1

Konstrukcija prostora konačnih elemenata u $H^1(\Omega)$

Promatramo linearnu varijacijsku zadaću: naći $u \in V$ takav da je

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle, \tag{1.1}$$

gdje je V Hilbertov prostor, a bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ i funkcional F zadovoljavaju uvjete Lax-Milgramove leme (Teorem **??**). Aproksimacijska zadaća glasi: naći $u_h \in V_h$ takav da je

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle,$$

gdje je $V_h \subset V$ konačnodimenzionalan potprostor. U ovom se poglavlju bavimo konstrukcijom prostora konačnih elemenata $V_h \subset H^1(\Omega)$.

Prvi korak u konstrukciji prostora V_h je dekompozicija (triangulacija) domene na jednostavne podskupove, uglavnom poliedre. Funkcije iz V_h su na svakom podskupu triangulacije polinomi određenog stupnja. Zatim se pokazuje da je za inkluziju $V_h \subset H^1(\Omega)$ potrebno da su funkcije iz V_h neprekidne. Neprekidnost se postiže pažljivim odabirom stupnjeva slobode za koje se uzimaju vrijednosti funkcije u simetrično odabranim točkama. Konačno, u prostoru V_h moramo odabrati jednu bazu koju je jednostavno numerički konstruirati i koja vodi na linearni sustav s dobro uvjetovanom matricom.

1.1 Osnovna svojstva prostora konačnih elemenata

Varijacijska zadaća (1.1) postavljena je u domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\mathsf{d} = 1, 2$ ili 3, za koju radi jednostavnosti pretpostavljamo da je ograničen, poliedarski skup (poligonalan skup u $\mathbb{R}^2$ ili otvoreni interval u $\mathbb{R}$).

1. Prvi korak u konstrukciji prostora V_h je triangulacija domene Ω. Triangulacija domene Ω je svaka konačna familija $\mathcal{T}_h$ podskupova od $\overline{\Omega}$ koja ima ova svojstva:

(T1) $\overline{\Omega} = \cup_{K\in\mathcal{T}_h} K$;

(T2) Svaki $K \in \mathcal{T}_h$ je zatvoren poliedarski skup i $\mathrm{Int}(K) \neq \emptyset$;

(T3) Za svaka dva različita $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ vrijedi $\mathrm{Int}(K_1) \cap \mathrm{Int}(K_2) = \emptyset$;

To su minimalne pretpostavke o triangulaciji. Skupove iz $\mathcal{T}_h$ nazivamo elementima.

Triangulacija je dakle razbijanje domene na uniju disjunktnih poliedarskih skupova (elemenata) koji ju posve prekrivaju. Elementi su najčešće trokuti ili četverokuti u $\mathbb{R}^2$, te tetraedri, paralelepipedi i prizme u $\mathbb{R}^3$, no vidjet ćemo da se koriste i elementi koji nisu poligonalni. Da bismo imali dobra aproksimacijska svojstva triangulacija mora zadovoljavati, pored T1–T3, još neka svojstva koja ćemo navesti kasnije.

2. Svakom elementu $K \in \mathcal{T}_h$ pridružujemo jedan konačnodimenzionalni linearni prostor funkcija koji označavamo s P_K. Zatim definiramo prostor

$$X_h = \{v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}\colon \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad v|_K \in P_K\}.$$

Funkcije[1] iz X_h nisu neprekidne jer općenito imaju skokove na granicama susjednih elemenata. Stoga ćemo promatrati podskup $V_h \subset X_h$ koji se sastoji od neprekidnih funkcija i pokazat ćemo da je on podskup prostora $H^1(\Omega)$. To govori sljedeća lema:

Lema 1.1 Neka je $P_K \subset H^1(K)$ za svako $K \in \mathcal{T}_h$ i neka je $V_h = X_h \cap C(\overline{\Omega})$. Tada je

$$V_h \subset H^1(\Omega), \quad V_{oh} = \{v \in V_h\colon v = 0 \ \text{ na } \ \partial\Omega\} \subset H^1_0(\Omega).$$

Dokaz. Evidentno je $X_h \subset L^2(\Omega)$. Treba samo dokazati da svako $v \in V_h$ ima slabu derivaciju u $L^2(\Omega)$. To znači da za $i = 1, 2, \ldots, n$ postoje $v_i \in L^2(\Omega)$ takve da je

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega v\partial_i\phi\, dx = -\int_\Omega v_i\phi\, dx.$$

