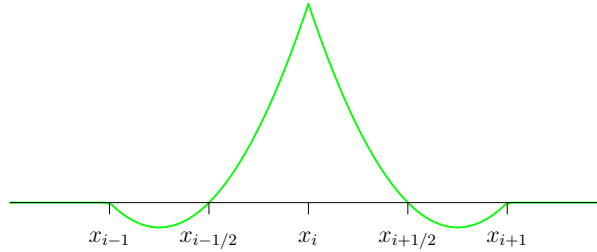
Time je (1.26) dokazano s $c = 1/2$. \square

Zadatak 1.12 Dokažite (1.27).

Sada možemo formulirati osnovni rezultat o grešci aproksimacije.

Teorem 1.4 Neka je $u \in H^2(0, 1) \cap V$ rješenje zadaće (1.4), a u_S rješenje zadaće (1.21). Tada postoji konstanta C , neovisna o $h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ i u , takva da je

$$\|u - u_S\|_E \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Slika 1.2: Primjer bazne funkcije drugog reda. Funkcija ϕ_i .

Dokaz. Pomoću Teorema 1.2 i Teorema 1.3 dobiva se

$$\|u - u_S\|_E \leq \inf\{\|u - v\|_E : v \in S\} \leq \|u - u_I\|_E \leq Ch\|u''\|_{L^2(0,1)}. \quad \square$$

Prostor S koji smo konstruirali je tzv. prostor \mathbb{P}_1 elemenata, nazvanih tako jer su funkcije iz S na svakom elementu $[x_i, x_{i+1}]$ polinomi prvog stupnja. Slično se konstruiraju i elementi višeg reda: elementi tipa \mathbb{P}_k su neprekidne funkcije koje su na svakom elementu polinomi stupnja manjeg ili jednakog k .

Detalji konstrukcije prostora S tipa \mathbb{P}_2 : Prostor možemo konstruirati tako da direktno konstruiramo njegovu bazu. Budući da na svakom elementu $[x_i, x_{i+1}]$ funkcija $v \in S$ mora biti polinom drugog stupnja uvest ćemo dodatnu *nodalnu* točku u element $[x_i, x_{i+1}]$, $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$. Funkcija je na $[x_i, x_{i+1}]$ posve određena svojim vrijednostima u točkama x_i , $x_{i+1/2}$ i x_{i+1} . Bazne funkcije se ponovo definiraju kao funkcije iz prostora S koje su jednake jedan u jednoj nodalnoj točki, a nula svim ostalim. Kako sada imamo dvije različite vrste nodalnih točaka, one koje su na rubovima elemenata i one koje su u sredini elemenata, imat ćemo dva različita tipa baznih funkcija: za $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \phi_i \in S, \quad \phi_i(x_j) &= \delta_{i,j}, \quad j = 0, 1, \dots, n \\ \phi_i(x_{j-1/2}) &= 0, \quad j = 1, \dots, n; \end{aligned}$$

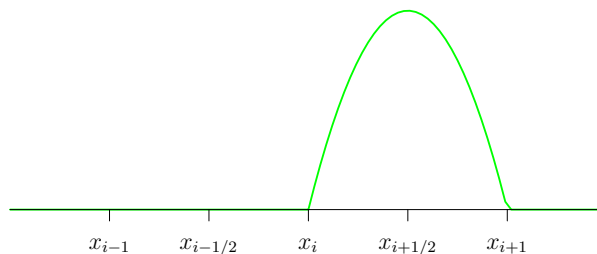
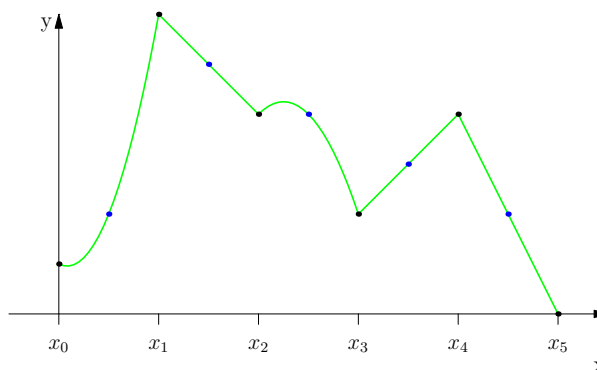
za $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \phi_{i-1/2} \in S, \quad \phi_{i-1/2}(x_j) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \\ \phi_{i-1/2}(x_{j-1/2}) &= \delta_{i,j}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Primjeri baznih funkcija dani su na slikama 1.2 i 1.3. Skup S sada možemo definirati na ovaj način:

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^n V_i \phi_i(x) + \sum_{i=1}^n V_{i-1/2} \phi_{i-1/2}(x) : V_0, \dots, V_n, V_{1/2}, \dots, V_{n-1/2} \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.28)$$

Zadatak 1.13 Pokažite da je (1.28) linearan prostor svih neprekidnih funkcija koje su na svakom elementu $[x_i, x_{i+1}]$ kvadratni polinomi.

Slika 1.3: Primjer bazne funkcije drugog reda. Funkcija $\phi_{i+1/2}$.

Slika 1.4: Primjer funkcije iz prostora konačnih elemenata drugog reda.

Za funkciju

$$v(x) = \sum_{i=0}^n V_i \phi_i(x) + \sum_{i=i}^n V_{i-1/2} \phi_{i-1/2}(x)$$

vrijedi

$$V_i = v(x_i), \quad V_{i-1/2} = v(x_{i-1/2}).$$

Te se vrijednosti nazivaju **stupnjevi slobode**. Neprekidnost cijele funkcije postignuta je upravo ovakvim izborom stupnjeva slobode. Jedan primjer funkcije iz ovog prostora dan je na slici [1.4](#).

