

Dodatak A

Prostori diferencijabilnih funkcija i prostori Soboljeva

A.1 Diferencijalni operatori

Domena u \mathbb{R}^n je svaki otvoren i povezan skup. Kanonsku bazu u \mathbb{R}^n označavamo s $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Skalarni produkt označavamo točkom (\cdot) , a normu s $|\cdot|$.

Parcijalne derivacije funkcije $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ označavamo s

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \partial_i u(x) = u_{x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_{ij}^2 u(x) = u_{x_i x_j}, \dots$$

Za označavanje viših derivacija uvodimo pojam multiindeksa. Multiindeks je svaka n -torka $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a duljina multiindksa je broj

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Govorimo još da je α multiindeks reda $|\alpha|$. Multiindeks koristimo na sljedeće načine:

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}};$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$D^k u(x) = \{\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ je skup svik k -tih parcijalnih derivacija. Posebno imamo gradijent

$$Du(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x)) = \nabla u(x);$$

i hesijan

$$D^2 u(x) = \begin{bmatrix} \partial_{11}^2 u(x) & \dots & \partial_{1n}^2 u(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1}^2 u(x) & \dots & \partial_{nn}^2 u(x) \end{bmatrix}.$$

Laplaceov operator:

$$\Delta u(x) = \operatorname{tr}(D^2 u(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Gradijent vektorske funkcije $\mathbf{u}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je matrica

$$D\mathbf{u}(x) = \nabla \mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1(x) & \cdots & \partial_n u_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 u_n(x) & \cdots & \partial_n u_n(x) \end{bmatrix}.$$

U i -tom retku matrice nalazi se gradijent i -te komponente funkcije. Laplaceov operator vektorske funkcije definira se po komponentama:

$$\Delta \mathbf{u}(x) = (\Delta u_i(x)).$$

Divergencija vektorske funkcije:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}.$$

Posebno je

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u(x)).$$

Rotacija vektorske funkcije u \mathbb{R}^3 :

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} \partial_2 u_3(x) - \partial_3 u_2(x) \\ \partial_3 u_1(x) - \partial_1 u_3(x) \\ \partial_1 u_2(x) - \partial_2 u_1(x) \end{bmatrix} = (\text{formalno}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \end{vmatrix}.$$

Zadatak A.1 Neka je $\phi(x)$ skalarna glatka funkcija, a $\mathbf{u}(x)$ vektorska. Dokažite formulu

$$\operatorname{div}(\phi(x)\mathbf{u}(x)) = \phi(x) \operatorname{div} \mathbf{u}(x) + \nabla \phi(x) \cdot \mathbf{u}(x). \quad \square$$

Prostori neprekidnih funkcija

$$C(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: u \text{ je neprekidna na } \Omega\},$$

$$C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega): D^\alpha u \in C(\Omega) \text{ za sve } |\alpha| \leq k\}, \quad k = 1, \dots$$

$$C^0(\Omega) = C(\Omega)$$

$$C(\overline{\Omega}) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: u \text{ je uniformno neprekidna na } \Omega\},$$

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}): D^\alpha u \in C(\overline{\Omega}) \text{ za sve } |\alpha| \leq k\}, \quad k = 1, \dots$$

$$C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$$

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Nosač funkcije:

$$\text{supp}u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

$$C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) : u \text{ ima kompaktan nosač}\}$$

Prostor test-funkcija:

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_c^k(\Omega).$$

Teorem o divergenciji. Za dovoljno regularno područje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i dovoljno glatku vektorsku funkciju $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \text{div} \mathbf{F}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{n}(x) dS$$

gdje je \mathbf{n} polje jedinične vanjske normale na $\partial\Omega$. Posebno je

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) dS.$$

Pišemo

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x).$$

Za linearnu PDJ-u drugog reda kažemo da je u divergentnoj formi ako se može zapisati u obliku

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x).$$

Takvu jednadžbu češće pišemo u vektorskoj notaciji

$$-\text{div}(\mathbf{A}(x)\nabla u) + \mathbf{b}(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f(x).$$

Ako su koeficijenti a_{ij} dovoljno glatki, onda se jednadžba može iz nedivergentnog oblika prebaciti u divergentni i obratno. Pri tome se matrica \mathbf{A} ne mijenja.