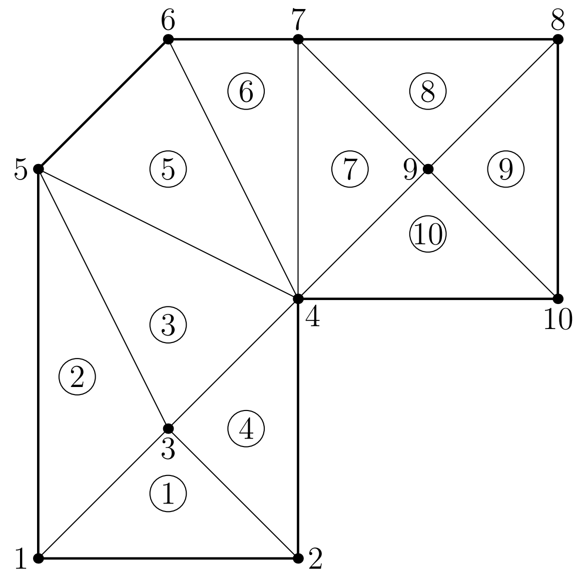
Parcijalnom integracijom na svakom elementu dobivamo

$$\int_K v\partial_i\phi\, dx = -\int_K \partial_i(v|_K)\phi\, dx + \int_{\partial K} v|_K\phi\, n_{i,K}\, d\sigma,$$

gdje je $n_{i,K}$ komponenta jedinične vanjske normale na ∂K. Sumiranjem po svim elementima dobivamo

$$\int_\Omega v\partial_i\phi\, dx = -\int_\Omega v_i\phi\, dx + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K} v|_K\phi\, n_{i,K}\, d\sigma,$$

[1]Elementi prostora X_h, strogo govoreći, nisu funkcije jer su višeznačne na granicam elemenata. Bilo bi ispravnije pisati $X_h = \prod_{K\in\mathcal{T}_h} P_K$.



Slika 1.1: Primjer triangulacije trokutima poligonalne domene u $\mathbb{R}^2$.

gdje smo v_i definirali formulom $v_i|_K = \partial_i(v|_K) \in L^2(K)$, pa je očito $v_i \in L^2(\Omega)$. Da bi v_i bila slaba derivacija, mora suma integrala po rubovima elemenata iščezavati. No to je istina jer je ϕ nula na $\partial\Omega$, a doprinosi od dva susjedna elementa se poništavaju zbog neprekidnosti funkcije v. $\square$

Uvjet neprekidnosti moguće je postići samo ako postoji određena usklađenost prostora P_K, što će voditi na nova ograničenja na elemente K i prostore P_K.

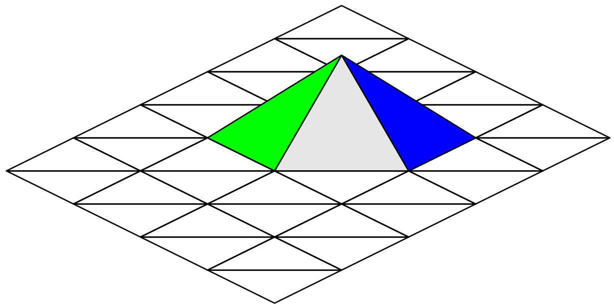
3. Sljedeći bitan element metode konačnih elementa je zahtjev da prostori P_K sadrže polinome (ili funkcije bliske polinomima). To je važno iz praktičnog razloga – jednostavnosti računanja s polinomima, ali se pokazuje i kao ključan element u dokazu teorema konvergencije.

4. Konačno, u prostoru V_h mora postojati jedna *kanonska baza* koja se sastoji od funkcija s malim nosačem. To će svojstvo voditi na matricu krutosti s vrlo malo elemenata različitih od nule, što je odlučujući element u numeričkom rješavanju dobivenog sustava.

1.2 Primjer: $\mathbb{P}_1$ elementi na trokutima

Da bismo objasnili opisanu shemu konstrukcije prostora konačnih elemenata uzet ćemo jedan jednostavan primjer. Pretpostavimo da je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena poligonalna domena i da je $\mathcal{T}_h$ jedna njena triangulacija trokutima, kao na Slici 1.1.

Uočimo da se triangulacija sastoji od 10 trokuta i da je broj vrhova triangulacije isto jednak 10. Svaki trokut sa susjednim trokutom ima zajedničku čitavu stranicu.



Slika 1.2: Primjer nodalne bazne funkcije za $k = 1$.