Zadatak 1.14 *Nadite formule za bazne funkcije tipa \mathbb{P}_2 .*

1.7 Argument dualnosti

Teorem [1.4](#) rješava problem konvergencije metode konačnih elemenata u energetskej normi. Podsjetimo se u slučaju zadaće [\(1.1\)](#) energetska norma ima oblik

$$\|u\|_E = \|u'\|_{L^2(0,1)}.$$

Dakle radi se o konvergenciji derivacije. Ali što možemo reći o ocjeni greške u $L^2(0,1)$ normi? Ta bi ocjena trebala biti bolja od ocjene za derivaciju. Iz

Poincaréove nejednakosti (1.19) i Teorema 1.4 odmah dobivamo ocjenu

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)},$$

no pokazat ćemo da vrijedi jača ocjena.

Tehnika koja se naziva argument dualnosti dozvoljava izvod precizne ocjene greške u $L^2(0,1)$ normi. U njoj se prvo definira tzv. dualni problem:

$$\begin{cases} -w'' = u - u_S & \text{na } (0,1) \\ w(0) = 0, & w'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Nadalje, potrebno je uvesti određenu pretpostavku regularnosti. U ovom slučaju pretpostavljamo da zadaća (1.29) ima rješenje u $H^2(0,1)$. U jednodimenzionalnom slučaju to je evidentno jer je $u - u_S \in C([0,1])$ pa (1.29) ima klasično rješenje. Sada imamo:

$$\begin{aligned} \|u - u_S\|_{L^2(0,1)}^2 &= \int_0^1 (u - u_S)(u - u_S) dx = - \int_0^1 (u - u_S)w'' dx \\ &= - \int_0^1 ((u - u_S)w')' dx + \int_0^1 (u - u_S)'w' dx \\ &= -(u - u_S)(1)w'(1) + (u - u_S)(0)w'(0) + \int_0^1 (u - u_S)'w' dx \\ &= \int_0^1 (u - u_S)'w' dx = a(u - u_S, w) \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili $w'(1) = 0$ i $u(0) = u_S(0) = 0$. Koristeći relaciju ortogonalnosti (1.24) dobivamo za svako $v \in S$

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)}^2 = a(u - u_S, w - v) \leq \|u - u_S\|_E \|w - v\|_E.$$

To ćemo pisati u obliku

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)} \leq \|u - u_S\|_E \frac{\|w - v\|_E}{\|u - u_S\|_{L^2}}.$$

Kako je $-w'' = u - u_S$, a $v \in S$ proizvoljno, imamo

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)} \leq \|u - u_S\|_E \inf_{v \in S} \frac{\|w - v\|_E}{\|w''\|_{L^2}}.$$

Primijenjujući Teorem 1.3 na funkciju w dobivamo

$$\inf_{v \in S} \frac{\|w - v\|_E}{\|w''\|_{L^2}} \leq \frac{\|w - w_I\|_E}{\|w''\|_{L^2}} \leq Ch.$$

Time smo dobili

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)} \leq Ch \|u - u_S\|_E,$$

pa još jedna primjena Teorema 1.4 daje

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \|u''\|_{L^2(0,1)}. \quad (1.30)$$

Konvergencija u $L^2(0, 1)$ normi je dakle kvadratična.

1.8 Uniformna ocjena

Željeli bismo imati ocjene u normama koje nisu integralne. Na primjer, uzimimo normu

$$\|v\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |v(x)|.$$

U tu svrhu se koristi Greenova funkcija za diferencijalni operator. Tehnika je dosta složena u slučaju parcijalne diferencijalne jednačbe, no ovdje je vrlo jednostavna jer je diferencijalni operator naprosto druga derivacija. U našem primjeru Greenova funkcija je familija funkcija (x je parametar)

$$g_x(t) = \begin{cases} t & \text{za } t < x, \\ x & \text{za } t \geq x \end{cases}$$

To je funkcija iz prostora V pa imamo za proizvoljno $v \in V$

$$a(v, g_x) = \int_0^1 v'(t) g_x'(t) dt = \int_0^x v'(t) dt = v(x).$$

Primijenjujući tu relaciju na $v = u - u_S$, slijedi

$$(u - u_S)(x) = a(u - u_S, g_x).$$

Uočimo sada da za $x = x_i$ funkcija g_x pripada prostoru S , pa koristeći relaciju ortogonalnosti (1.24) dobivamo

$$(u - u_S)(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dakle $u_S = u_I$, odnosno, rješenje problema (1.21) je interpoland točnog rješenja. Drugim riječima, naša je aproksimacija egzaktna u nodalnim točkama. Sada nam treba odgovarajuća ocjena za grešku interpolacije u max-normi, no takva se greška može izvesti po analogiji s dokazom Teorema 1.3.

Zadatak 1.15 Pokažite da vrijedi sljedeća tvrdnja:

Neka je $u \in H^2(0, 1) \cap V$, funkcija s ograničenom drugom derivacijom i $h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$. Tada postoji konstanta C , neovisna o h i u , takva da je

$$\|u - u_I\|_\infty \leq Ch^2 \|u''\|_\infty.$$

Budući da je $u_S = u_I$ dobivamo ocjenu greške

$$\|u - u_S\|_\infty \leq Ch^2 \|u''\|_\infty.$$

1.9 Algoritamski aspekti metode konačnih elemenata

U ovoj sekciji diskutiramo implementaciju metode konačnih elemenata na modelnoj zadaći

$$-(k(x)u')' + c(x)u = f(x), \quad x \in (a, b) \quad (1.31)$$

$$k(a)u'(a) = \alpha_A, \quad u(b) = u_B, \quad (1.32)$$

u kojoj pretpostavljamo da vrijedi

$$k(x) \geq k_0 > 0, \quad c(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.33)$$

Varijacijska formulacija: Naći $u \in V = H^1(a, b)$, $u(b) = u_B$, za koje vrijedi

$$\int_a^b (k(x)u'\phi' + c(x)u\phi) dx = \int_a^b f(x)\phi dx - \alpha_A\phi(a), \quad \forall \phi \in V^0,$$

gdje je $V^0 = \{\phi \in H^1(a, b) : \phi(b) = 0\}$.