Rubne zadaće za PDJ. Za različite tipove PDJ-bi zadaju se različiti uvjeti na granici domene. Evo nekoliko primjera.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & x \in \Omega & \text{Dirichletova zadaća} \\ u &= u_0 & x \in \partial\Omega & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & x \in \Omega & \text{Neumannova zadaća} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g & x \in \partial\Omega & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f & x \in \Omega, t > 0 \\ u &= u_0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \quad \text{rubni uvjet} \\ u|_{t=0} &= v_0 & x \in \Omega \quad \text{početni uvjet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f & x \in \Omega, t > 0 \\ u &= u_0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \quad \text{rubni uvjet} \\ u|_{t=0} &= v_0 & x \in \Omega \quad 1. \text{ početni uvjet} \\ u_t|_{t=0} &= v_1 & x \in \Omega \quad 2. \text{ početni uvjet} \end{aligned}$$

U ovim primjerima f , g , u_0 , v_0 i v_1 su zadani podaci, a u je nepoznanica.

Rubni i početni uvjeti za diferencijalnu jednadžbu određeni su fizikalnim smislom promatranog problema. S matematičke strane oni moraju biti odabrani tako da zadaća bude korektno postavljena u smislu ove definicije:

Definicija A.1 (Hadamard) Rubna zadaća za PDJ je dobro postavljena (korektna) ako ima jedinstveno rješenje koje neprekidno ovisi o zadanim podacima.

A.2 L^p prostori

Pretpostavljamo da je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup opskrbljen Lebesgueovom mjerom naslijeđenom s \mathbb{R}^n . Za dvije funkcije $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da su jednake skoro svuda i pišemo

$$f = g \quad \text{s.s.}$$

ako postoji skup $A \subset \Omega$ Lebesgueove mjere jednake nuli, takav da je

$$\forall x \in \Omega \setminus A, \quad f(x) = g(x).$$

Svake takve dvije funkcije smatrat ćemo jednakim.

Definicija A.2 Za $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ definiramo

$$L^p(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ je izmjeriva i } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

Uvodimo oznaku

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Definicija A.3

$$L^\infty(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ je izmjeriva i } \exists \text{ konstanta } C \text{ tdj. } |f(x)| \leq C \text{ s.s.}\}.$$

Uvodimo oznaku

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ s.s.}\}.$$

Uvijek imamo

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ s.s.}$$

Ako je f neprekidna funkcija, onda je

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Definicija A.4 Za funkciju kažemo da je lokalno integrabilna na Ω ako je integrabilna na svakom kompaktnom podskupu od Ω . Prostor svih lokalno integrabilnih funkcija označavamo $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Nejednakost

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

koja je korisna u mnogim situacijama, može se generalizirati na sljedeći način. Prvo uvedemo konjugirane indekse (eksponente):

Definicija A.5 Neka je $1 \leq p \leq \infty$. Konjugirani indeks p' definiran je relacijom

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Za $p = \infty$ imamo $p' = 1$ i obratno.

Zatim imamo:

Lema A.1 Youngova nejednakost: Neka su $a, b \geq 0$ i $1 < p < \infty$. Tada je

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

Dokaz. Koristimo činjenicu da je funkcija $E(x) = e^x$ konveksna. Imamo,

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln a + \ln b} = E\left(\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{p'} \ln b^{p'}\right) \\ &\leq \frac{1}{p}E(\ln a^p) + \frac{1}{p'}E(\ln b^{p'}) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}. \quad \square \end{aligned}$$

Zadatak A.2 Pokažite da za svako $a, b \geq 0$, $\varepsilon > 0$ i $1 < p < \infty$ vrijedi

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{1}{p'(p\varepsilon)^{p'/p}} b^{p'}.$$