Funkcije iz prostora V_h, koji konstruiramo nad triangulacijom $\mathcal{T}_h$, su po dijelovima afine: preciznije, na svakom trokutu $K \in \mathcal{T}_h$ funkcija $v \in V_h$ je oblika $v(\mathbf{x}) = a_K + b_K x_1 + c_K x_2$. Nadalje, na granici susjednih elemenata funkcija $v(\mathbf{x})$ mora biti neprekidna. Ta će neprekidnost smanjiti broj stupnjeva slobode koji nam stoje na raspolaganju. Naime, bez uvjeta neprekidnosti na svakom trokutu K imamo 3 stupnja slobode, odnosno tri koeficijenta koje možemo slobodno birati (a_K, b_K i c_K). Ukupan broj stupnjeva slobode je stoga $3N$, gdje je N broj trokuta u triangulaciji ($\dim(X_h) = 3N$). Uvjet neprekidnosti smanjuje broj stupnjeva slobode, jer se neki moraju iskoristiti za zadovoljenje uvjeta neprekidnosti, i prisiljava nas da potražimo adekvatije stupnjeve slobode od koeficijenata a_K, b_K i c_K.

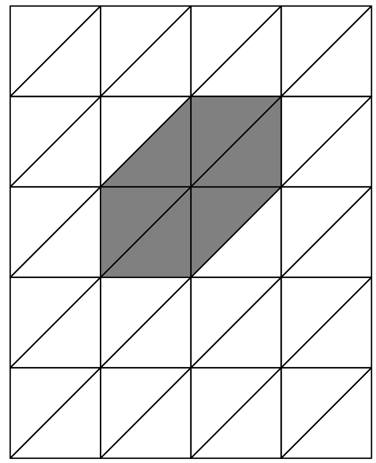
Uzmimo dva susjedna trokuta iz $\mathcal{T}_h$, na primjer K_1 i K_4, i označimo njihovu zajedničku stranicu s γ (to je stranica s vrhovima 2 i 3, vidi Sliku 1.1). Pogledajmo restrikciju funkcije $v \in V_h$ na γ: s v_1 označimo restrikciju uzetu iz K_1, a s v_4 onu uzetu iz K_4. Obje su te funkcije afine na γ i općenito međusobno različite. Da bismo ih učinili jednakima dovoljno je zahtijevati da su jednake u vrhovima stranice γ, i uz taj uvjet neprekidnost funkcije je zadovoljena.[2]

Sada se vrijednosti funkcije u vrhovima trokuta nameću kao adekvatni stupnjevi slobode. Naime, ako zadamo vrijednosti funkcije $v \in V_h$ u vrhovima svih trokuta, onda je ona time potpuno određena i neprekidna: Na svakom trokutu afina funkcija je posve određena svojim vrijednostima u vrhovima trokuta, a na stranicam koje povezuju susjedne trokute je neprekidna. Dimenzija prostora V_h je stoga jednaka broju vrhova triangulacije (u našem primjeru sa Slike 1.1 to je 10, odnosno za neprekidnost je trebalo 20 stupnjeva slobode).

Konačno, da bismo efikasno konstruirali prostor V_h moramo naći jednu bazu u njemu. Tu se nameće tzv. *nodalna baza*, koja je pridružena vrhovima triangulacije. Uvedimo stoga skup svih vrhova triangulacije

$$\mathcal{V}_h = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_M\},$$

[2] Obje funkcije v_1 i v_4 su afine funkcije *jedne varijable* na γ pa su posve određene vrijednostima u dvije točke.



Slika 1.3: Trokuti koji čine nosač bazne funkcije.

gdje je M broj svih vrhova trokuta u $\mathcal{T}_h$. Svakom vrhu $\mathbf{a}_i$ pridružujemo baznu funkciju ϕ_i definiranu na sljedeći način:

$$\phi_i \in V_h, \quad \phi_i(\mathbf{a}_j) = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j, \\ 0 & \text{za } i \neq j. \end{cases}$$

Bazna funkcija ϕ_i je afina na svakom trokutu i određena je svojim vrijednostima u vrhovima trokuta. Oblik takve funkcije prikazan je Slici 1.2.

Ona je različita od nule samo na onim trokutima koji imaju $\mathbf{a}_i$ kao jedan svoj vrh i stoga ima *mali nosač*, vidi Sliku 1.3.

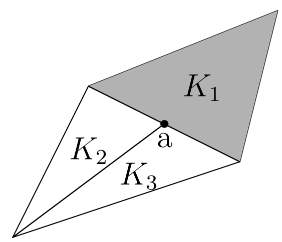
Uočimo da smo neprekidnost funkcija iz V_h postigli zahvaljujući tome što svaka dva susjedna trokuta imaju ili zajedničku čitavu stranicu, ili zajednički samo jedan vrh. Situacija prikazana na Slici 1.4 nije dozvoljena, jer bi bila narušena neprekidnost funkcija iz V_h i ne bismo imali konformnu aproksimaciju, odnosno $V_h \subset H^1(\Omega)$.