Diskretna zadaća se definira uvođenjem konačnodimenzionalnog prostora $V_h \subset V$ i zadavanjem varijacijske jednadžbe na tom prostoru: treba naći $u_h \in V_h$, $u_h(b) = u_B$, koje zadovoljava

$$\int_a^b (k(x)u_h'\phi' + c(x)u_h\phi) dx = \int_a^b f(x)\phi dx - \alpha_A\phi(a), \quad \forall \phi \in V_h^0, \quad (1.34)$$

gdje je $V_h^0 = \{\phi \in V_h : \phi(b) = 0\}$.

Za konstrukciju prostora V_h uvodimo triangulaciju domene (a, b) . Ona je zadana nizom točaka

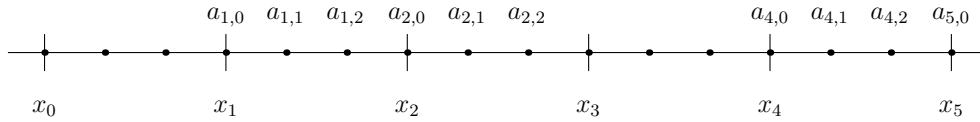
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b.$$

Koristit ćemo oznaku $K_{e+1/2} = [x_e, x_{e+1}]$ za *elemente* triangulacije, i

$$\mathcal{T}_h = \{K_{e-1/2} : e = 1, \dots, N\}$$

za samu *triangulaciju*. Triangulacija je dakle skup segmenata koji prekrivaju domenu bez preklapanja, osim u dodirnim točkama susjednih elemenata. Parametar h kojim indeksiramo *triangulaciju* je definiran kao

$$h = \max_{0 \leq e < N} (x_{e+1} - x_e),$$

Slika 1.5: Nodalne točke u slučaju $k = 3$ i $N = 5$.

i naziva se *finoća triangulacije*; triangulacija je to finija što je parametar h manji.

Triangulacija je obično ekvidistantna, ali ako imamo određene informacije o rješenju, ona može biti finija na mjestima gdje se rješenje brže mijenja.

Za fiksno $k = 1, 2, \dots$ definiramo prostor

$$V_h = V_h^{(k)} = \{\phi \in C([a, b]): \forall e = 1, \dots, N, \quad \phi|_{K_{e-1/2}} \in \mathbb{P}_k\}.$$

Dakle u $V_h^{(k)}$ su sve neprekidne funkcije koje su na svakom elementu polinomi stupnja manjeg ili jednakog k . U $V_h^{(1)}$ su po dijelovima affine funkcije, u $V_h^{(2)}$ po dijelovima kvadratne itd. Treba uočiti da se u slučaju $k > 1$ ne radi o splineovima, jer ne zahtjevamo maksimalnu moguću glatkoću funkcija – one trebaju biti jedino neprekidne.

Dimenzija prostora $V_h^{(k)}$: Na svakom elementu imamo $k + 1$ stupanj slobode. Kako triangulacija ima N elemenata, to čini ukupno $N(k + 1)$ stupnjeva slobode. Neprekidnost u čvorovima x_1, \dots, x_{N-1} je osigurana s $N - 1$ uvjeta što daje $N(k + 1) - (N - 1) = Nk + 1$ stupnjeva slobode. To je dimenzija prostora.

Nodalna baza prostora $V_h^{(k)}$: Prvo uvedemo nodalne točke

$$a_{e,l} = x_e + \frac{l}{k} dx_{e+1/2}, \quad e = 0, 1, \dots, N - 1; \quad l = 0, 1, \dots, k - 1,$$

$$a_{N,0} = b,$$

gdje je $dx_{e+1/2} = x_{e+1} - x_e$. U slučaju $k = 1$ nodalne točke su samo krajevi elemenata. Za $k = 2$ pojavljuju se i centri elemenata, itd. Slučaj $k = 3$ je skiciran na Slici 1.5.

Uočimo da je broj nodalnih točaka jednak $Nk + 1$, što je dimenzija prostora $V_h^{(k)}$. Nodalna baza je skup funkcija

$$\varphi_{e,l} \in V_h^{(k)} \quad e = 0, 1, \dots, N - 1; \quad l = 0, 1, \dots, k - 1, \quad \text{te } \varphi_{N,0} \in V_h^{(k)} \quad (1.35)$$

definiranih svojstvom

$$\varphi_{e,l}(a_{e',l'}) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } a_{e,l} = a_{e',l'} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}.$$

Funkcija $\varphi_{e,l}$ ima svojstvo da je jednaka jedan u nodalnoj točki $a_{e,l}$, a nula u svim ostalim nodalnim točkama i tim je pravilom definirana u svim nodalnim

točkama. Na svakom elementu se nalazi $k + 1$ nodalnih točaka koje u potpunosti određuju polinom stupnja k , pa je stoga funkcija $\varphi_{e,l}$ dobro definirana na svakom pojedinom elementu i evidentno je neprekidna na granici susjednih elemenata (jer su granične točke elemenata ujedno i nodalne točke).

Linearna nezavisnost funkcija (1.35) je evidentna, pa one stoga čine bazu u $V_h^{(k)}$ (broj im je jednak dimenziji prostora). Svaka se funkcija iz $V_h^{(k)}$ može raspisati po toj bazi, a koeficijenti u tom raspisu (*stupnjevi slobode*) su vrijednosti funkcije u nodalnim točkama:

$$v \in V_h^{(k)}, \quad v(x) = \sum_{e=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} v(a_{e,l}) \varphi_{e,l}(x) + v(b) \varphi_{N,0}(x),$$

($b = a_{N,0}$).

Generiranje baznih funkcija pomoću referentnog elementa. Prilikom asembliranja diskretnog sustava pokazuje se praktično sve račune provoditi na jednom fiksiranom elementu, koji se naziva *referentni element*. Svi drugi elementi dobivaju se afinim preslikavanjem referentnog.