Lema A.2 Hölderova nejednakost. *Neka je $1 \leq p \leq +\infty$ te $f \in L^p(\Omega)$ i $g \in L^{p'}(\Omega)$. Tada je $fg \in L^1(\Omega)$ i vrijedi*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Dokaz. a) Slučajevi $p = 1$ i $p = \infty$ su trivijalni.

b) $1 < p < \infty$. Tvrdnja je trivijalna ako je jedna od funkcija jednaka nuli. Pretpostavimo stoga da su obje različite od nule. Primjenom Youngove nejednakosti dobivamo

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx + \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx.$$

Ako tu nejednakost primijenim na funkcije $f(x)/\|f\|_p$ i $g(x)/\|g\|_{p'}$ dobivamo

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

odakle slijedi tvrdnja. \square

Lema A.3 Nejednakost Minkowskog. *Za svako $1 \leq p \leq \infty$ vrijedi*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Dokaz. Primjenom Hölderove nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} (|f(x)| + |g(x)|) dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \|f + g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p). \quad \square \end{aligned}$$

Iz nejednakosti Minkowskog lako se pokazuje da $L^p(\Omega)$ ima strukturu linearnog prostora i da je $\|f\|_p$ norma na $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p \leq \infty$. Ovi prostori imaju sljedeća svojstva:

Teorem A.1 • *Prostor $L^p(\Omega)$ je Banachov za $1 \leq p \leq \infty$;*

• *Prostor $L^2(\Omega)$ je Hilbertov sa skalarnim produktom*

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

Napomena A.1 *U slučaju kada želimo naglasiti domenu, koristit ćemo oznaku za normu $\|f\|_{p;\Omega}$ ili $\|f\|_{L^p(\Omega)}$. \square*

A.3 $W^{1,p}$ prostori

Pojam parcijalne derivacije generalizira se na sljedeći način:

Definicija A.6 Za funkciju $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ kažemo da ima slabu parcijalnu derivaciju po varijabli x_i , ako postoji funkcija $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, takva da za svako $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vrijedi

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx.$$

Funkcija g je tada slaba parcijalna derivacija funkcije f po x_i i koristimo standardnu oznaku

$$g = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Iz ove definicije je jasno da je klasična parcijalna derivacija, ako postoji, ujedno i slaba derivacija. Nadalje, lako se pokazuje da je slaba derivacija jedinstvena (dokažite!). Stoga je ovaj pojam dobro proširenje klasičnog pojma derivacije. U tekstu koji slijedi sve parcijalne derivacije se uzimaju u slabom smislu.

Za $1 \leq p \leq \infty$ definiramo

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n\}.$$

Prostor $W^{1,p}(\Omega)$ je očito linearan. Za $1 \leq p < \infty$ normu u njemu definiramo formulom

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^p dx \right)^{1/p}.$$

Za $p = \infty$ imamo

$$\|u\|_{1,\infty} = \max(\|u\|_{\infty}, \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\infty}).$$

Istaknuto mjesto ima slučaj $p = 2$, pa stoga taj prostor imamo posebnu oznaku

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega).$$

U taj prostor može se uvesti skalarni produkt formulom

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx.$$

Prostore $W^{1,p}(\Omega)$ nazivamo prostorima Soboljeva prvog reda. Posve analogno se definiraju prostori Soboljeva višeg reda ($m = 1, 2, 3, \dots$).

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^{\alpha} u \in L^p(\Omega), \text{ za sve } |\alpha| \leq m\}.$$

Normu definiramo na sljedeći način: Za $1 \leq p < \infty$,

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

te za $p = \infty$,

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} u\|_{\infty}.$$

Ponovo, u slučaju $p = 2$ dobivamo prostor sa skalarnim produktom koji označavamo

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),$$

a skalarni produkt je dan formulom

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u(x) \partial^{\alpha} v(x) dx.$$

Napomena A.2 U slučaju kada želimo naglasiti domenu, koristit ćemo oznaku za normu $\|u\|_{m,p;\Omega}$ ili $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Svi prostori Soboljeva su potpuni.