Stoga možemo definirati dodatan zahtjev koji mora zadovoljavati svaka triangulacija poligonalne domene. Formuliramo ga samo za slučaj $d \leq 3$:

(T4) Svaka dva elementa K_1 i K_2 iz $\mathcal{T}_h$ za koje je $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ imaju ili zajedničku stranicu, ili zajednički brid ili zajednički vrh.

1.3 Simplicijalni elementi

Konstrukcija iz prethodne točke lako se generalizira na 3 i više dimenzija te na polinome višeg stupnja. Promatrat ćemo prostore dimenzije $d = 1, 2$ i 3. Kanonsku bazu u $\mathbb{R}^d$ označavamo s $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^d$, a s $\mathbb{P}_k$ označavamo prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog k, u $\mathbb{R}^d$, tj. u varijablama $x_1, \ldots, x_d$.



Slika 1.4: Nedozvoljena situacija

Koristit ćemo i oznaku

$$\mathbb{P}_k(K) = \{p\big|_K : p \in \mathbb{P}_k\}.$$

Neka su $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}$ točke u $\mathbb{R}^d$ koje ne leže u istoj hiperravnini. d-simpleks K, razapet točkama $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}$, je konveksna ljuska točaka $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}$:

$$K = \{\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \mathbf{a}_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq d+1, \quad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1\}.$$

Točke $\mathbf{a}_i$ nazivamo vrhovima simpleksa. Evidentno je 2-simpleks trokut, dok je 3-simpleks tetraedar.

Pretpostavimo da imamo triangulaciju domene koja se sastoji od simpleksa: trokuta u dvije dimenzije i tetraedara u tri. Na takvim elementima ćemo promatrati polinome stupnja $k \geq 1$ i reprezentirat ćemo ih na način pogodan za konstrukciju funkcija neprekidnih na čitavoj domeni Ω.

Neka je $\mathbf{a}_i = (a_{ji})_{j=1}^d$. Točke $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}$ ne leže u istoj hiperravnini ako i samo ako je matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

regularna.

Baricentričke koordinate $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq d+1$ bilo koje točke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, u odnosu na točke $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}$, koje ne leže u istoj hiperravnini, je jedinstveno rješenje linearnog sustava

$$\sum_{i=1}^{d+1} a_{ji} \lambda_i = x_j, \quad 1 \leq j \leq d$$

$$\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1.$$

Matrica sustava je (1.2) pa je egzistencija i jedinstvenost koordinata osigurana uvjetom nekomplanarnosti.

Lako se provjerava da su baricentričke koordinate afine funkcije varijabli $x_1, \dots, x_d$ (dakle, nalaze se u $\mathbb{P}_1$):

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{d} b_{ij} x_j + b_{id+1}, \quad 1 \leq i \leq d+1,$$

gdje je $B = (b_{ij})$ inverz matrice A iz (1.2).

Iz definicije baricentričkih koordinata se lako vidi da je i-ta koordinata λ_i afina funkcija definirana svojstvom da je jednaka 1 u vrhu $\mathbf{a}_i$, a nula u svim ostalim vrhovima simpleksa. Dakle, λ_i ima svojstva

$$\lambda_i \in \mathbb{P}_1, \quad \lambda_i(\mathbf{a}_j) = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j, \end{cases}$$

i ta ju svojstva potpuno određuju. Pored toga vidimo da svaki polinom $p \in \mathbb{P}_1$ možemo na jedinstven način prikazati u obliku

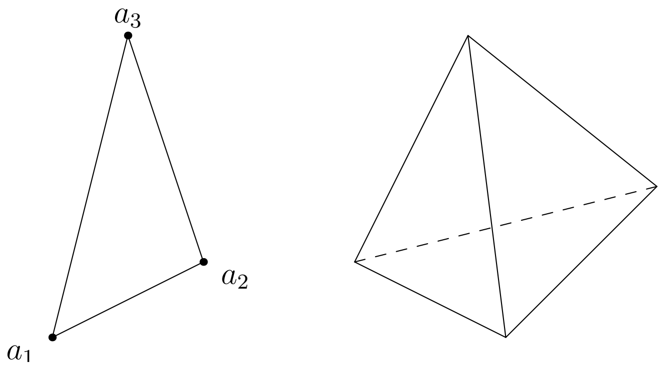
$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d} p(\mathbf{a}_i) \lambda_i(\mathbf{x}). \tag{1.3}$$

Najjednostavniji konačni element konstruiran nad jednim d-simpleksom je onaj u kojem je $P_K = \mathbb{P}_1(K)$. Sve funkcije iz tog prostora možemo jednostavno reprezentirati pomoću formule (1.3). Vrijednosti $p(\mathbf{a}_i)$ nazivaju se stupnjevi slobode konačnog elementa (eng. *degrees of freedom*, kraće *dofs*), a funkcije λ_i su pripadne lokalne bazne funkcije pomoću kojih ćemo dobiti kanonsku bazu. Za skup svih stupnjeva slobode elementa K koristit ćemo oznaku Σ_K; vrhove simpleksa $\mathbf{a}_i$ nazivamo nodalnim točkama elementa.