Označimo s $\hat{K} = [-1, 1]$ referentni element, a s $T_{e+1/2}$ afino preslikavanje s referentnog elementa na element $K_{e+1/2} = [x_e, x_{e+1}]$:

$$T_{e+1/2}(\xi) = \frac{x_{e+1} - x_e}{2} \xi + \frac{x_{e+1} + x_e}{2}. \quad (1.36)$$

Inverzno preslikavanje je dano formulom

$$T_{e+1/2}^{-1}(x) = \frac{2x - (x_{e+1} + x_e)}{x_{e+1} - x_e}.$$

U referentnom elementu definiramo *nodalne točke*,

$$\xi_l = -1 + 2\frac{l}{k}, \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

Nodalnim točkama pridružimo lokalne bazne funkcije

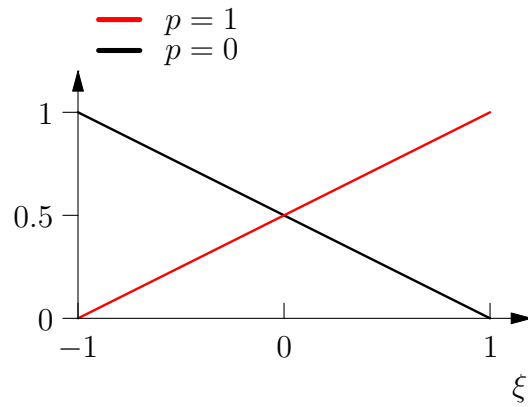
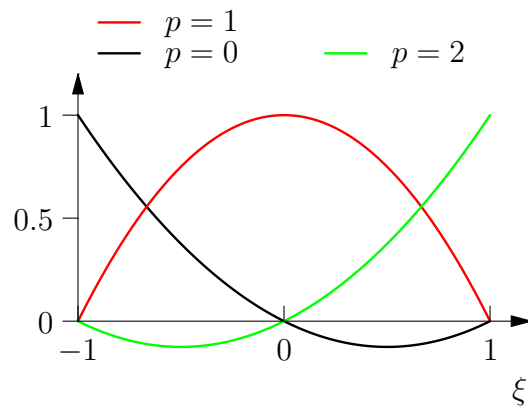
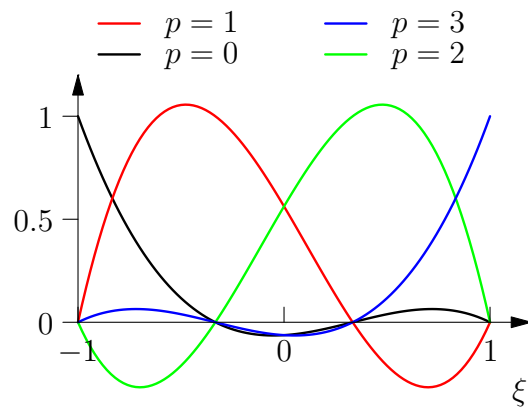
$$\hat{\phi}_0(\xi), \hat{\phi}_1(\xi), \dots, \hat{\phi}_k(\xi) \in \mathbb{P}_k$$

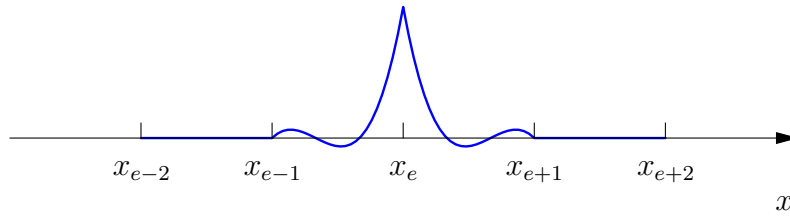
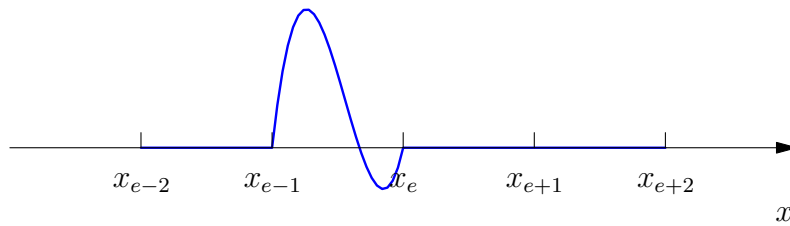
koje su definirane pravilom

$$\hat{\phi}_l(\xi_r) = \delta_{l,r}, \quad l, r = 0, 1, \dots, k,$$

($\delta_{l,r}$ je Kronekerov delta-simbol). Te se funkcije lako konstruiraju pomoću formule

$$\hat{\phi}_l(\xi) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^k (\xi - \xi_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^k (\xi_l - \xi_j)}.$$

Slika 1.6: Lokalne bazne funkcije, $k = 1$.Slika 1.7: Lokalne bazne funkcije, $k = 2$.Slika 1.8: Lokalne bazne funkcije, $k = 3$.

Slika 1.9: Primjer globalne bazne funkcije $\varphi_{e,0}$, $k = 3$.Slika 1.10: Primjer globalne bazne funkcije $\varphi_{e,1}$, $k = 3$.

Na slikama 1.6, 1.7 i 1.8 prikazane su funkcije za $k = 1, 2$ i 3 .

Pomoću lokalnih baznih funkcija i afinog preslikavanja referentnog elementa na ciljni element lako konstruiramo globalne bazne funkcije:

$$\varphi_{e,0}(x) = \begin{cases} \hat{\phi}_k(T_{e-1/2}^{-1}(x)) & x \in [x_{e-1}, x_e] \\ \hat{\phi}_0(T_{e+1/2}^{-1}(x)) & x \in [x_e, x_{e+1}] \\ 0 & \text{inače} \end{cases}, \quad (1.37)$$

te za $0 < l < k$,

$$\varphi_{e,l}(x) = \begin{cases} \hat{\phi}_l(T_{e+1/2}^{-1}(x)) & x \in [x_e, x_{e+1}] \\ 0 & \text{inače} \end{cases}. \quad (1.38)$$

Uočimo da funkcije $\varphi_{e,0}$ imaju za nosač dva susjedna elementa (osim u slučaju $e = 0$ i $e = N$), dok sve ostale imaju za nosač jedan element. Primjer globalnih baznih funkcija u slučaju $k = 3$ dani su na Slikama 1.9 i 1.10.