Teorem A.2 Za $m \in \{1, 2, \dots\}$ i $p \in [1, \infty]$ prostor $W^{m,p}(\Omega)$ je Banachov. Prostor $H^m(\Omega)$ je Hilbertov.

Neka je $\partial\Omega$ oznaka za rub domene (granicu) Ω . Mi ćemo uvijek pretpostavljati da je to ploha određene glatkoće (vidi sekciju A.3.2). Definiramo prostor:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{\phi \in W^{1,p}(\Omega) : \phi(x) = 0 \text{ za } x \in \partial\Omega\}.$$

Koristimo oznaku

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

U prostorima $W^{m,p}$ se definiraju polunorme

$$|u|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

za $1 \leq p < \infty$, te analogno za $p = \infty$. U tim se polunormama pojavljuju samo parcijalne derivacije najvišeg reda.

Teorem A.3 (Poincaréova nejednakost) Ako je domena Ω ograničena barem u jednom smjeru, onda postoji konstanta $c = c(\Omega, p)$ takva da za svako $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vrijedi

$$\|u\|_{L^p} \leq c|u|_{1,p}, \quad (1 \leq p < \infty). \quad (\text{A.1})$$

Dokaz. Dokazat ćemo teorem u slučaju $p = 2$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da se domena nalazi unutar pruge $a < x_n < b$. Uzmimo proizvoljnu funkciju $v \in H_0^1(\Omega)$ i proširimo ju nulom izvan skupa Ω . Imamo

$$v(x', x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', t) dt.$$

Cauchyjeva nejednakost daje

$$|v(x', x_n)|^2 \leq (x_n - a) \int_a^{x_n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt,$$

pa integriranjem po prvim $n - 1$ varijabli slijedi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x', x_n)|^2 dx' &\leq (x_n - a) \int_a^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dx' dt. \\ \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x', x_n)|^2 dx' dx_n &\leq \frac{1}{2}(b - a)^2 \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dx' dt. \end{aligned}$$

Budući da je funkcija jednaka nuli izvan Ω slijedi

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}(b - a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) \right|^2 dx. \quad \square$$

Promjenom Poincaréove nejednakosti dobivamo sljedeću ekvivalenciju normi na $H_0^1(\Omega)$:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \|u\|_{1,2} \leq |u|_{1,2} \leq \|u\|_{1,2}.$$

Zadatak A.3 Dokažite teorem u slučaju $p \neq 2$. \square

Napomena A.3 Poincaréova nejednakost (A.1) vrijedi i za funkcije koje se poništavaju samo na dijelu granice domene Ω . Dokaz te tvrdnje više nije konstruktivan kao dokaz Teorema A.3, već, na primjer, treba koristiti metodu od protivnog i pojam slabe konvergencije.

A.3.1 Singulariteti $W^{1,p}$ funkcija

Funkcije iz prostora L^p mogu biti neograničene (za $p < \infty$). Moraju li funkcije iz $W^{1,p}$ biti ograničene ovisi o odnosu dimenzije prostora i indeksa p . Za $n = 1$ imamo ovaj rezultat

Teorem A.4 $W^{1,p}(a, b) \subset C([a, b])$ i vrijedi

$$u(x) - u(y) = \int_x^y u'(z) dz.$$

Sve funkcije iz $W^{1,p}(a, b)$ su neprekidne na segmentu $[a, b]$, pa su stoga i ograničene. Već u dvije dimenzije ovo svojstvo se gubi.

Zadatak A.4 Pokažite da funkcija

$$u(x, y) = \ln \ln \frac{2}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

pripada prostoru $H^1(\Omega)$, $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$.

Zadatak A.5 Pokažite da funkcija

$$u(x) = r^{-\alpha}, \quad r = |x|,$$

pripada prostoru $H^1(\Omega)$, $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, za $\alpha < (n - 2)/2$.

Iz ovih primjera vidimo da funkcije sa slabom derivacijom ne moraju biti niti neprekidne niti ograničene.