Ovako konstruirani element nazivamo *d-simpleksom tipa (1)*. U $d = 2$ govorimo o trokutu tipa (1) ili *Courant-ovom trokutu*, a za $d = 3$ govorimo o tetraedru tipa (1).

d-simpleks tipa (1)
$P_K = \mathbb{P}_1(K), \quad \dim P_K = d+1$ $\Sigma_K = \{p(\mathbf{a}_i) \colon 1 \leq i \leq d+1\}.$

d-simpleks tipa (2) sadrži sve polinome stupnja manjeg ili jednakog dva: $P_K = \mathbb{P}_2(K)$. Da bismo definirali stupnjeve slobode uvedimo dodatne nodalne točke $\mathbf{a}_{ij} = (\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j)/2$, za $1 \leq i, j \leq d+1$. To su polovišta bridova d-simpleksa. Uočimo da je broj koeficijenata u polinomu drugog stupnja jednak broju nodalnih točaka, tako da vrijednosti funkcije u nodalnim točkama možemo uzeti kao stupnjeve slobode. To ćemo pokazati eksplicitnom konstrukcijom baznih funkcija.



Slika 1.5: Simpleksi tipa (1) u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Budući da su baricentričke koordinate afine funkcije koje u vrhovima simpleksa primaju vrijednost 0 ili 1, vidimo da je

$$\lambda_k(\mathbf{a}_{ij}) = \frac{1}{2}(\delta_{ki} + \delta_{kj}).$$

Sada je lako uočiti da funkcije

$$\lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad i = 1, \dots, d+1,$$

imaju svojstvo da su jednake jedan u $\mathbf{a}_i$, a nula u svim ostalim $\mathbf{a}_k$ te $\mathbf{a}_{ij}$. Nadalje funkcije

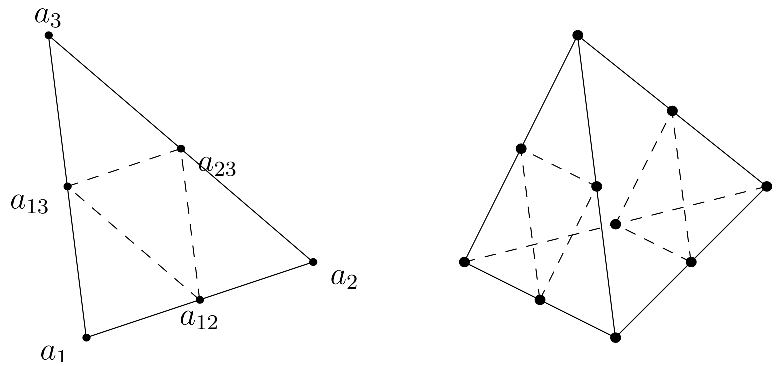
$$\lambda_i\lambda_j, \quad i < j, \ \ i, j = 1, \dots, d+1,$$

jednake su 1/4 u $\mathbf{a}_{ij}$, a nula u svim drugim točkama. Na temelju tih činjenica lako konstruiramo polinom drugog stupnja koji ima zadane vrijednosti u točkama $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_{ij}$. Dobivamo

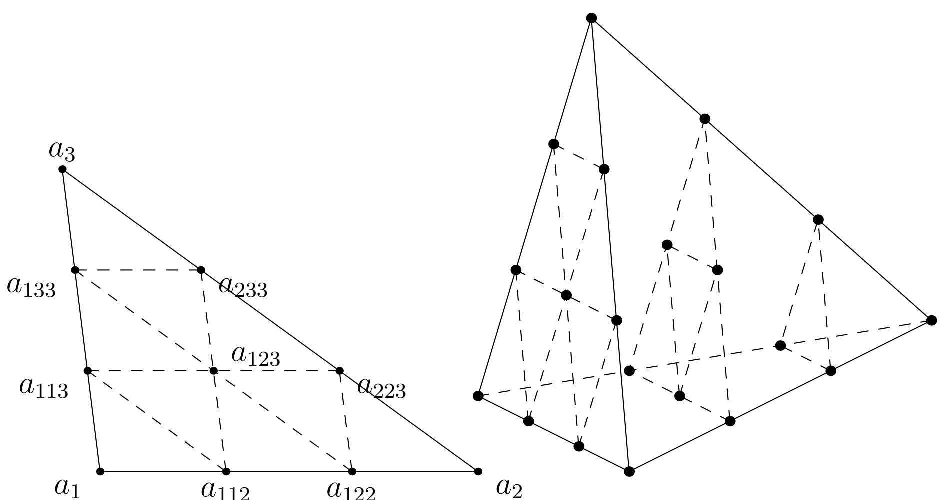
$$\forall p \in \mathbb{P}_2, \quad p = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i(2\lambda_i - 1)p(\mathbf{a}_i) + 4 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{d+1} \lambda_i\lambda_j p(\mathbf{a}_{ij}).$$