Napomena 1.13 *Do sada smo u konstrukciji prostora konačnih elemenata zanemarivali Dirichletov rubni uvjet. Funkcije iz V_h^0 moraju se poništavati u graničnim točkama u kojima je Dirichletov rubni uvjet zadan. Kako su granične točke uvijek i nodalne točke taj dodatni uvjet je lako ispuniti. Treba samo odgovarajući stupanj slobode postaviti na nulu. Prostor time gubi jednu (ili dvije) bazne funkcije. U našem slučaju je*

$$V_h^{0(k)} = \{\phi \in V_h^{(k)} : \phi(b) = 0\}$$

prostor razapet baznim funkcijama $\varphi_{e,l} \in V_h^{(k)}$, $e = 0, 1, \dots, N-1$; $l = 0, 1, \dots, k-1$ (bez $\phi_{N,0}$).

Konstrukcija diskretnog sustava. Pri konstrukciji sustava koristit ćemo jednostavnije indeksiranje baznih funkcija, odnosno indeksirat ćemo ih jednim indeksom od 1 do $Nk + 1$. To pretpostavlja da smo indeksirali na isti način nodalne točke. Skup tako indeksiranih nodalnih točaka označimo s $\{b_1, b_2, \dots, b_M, b_{M+1}\}$ (uveli smo pokratu $M = Nk$), a skup baznih funkcija s $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M, \phi_{M+1}\}$. Funkcija $\phi_j \in V_h^{(k)}$ je dakle definirana s

$$\phi_j(b_i) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M + 1.$$

Napomena 1.14 *U jednoj dimenziji postoji prirodan način indeksiranja nodalnih točaka i baznih funkcija. Treba uzeti*

$$b_i = a_{e,l} \quad \text{za } i = k(e - 1) + l + 1, \quad e = 1, \dots, N, \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

Tada je $\phi_i = \varphi_{e,l}$.

Uvrstimo aproksimaciju oblika

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{M+1} U_j \phi_j(x),$$

u varijacijsku jednadžbu (1.34) i uzmimo za test funkciju $v = \phi_i$. Pretpostavimo još da smo odabrali prirodan način indeksiranja nodalnih točaka tako da je $b_{M+1} = b$, pa stoga imamo $U_{M+1} = u_B$ i funkcija ϕ_{M+1} ne ulazi u prostor V_h (jer se funkcije u V_h poništavaju u $x = b$). Sada je

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^M U_j \phi_j(x) + u_B \phi_{M+1}(x). \quad (1.39)$$

Za vektor

$$\mathbf{U} = (U_j)_{j=1}^M \in \mathbb{R}^M$$

dobivamo sljedeći sustav algebarskih jednadžbi:

$$\sum_{j=1}^{M+1} U_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \dots, M,$$

gdje je

$$a(\phi_j, \phi_i) = \int_a^b (k(x) \phi_j' \phi_i' + c(x) \phi_j \phi_i) dx, \quad (1.40)$$

$$F(\phi_i) = \int_a^b f(x) \phi_i dx - \alpha_A \phi_i(a). \quad (1.41)$$

Budući da je vrijednost U_{M+1} poznata, treba ju prebaciti na desnu stranu. Time dolazimo do jednadžbi,

$$\sum_{j=1}^M U_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i) - u_B a(\phi_{M+1}, \phi_i), \quad i = 1, \dots, M.$$

(Uočimo da smo time napravili homogenizaciju rubnog uvjeta u diskretnoj zadaći.) Matrica sustava i vektor desne strane su

$$\mathbf{K} = (K_{i,j}) \in \mathbb{R}^{M \times M}, \quad K_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i), \quad (1.42)$$

$$\mathbf{F} = (F_i) \in \mathbb{R}^M \quad F_i = F(\phi_i) - u_B a(\phi_{M+1}, \phi_i), \quad (1.43)$$

te treba riješiti

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}.$$

Aproksimacija u_h dobiva se tada po formuli (1.39).

Napomena 1.15 *U praksi je zgodnije formirati proširenu matricu sustava \mathbf{K}^p i vektor desne strane \mathbf{F}^p u kojima je Dirichletov rubni uvjet zanemaren:*

$$\mathbf{K}^p = (K_{i,j}) \in \mathbb{R}^{M+1 \times M+1}, \quad K_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i),$$

$$\mathbf{F}^p = (F_i) \in \mathbb{R}^{M+1} \quad F_i = F(\phi_i),$$

i zatim naknadnom modifikacijom sustava implementirati Dirichletov rubni uvjet.

Osnovno svojstvo matrice sustava \mathbf{K} , odnosno \mathbf{K}^p , je sljedeće: ako indeksi i i j ne odgovaraju nodalnim točkama koje se nalaze u istom elementu, onda je $K_{i,j} = 0$. To je posljedica činjenice što je svaka bazna funkcija različita od nule jedino na onim elementima kojima pripada njena nodalna točka. To može biti jedan ili dva susjedna elementa. Matrica sustava stoga ima veliki broj nula u odnosu na elemente različite od nule. Svaki redak matrice koji odgovara nodalnoj točki koja se nalazi na rubu dva elementa ima $2k + 1$ elemenata različitih od nule. Redak koji odgovara nodalnoj točki iz unutrašnjosti elementa ima $k + 1$ elemenata različitih od nule. Ako primijenimo prirodan način indeksiranja nodalnih točaka, onda matrica sustava dobiva trakastu strukturu što je vrlo povoljno za rješavanje sustava direktnim metodama.

Formiranje matrice sustava moglo bismo vršiti u dvostrukoj petlji oblika

```

for  $i, j = 1, 2, \dots, M$  do
   $K_{i,j} = 0$ 
  for  $e = 0, 1, \dots, N - 1$  do
     $K_{i,j} = K_{i,j} + \int_{K_{e+1/2}} (k(x)\phi_j'\phi_i' + c(x)\phi_j\phi_i) dx$ 
  end for

```

end for

no takav je postupak vrlo neefikasan, budući da se radi o trostrukoj petlji. Postupak se može učiniti efikasnim ako se petlja po svim elementima koristi kao vanjska petlja:

```

for  $e = 0, 1, \dots, N - 1$  do
  for  $i, j = 1, 2, \dots, M$  do
     $K_{i,j} = K_{i,j} + \int_{K_{e+1/2}} (k(x)\phi_j'\phi_i' + c(x)\phi_j\phi_i) dx$ 
  end for
end for

```

pri čemu matricu trebamo inicijalizirati nulama prije ulaska u petlju po elementima. Prednost ovog pristupa je u tome što za dani element $K_{e+1/2}$ ne moramo imati dvostruku petlju po svim elementima matrice. Dovoljno je računati doprinose elementima matrice $K_{i,j}$ koji odgovaraju nodalnim točkama $b_i, b_j \in K_{e+1/2}$; svi ostali doprinosi jednaki su nuli.

Da bismo reducirali dvostruku unutarnju petlju potrebna nam je tabela

`nodal(1:N, 0:k)`

koja će izraziti globalne indekse nodalnih točaka preko lokalnog indeksa nodalne točke u elementu i indeksa elementa. Prisjetimo se da smo pri konstrukciji baznih funkcija i nodalnih točaka iste indeksirali pomoću dva indeksa – indeksom elementa i lokalnim indeksom koji pokazuje položaj točke unutar elementa, dok smo pri konstrukciji sustava algebarskih jednadžbi koristili jedan, globalni indeks. Tabela `nodal` treba povezati ta dva načina indeksiranja.

Za zadani konačni element $K_{e+1/2}$ s indeksom e , $e = 0, 1, \dots, N - 1$, i lokalni indeks nodalne točke $l = 0, 1, \dots, k$, $j = \text{nodal}(e, l)$ je globalni indeks nodalne točke. To znači

$$j = \text{nodal}(e, l) \Rightarrow b_j = a_{e,l}, \quad l = 0, 1, \dots, k - 1;$$

Nadalje, za $l=k$ i $j = \text{nodal}(e, k)$ imamo $b_j = a_{e+1,0}$. (To znači da tabela mora zadovoljavati $\text{nodal}(e+1, 0) = \text{nodal}(e, k)$.)

Napomena 1.16 *Uzmemo li prirodan način indeksiranja nodalnih točaka i baznih funkcija, onda je*

$$\text{nodal}(e, l) = k(e-1) + l + 1$$

Proces asbliranja možemo sada napisati u sljedećem obliku:

```

for  $e = 0, 1, \dots, N - 1$  do
  for  $l, r = 0, 1, \dots, k$  do
     $\hat{k}_{l,r} = \int_{K_{e+1/2}} (k(x)\varphi_{e,r}'\varphi_{e,l}' + c(x)\varphi_{e,r}\varphi_{e,l}) dx$ 
     $i = \text{nodal}(e, l), \quad j = \text{nodal}(e, r)$ 
     $K_{i,j} = K_{i,j} + \hat{k}_{l,r}$ 
  end for
end for

```

end for
end for

Sada na svakom konačnom elementu računamo samo lokalnu matricu krutosti koja je dimenzije $k+1 \times k+1$, što je optimalna količina računanja za asembliranje globalne matrice sustava.

Računanje integrala. Integriranje ćemo vršiti po referentnom elementu. Za svaki element $K_{e+1/2}$ imamo bijektivno afino preslikavanje $T_{e+1/2}: \hat{K} \rightarrow K_{e+1/2}$, dano formulom (1.36) ($K_{e+1/2} = T_{e+1/2}(\hat{K})$). Prema (1.37) i (1.38), za bazne funkcije imamo za sve $l = 0, 1, \dots, k$,

$$\varphi_{e,l}(x)|_{K_{e+1/2}} = \hat{\phi}_l(T_{e+1/2}^{-1}(x)) \quad (1.44)$$

(uz konvenciju da je $\varphi_{e,k} = \varphi_{e+1,0}$.) Koristeći zamjenu varijabli

$$\int_{K_{e+1/2}} g(x) dx = \int_{\hat{K}} g(T_{e+1/2}(\xi)) |T'_{e+1/2}(\xi)| d\xi = \frac{x_{e+1} - x_e}{2} \int_{\hat{K}} g(T_{e+1/2}(\xi)) d\xi$$

dobivamo ($dx_{e+1/2} = x_{e+1} - x_e$)

$$\int_{K_{e+1/2}} c(x) \varphi_{e,r}(x) \varphi_{e,l}(x) dx = \frac{dx_{e+1/2}}{2} \int_{\hat{K}} c(T_{e+1/2}(\xi)) \hat{\phi}_r(\xi) \hat{\phi}_l(\xi) d\xi. \quad (1.45)$$

Deriviranjem jednakosti (1.44) dobivamo

$$\frac{d}{dx} \varphi_{e,l}(x)|_{K_{e+1/2}} = \frac{2}{x_{e+1} - x_e} \frac{d\hat{\phi}_l}{d\xi}(T_{e+1/2}^{-1}(x)),$$

i stoga

$$\int_{K_{e+1/2}} k(x) \varphi'_{e,r}(x) \varphi'_{e,l}(x) dx = \frac{2}{dx_{e+1/2}} \int_{\hat{K}} k(T_{e+1/2}(\xi)) \frac{d\hat{\phi}_r}{d\xi}(\xi) \frac{d\hat{\phi}_l}{d\xi}(\xi) d\xi. \quad (1.46)$$

Time smo u lokalnim doprinosima matrici sustava posve eliminirali globalne bazne funkcije i cijeli se račun oslanja samo na lokalne bazne funkcije.