d-simpleks tipa (2)
$P_K = \mathbb{P}_2(K), \quad \dim P_K = (d+1)(d+2)/2$
$\Sigma_K = \{p(\mathbf{a}_i),\ 1 \le i \le d+1,\ p(\mathbf{a}_{ij}),\ 1 \le i < j \le d+1\}.$

Kako na svakoj stranici imamo 3 (u $\mathbb{R}^2$) odnosno 6 (u $\mathbb{R}^3$) simetrično raspoređenih dodalnih točaka, one se kod susjednih elemenata poklapaju i na jedinstven način određuju restrikciju polinoma drugog stupnja na zajedničku stranicu. Na taj način postižemo globalnu neprekidnost funkcije definirane svojim vrijednostima u nodalnim točkama.



Slika 1.6: Simpleksi tipa (2) u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$



Slika 1.7: Simpleksi tipa (3) u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

d-simpleksi tipa (3) definiraju se analogno. Pored vrhova simpleksa uvedu se dodatne nodalne točke:

$$\mathbf{a}_{iij} = \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j), \quad \text{za } i \neq j, \quad \mathbf{a}_{ijk} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + a_k), \quad \text{za } i < j < k,$$

i dobije se da za svako $p \in \mathbb{P}_3$ vrijedi

$$\begin{aligned} p = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2)p(\mathbf{a}_i) + \frac{9}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{d+1} \lambda_i\lambda_j(3\lambda_i - 1)p(\mathbf{a}_{iij}) \\ & + 27\sum_{i<j<k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k p(\mathbf{a}_{ijk}). \end{aligned} \tag{1.4}$$

d-simpleks tipa (3)
$P_K = \mathbb{P}_3(K), \quad \mathrm{dim} P_K = (d+1)(d+2)(d+3)/6$
$\Sigma_K = \{p(\mathbf{a}_i),\ 1 \leq i \leq d+1,\ p(\mathbf{a}_{iij}),\ 1 \leq i,j \leq d+1, i \neq j,$ $p(\mathbf{a}_{ijk}),\ 1 \leq i < j < k \leq d+1\}.$

Ova se konstrukcija može nastaviti za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$. Globalna neprekidnost se postiže na isti način kao za polinome prvog i drugog stupnja.

Napomena 1.1 *Konačni element se strogo definira kao trojka (K, P_K, Σ_K), gdje je K skup, P_K je konačnodimenzionalni prostor funkcija na K i Σ_K skup stupnjeva slobode. Stupnjevi slobode su općenito* funkcionali *na prostoru funkcija P_K. Kod simplicijalnih elemenata K je simpleks, P_K je odgovarajući prostor polinoma, a Σ_K je prostor funkcionala oblika $\phi(p) = p(\mathbf{a}_l)$, gdje su $\mathbf{a}_l$ nodalne točke simpleksa.*

Kao stupnjevi slobode u konačnom elementu mogu se pojaviti i vrijednosti derivacija u nodalnim točkama (Hermiteovi elementi) i vrijednosti integralnog tipa kao $\int_K p(x)\,dx$. Kada su jedini stupnjevi slobode vrijednosti funkcije u nodalnim točkama, onda kažemo da je element Lagrangeov. *Simplicijalni elementi su, dakle, predstavnici Lagrangeovih elemenata.*

Osnovno svojstvo koje konačni element mora zadovoljavati je unisolventnost*: Stupnjevi slobode u Σ_K moraju na jedinstven način određivati funkciju iz P_K.*

Neka je zadana triangulacija pomoću d-simpleksa tipa (k), $k \geq 1$, koja zadovoljava svojstva (T1)–(T4). Simetričan raspored nodalnih točaka u svakom elementu i uvjet poklapanja stranica susjednih elemenata ima za posljedicu da se nodalne točke dva susjedna elementa podudaraju na zajedničkoj stranici.