Numerička integracija. Ako su koeficijenti diferencijalne jednadžbe konstantni, onda se s integrali (1.45) i (1.46) mogu izračunati egzaktno. U općenitoj situaciji moramo iskoristiti neku formulu numeričke integracije. Pri tome je dovoljno zadati takvu formulu na referentnom elementu.

Odaberimo na referentnom elementu Gaussovu integracijsku formulu oblika

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx \sum_{s=1}^L \hat{\omega}_s g(z_s).$$

Ovdje su $z_1, \dots, z_L \in [-1, 1]$ integracijske točke, a $\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_L$ integracijske težine. Time dobivamo

$$\int_{K_{e+1/2}} c(x) \varphi_{e,r}(x) \varphi_{e,l}(x) dx \approx \frac{dx_{e+1/2}}{2} \sum_{s=1}^L \hat{\omega}_s c(T_{e+1/2}(z_s)) \hat{\phi}_r(z_s) \hat{\phi}_l(z_s)$$

$$\int_{K_{e+1/2}} k(x) \varphi'_{e,r}(x) \varphi'_{e,l}(x) dx \approx \frac{2}{dx_{e+1/2}} \sum_{s=1}^L \hat{\omega}_s k(T_{e+1/2}(z_s)) \frac{d\hat{\phi}_r}{d\xi}(z_s) \frac{d\hat{\phi}_l}{d\xi}(z_s).$$

U efikasnoj implementaciji vrijednosti

$$\hat{\phi}_r(z_s), \quad \frac{d\hat{\phi}_r}{d\xi}(z_s)$$

se izračunaju jednom, prije početka petlje po svim elementima. Konačan algoritam asembliranja će imati sljedeću formu, u kojoj smo radi jednostavnosti zapisa stavili $z_s^e = T_{e+1/2}(z_s)$:

```

for  $e = 0, 1, \dots, N - 1$  do
  for  $l, r = 0, 1, \dots, k$  do
     $\hat{k}_{l,r} = 0$ 
    for  $s = 1, \dots, L$  do
       $\hat{k}_{l,r} = \hat{k}_{l,r} + 2\hat{\omega}_s k(z_s^e) \hat{\phi}'_r(z_s) \hat{\phi}'_l(z_s) / dx_{e+1/2} + dx_{e+1/2} \hat{\omega}_s c(z_s^e) \hat{\phi}_r(z_s) \hat{\phi}_l(z_s) / 2$ 
    end for
     $i = \text{nodal}(e, l), j = \text{nodal}(e, r)$ 
     $K_{i,j} = K_{i,j} + \hat{k}_{l,r}$ 
  end for
end for

```

Analogan postupak asembliranja matrice krutosti primijenjuje se i u višedimenzionalnim zadacima. Detalji se mogu pogledati, na primjer, u [1].

Zadatak 1.16 *Modificirajte algoritam asembliranja matrice krutosti tako da umjesto pune matrice koristite matricu u trakastoj formi.*

Zadatak 1.17 *Pokažite da će asembliranje desne strane, bez doprinosa od Neumannovog rubnog uvjeta, ići prema sljedećem algoritmu:*

```

for  $e = 0, 1, \dots, N - 1$  do
  for  $l = 0, 1, \dots, k$  do
     $\hat{f}_{l,r} = 0$ 
    for  $s = 1, \dots, L$  do
       $\hat{f}_l = \hat{f}_l + dx_{e+1/2} \hat{\omega}_s f(z_s^e) \hat{\phi}_l(z_s) / 2$ 
    end for
     $i = \text{nodal}(e, l)$ 
  end for

```

$F_i = F_i + \hat{f}_l$
end for
end for

Modificirajte algoritam tako da uvažite doprinos on Neumannovog rubnog uvjeta u $x = a$.

Napomena 1.17 Ako koristimo elemnete reda k , onda je dovoljno uzeti formulu numeričke integracije koja je točna na polinomima reda $2k-2$ kako ne bismo izgubili asimptotski red točnosti metode. Najefikasnije je uzeti Gaussove integracijske formule.

Prethodni algoritmi asembliraju proširenu matricu krutosti \mathbf{K}^p i prošireni vektor desne strane \mathbf{F}^p .

Zadatak 1.18 Pokažite da prošireni sustav $\mathbf{K}^p \mathbf{U}^p = \mathbf{F}^p$, gdje je $\mathbf{U}^p = (U_1, \dots, U_{M+1})^\tau$, odgovara rubnoj zadaći s dva Neumannova rubna uvjeta (homogena ako nema modifikacije vektora desne strane).

Dirichletov rubni uvjet. Sustav s Dirichletovim rubnim uvjetom je oblika

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,M} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ K_{M,1} & \cdots & K_{M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{1,M+1}u_B \\ \vdots \\ K_{M,M+1}u_B \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

pa bismo morali smanjivati dimenziju proširene matrice krutosti koju smo asemblirali. Kako je to nepraktično, rješava se sustav

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,M} & K_{1,M+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ K_{M,1} & \cdots & K_{M,M} & K_{M,M+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_M \\ U_{M+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_M \\ u_B \end{bmatrix}$$

koji je ekvivalentan s (1.47). Modifikacija proširenog sustava sastoji se dakle u tome da se u retku matrice koji odgovara Dirichletovom čvoru svi vandijagonalni elementi stave na nulu, dijagonalni element se postavi na jedan, a odgovarajuća komponenta desne strane se postavi na vrijednost Dirichelovog rubnog uvjeta. Loša strana ovog postupka je gubitak simetrije matrice. Da bismo to izbjegli (simetrija je važna za neke iterativne algoritme, kao što je algoritam konjugiranih gradijenata) možemo modificirati sustav na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,M} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ K_{M,1} & \cdots & K_{M,M} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_M \\ U_{M+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_M \\ u_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{1,M+1}u_B \\ \vdots \\ K_{M,M+1}u_B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vidimo da je ovdje jednačica koja odgovara Dirichletovom čvoru $i = M + 1$ zamijenjena s jednačicom $u_{M+1} = u_B$.