Označimo skup svih nodalnih točaka u cijeloj triangulaciji s $\mathcal{N}_h$. On se sastoji od svih nodalnih točaka svih elemenata triangulacije. Prostor X_h na triangulaciji s d-simpleksima tipa (k) definiran je kao prostor svih funkcija na $\overline{\Omega}$ koje su na svakom elementu polinomi stupnja najviše k. Te funkcije općenito imaju skokove na granicama elemenata. U prostoru X_h promatramo samo one funkcije koje su jednoznačno definirane u točkama skupa $\mathcal{N}_h$. Drugim riječima, to su funkcije koje u nodalnim točkama koje se nalaze na granici dva ili više elementa primaju istu vrijednost u svim elementima koji ih sadrže. Skup svih takvih funkcija je naš prostor konačnih elemenata $V_h \subset X_h$. Svaka funkcija iz V_h posve je određena svojim vrijednostima u skupu $\mathcal{N}_h$, pa vrijednosti funkcije u tim točkama predstavljaju globalne stupnjeve slobode. Skup globalnih stupnjeva slobode označavamo s

$$\Sigma_h = \{v_h(\mathbf{b})\colon \mathbf{b} \in \mathcal{N}_h\}.$$

Evidentno je prostor V_h linearan i $\dim(V_h) = \mathrm{card}(\Sigma_h)$. Time smo dokazali:

Teorem 1.1 Neka je V_h prostor konačnih elemenata konstruiran pomoću d-simpleksa tipa (k), za $k \geq 1$. Tada vrijedi

$$V_h \subset C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega).$$

Konačno, kanonsku bazu u V_h definiramo na sljedeći način: Indeksiramo skup $\mathcal{N}_h$ tako da bude $\mathcal{N}_h = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots\}$ i definiramo

$$w_i \in V_h, \quad w_i(\mathbf{b}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, \mathrm{card}(\Sigma_h).$$

Funkcije $(w_1, \dots, w_{\mathrm{card}(\Sigma_h)})$ očito čine jednu bazu koju nazivamo nodalna baza. Lako se provjerava da bazne funkcije imaju malen nosač: funkcija w_i ima za nosač uniju svih elemenata koji sadrže nodalnu točku $\mathbf{b}_i$.

Napomena 1.2 *Ako imamo Dirichletov rubni uvjet na dijelu granice $\Gamma_D \subset \partial\Omega$, onda se funkcije iz prostora V moraju poništavati na Γ_D. Da bismo imali $V_h \subset V$ i funkcije iz V_h se moraju poništavati na Γ_D. To se postiže tako da se Dirichletova granica egzaktno prekrije s konačnim elemntima te da se u svim nodalnim točkama koje leže na Γ_D stavi vrijednost funkcije $v \in V_h$ na nulu. Tada će se v poništavati na čitavom Γ_D i aproksimacija će biti konformna. Stavljanje na nulu funkcije u jednom broju nodalnih točaka znači smanjenje broja stupnjeva slobode.*

1.4 Interpolacijski operatori

Interpolacijski operator ima centralnu ulogu u ocjeni greške metode konačnih elemenata. Za sve Lagrangeove konačne elemente definira se na isti način. Prvo definiramo lokalni interpolacijski operator.

Definicija 1.1 Neka je (K, P_K, Σ_K) simplicijalni element tipa (k), $k \geq 1$, te neka su $p_1, \dots, p_N$ lokalne bazne funkcije, a $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$ nodalne točke. Tada preslikavanje $\Pi_K \colon C(K) \to P_K$, definirano formulom

$$(\Pi_K v)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} v(\mathbf{a}_i) p_i(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

nazivamo interpolacijski operator pridružen elementu (K, P_K, Σ_K).

Interpolacijski operator funkciji $v(\mathbf{x})$ pridružuje funkciju iz prostora P_K (polinom stupnja $\leq k$) koja u nodalnim točkama prima iste vrijednosti kao i $v(\mathbf{x})$. Takva je funkcija jedinstvena, pa je operator dobro definiran.

Definicija 1.2 Neka je V_h prostor konačnih elemenata konstruiran pomoću simplicijalni element tipa (k), $k \geq 1$, te neka su $w_1, \dots, w_M$ globalne bazne funkcije, a $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_M$ nodalne točke triangulacije. Tada preslikavanje $\Pi_h \colon C(\overline{\Omega}) \to V_h$, definirano formulom

$$(\Pi_h v)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} v(\mathbf{b}_i) w_i(\mathbf{x}) \tag{1.6}$$

nazivamo (globalni) interpolacijski operator u prostoru V_h.