Treći način implementacije Dirichletovog rubnog uvjeta je putem *penalizacije*. To je "lijena" metoda koja prošireni sustav modificira minimalno i ne kvari simetriju sustava. Radi se o tome da se jednačici u Dirichletovom čvoru $i = M + 1$ doda jednačica

$$\frac{1}{\varepsilon}U_{M+1} = \frac{1}{\varepsilon}u_B,$$

gdje je ε vrlo mali broj (npr. $\varepsilon = 10^{-20}$). Time će rubni uvjet biti približno zadovoljen, naravno pod uvjetom da je $1/\varepsilon$ vrlo velik u odnosu na elemente $M + 1$ -og retka matrice krutosti i u odnosu na F_{M+1} . Jedina modifikacija koju treba učiniti na sustavu je

$$K_{M+1,M+1} = K_{M+1,M+1} + \frac{1}{\varepsilon}, \quad F_{M+1} = F_{M+1} + \frac{1}{\varepsilon}u_B.$$

Zadatak 1.19 *Matrica krutosti diskretnog sustava je simetrična jer polazna diferencijalna jednačica ima odgovarajuće svojstvo simetrije. Formirajte algoritam za diskretizaciju rubne zadaće (k , b , c i f su zadane funkcije)*

$$\begin{aligned} -(k(x)u')' + b(x)u'(x) + c(x)u &= f(x), \quad x \in (a, b) \\ u(a) &= u_A, \quad u(b) = u_B, \end{aligned}$$

i uvjerite se da matrica krutosti nije simetrična ako je $b \neq 0$.

Neumannova zadaća. Regularnost matrice krutosti slijedi iz njene pozitivne definitnosti koju osiguravaju svojstva koeficijenata diferencijalne jednačice. Tako na primjer, kod zadaće (1.31), (1.32) pretpostavili smo uvjete (1.33) koji za proširenu matricu krutosti daju

$$\sum_{i,j=1}^{M+1} K_{i,j}\xi_i\xi_j = \int_a^b (k(x)U'(x)^2 + c(x)U(x)^2) dx$$

gdje je

$$U(x) = \sum_{i=1}^{M+1} \xi_i\phi(x).$$

Sada iz $k(x) \geq k_0 > 0$ i $c(x) \geq 0$, za sve $x \in [a, b]$, imamo

$$\sum_{i,j=1}^{M+1} K_{i,j}\xi_i\xi_j \geq k_0 \int_a^b U'(x)^2 dx,$$

i stoga

$$\sum_{i,j=1}^{M+1} K_{i,j} \xi_i \xi_j = 0 \quad \Rightarrow \quad U' \equiv 0.$$

To je pak moguće ako i samo ako je $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{M+1}$. Za matricu krutosti Dirichletove zadaće imamo analogni zaključak:

$$\sum_{i,j=1}^M K_{i,j} \xi_i \xi_j = \int_a^b (k(x)V'(x)^2 + c(x)V(x)^2) dx$$

gdje je

$$V(x) = \sum_{i=1}^M \xi_i \phi(x).$$

Funkcija V sada zadovoljava $V(b) = 0$ i uvjet $V' \equiv 0$ nužno povlači $V \equiv 0$, što je moguće ako i samo ako je $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_M = 0$. Dirichletova matrica je stoga pozitivno definitna.

Uočimo da je uz pretpostavku $c(x) \geq c_0 > 0$, za sve $x \in [a, b]$, i proširena matrica krutosti pozitivno definitna.

Neumannova zadaća može stoga vodiri na diskretnu zadaću s neregularnom matricom. Na primjer, zadaća

$$\begin{aligned} -(k(x)u')' &= f(x), \quad x \in (a, b) \\ u'(a) &= u'(b) = 0, \end{aligned}$$

ima matricu krutosti $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{M+1, M+1}$ koja je singularna. Štoviše,

$$\mathcal{N}(\mathbf{K}) = \{\alpha \mathbf{1} : \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (1.48)$$

Naime,

$$(\mathbf{K}\mathbf{1})_i = \sum_{j=1}^{M+1} K_{i,j} = \sum_{j=1}^{M+1} \int_a^b (k(x)\phi_j' \phi_i') dx = \int_a^b (k(x)\mathbf{1}' \phi_i') dx = 0,$$

jer je

$$\sum_{j=1}^{M+1} \phi_j \equiv 1.$$

To pokazuje da je $\mathbf{1}$ element jezgre matrice krutosti. S druge strane, pokazali smo više da svaki vektor iz jezgre nužno zadovoljava $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{M+1}$, što dokazuje (1.48).

U ovom slučaju desna strana mora zadovoljavati uvjet kompatibilnosti

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

koji u diskretnom slučaju daje

$$\sum_{j=1}^{M+1} F_j = \mathbf{F} \cdot \mathbf{1} = 0.$$

Time dobivamo da diskretna desna strana mora biti ortogonalna na jezgru matrice sustava, što je nužan i dovoljan uvjet egzistencije rješenja diskretnog sustava. Rješenje diskretnog sustava, kao i kontinuiranog, određeno je do na aditivnu konstantu.

U praksi je nezgodno raditi sa singularnom matricom. Stoga se postupa tako da se rješenje zada u jednoj točki. Svako drugo rješenje dobiva se dodavanjem aditivne konstante. Posebno je zgodno staviti rješenje na nulu jedno točki, na primjer u $x = b$. Sustav se tada transformira u

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,M} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ K_{M,1} & \cdots & K_{M,M} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_M \\ U_{M+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_M \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

Zadatak 1.20 Pokažite da je matrica sustava (1.49) regularna.

Bibliografija

- [1] Jean-Luc Guermond Alexandre Ern. *Éléments finis: théorie, applications, mise en oeuvre*, volume 36 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.