Globalni interpolacijski operator funkciji $v(\mathbf{x})$ pridružuje funkciju iz prostora V_h koja prima u nodalnim točkama triangulacije iste vrijednosti kao i $v(\mathbf{x})$. Globalni i lokalni interpolacijski operatori su u jednostavnoj vezi: za svako $v \in C(\overline{\Omega})$ i za svaki element K triangulacije $\mathcal{T}_h$ vrijedi

$$(\Pi_h v)\big|_K = \Pi_K v. \tag{1.7}$$

U dimenziji $d \geq 2$ interpolacijski operator nije dobro definiran na prostoru $H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, stoga što ne vrijedi $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ (ta je inkluzija istinita samo za $d = 1$). Zbog toga interpolacijski operator promatramo na potprostoru $H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ili na nekom još užem protprostoru. U dvije i tri prostorne dimenzije vrijedi $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, pa stoga najčešće operator Π_h promatramo na funkcijama iz $H^2(\Omega)$.

1.5 Afina familija elemenata

Simplicijalne je elemente moguće generirati polazeći od jednog elementa pomoću afinog preslikavanja. Ta se činjenica koristi u teoriji za dokazivanje greške interpolacije, ali i kod kodiranja metode. Obično se fiksira jedan element, takozvani referentni element, a svi drugi elementi triangulacije dobivaju se afinim preslikavanjem referentnog elemnta.

Objasnimo to na primjeru trokuta tipa 2. Fiksirajmo jedan trokut tipa 2, $\hat{K}$, s vrhovima $\hat{\mathbf{a}}_i$ te polovištima stranica $\hat{\mathbf{a}}_{ij} = (\hat{\mathbf{a}}_i + \hat{\mathbf{a}}_j)/2$, $1 \leq i, j \leq 3$. Stupnjevi slobode su

$$\hat{\Sigma} = \{p(\hat{\mathbf{a}}_i),\ i = 1, 2, 3,\ \ p(\hat{\mathbf{a}}_{ij}),\ \ 1 \leq i < j \leq 3\},$$

a prostor funkcija je $\hat{P} = \mathbb{P}_2(\hat{K})$. Za svaki element K iz triangulacije postoji jedinstveno afino preslikavanje

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K$$

koje je invertibilno i za koje je $F_K(\hat{\mathbf{a}}_i) = \mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3$, gdje su $\mathbf{a}_i$ vrhovi trokuta K. Takvo se preslikavanje lagano konstruira pomoću baricentričkih koordinata formulom:

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{a}_i.$$

Evidentno je

$$F_K(\hat{\mathbf{a}}_{ij}) = \mathbf{a}_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$

pa je prirodno na K definirati prostor funkcija P_K na sljedeći način:

$$P_K = \{p\colon K \to \mathbb{R}\colon p = \hat{p} \circ F_K^{-1},\ \ \hat{p} \in \hat{P}\}.$$

Budući da je preslikavanje afino, evidentno imamo

$$P_K = \mathbb{P}_2(K).$$

Zaključujemo da je da trokut tipa 2, (K, P_K, Σ_K), možemo u potpunosti opisati pomoću referentnog trokuta tipa 2, $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, i afinog preslikavanja F_K na sljedeći način:

$$\begin{aligned} K &= F_K(\hat{K}), \\ P_K &= \{p\colon K \to \mathbb{R}\colon p = \hat{p} \circ F_K^{-1},\;\; \hat{p} \in \hat{P}\} \\ \Sigma_K &= \{p(F_K(\hat{\mathbf{a}}_i)),\; i = 1, 2, 3,\;\; p(F_K(\hat{\mathbf{a}}_{ij})),\;\; 1 \le i < j \le 3\}. \end{aligned}$$

Za elemente (K, P, Σ) i $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ tada kažemo da su afino ekvivalentni (pokažite da se radi o relaciji ekvivalencije). Pripadni lokalni interpolacijski operatori su u sljedećem odnosu:

$$(\Pi_K v) \circ F_K = \Pi_{\hat{K}}(v \circ F_K).$$

Ista tvrdnja vrijedi za sve simplicijane elemente, pa govorimo da simplicijalni elementi čine afinu familiju elemenata. S praktične strane ta se činjenica koristi tako da se konstruira samo referentni element, a za svaki element triangulacije pamti se samo njegovo afino preslikavanje. Bazne se funkcije konstruiraju samo na referentnom elementu i formule numeričke integracije koriste se samo na referentnom elementu. Sva računanja na proizvoljnom elementu triangulacije K prenose se na referentni element putem preslikavanja F_K.

1.6 Zadaci

1. $\dim(\mathbb{P}_k) = \binom{n+k}{k}$. Ako K ima neprazan interior, onda $\mathbb{P}_k$ i $\mathbb{P}_k(K)$ imaju istu dimenziju.

2. Dokažite da točke $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}$ ne leže u istoj hiperravnini ako i samo ako je matrica (1.2) regularna.