Teorem A.5 Za $1 \leq p \leq \infty$ i bilo koju domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi

- Za $1 \leq p < n$ vrijedi $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ za $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;
- Za $p = n$ vrijedi $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ za sve $q \in [p, \infty)$;
- Za $p > n$ vrijedi $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ i štoviše imamo

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{1,p} |x - y|^\alpha$$

gdje je $\alpha = 1 - n/p$ i $C = C(n, p, \Omega)$.

Isti teorem vrijedi i za funkcije iz $W^{1,p}(\Omega)$, ako se na Ω stave dodatne pretpostavke o glatkoći granice.

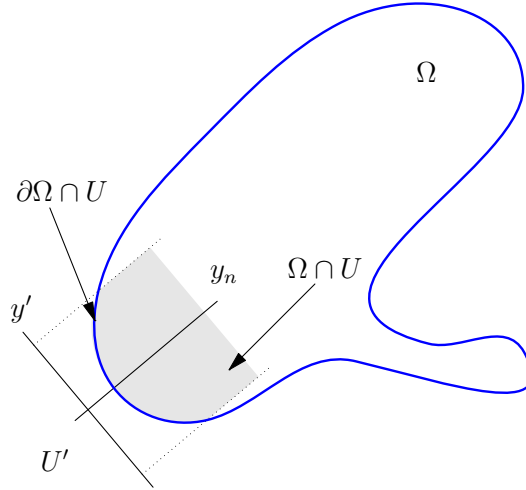
A.3.2 Regularnost granice

Uzet ćemo radi jednostavnosti da je domena Ω ograničena, što je za naše potrebe sasvim dovoljno.

Definicija A.7 Ograničena domena $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je Lipschitzova (klase C^k) ako za svaku točku $x \in \partial\Omega$ postoji okolina U i sustav ortogonalnih koordinata $y = (y', y_n)$, gdje je $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$, takvi da vrijedi:

1. U novim koordinatam U je hiperkocka

$$U = \{y \in \mathbb{R}^n : -a_j < y_j < a_j, j = 1, 2, \dots, n\}.$$



Slika A.1: Lokalna parametrizacija granice

2. Postoji Lipschitzova (klase C^k) funkcija ϕ definirana na

$$U' = \{y' \in \mathbb{R}^n : -a_j < y_j < a_j, j = 1, 2, \dots, n-1\},$$

koja zadovoljava

$$\forall y' \in U', \quad |\phi(y')| \leq a_n/2$$

$$\Omega \cap U = \{y : y_n > \phi(y')\}, \quad \partial\Omega \cap U = \{y : y_n = \phi(y')\}.$$

Ova definicija znači da se lokalno granica skupa može prikazati kao graf Lipschitzove funkcije, te da se skup lokalno nalazi samo s jedne strane granice. Uočimo još da zbog ograničenosti domene, njena granica je kompaktan skup te stoga možemo uvijek odabrati konačan skup ovakvih karata koje pokrivaju cijelu granicu.

U Lipschitzovoj domeni vrijede teoremi ulaganja za $W^{1,p}$ prostor.

Teorem A.6 Za $1 \leq p \leq \infty$ i bilo ograničenu Lipschitzovu domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi

- Za $1 \leq p < n$ vrijedi $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ za $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;
- Za $p = n$ vrijedi $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ za sve $q \in [p, \infty)$;
- Za $p > n$ vrijedi $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ i štoviše imamo

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{1,p} |x - y|^\alpha$$

gdje je $\alpha = 1 - n/p$ i $C = C(n, p, \Omega)$.

Kada je rub domene dovoljno gladak (Lipschitzov) onda se mogu definirati L^p prostori na rubu $\partial\Omega$. Pri tome vrijedi:

Teorem A.7 (Teorem o tragu) Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena Lipschitzova domena. Tada postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$\forall v \in W^{1,p}(\Omega), \quad \|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{1,p}.$$

Napomena o literaturi. Prostori diferencijabilnih funkcija i prostori Soboljeva obrađeni su na jednostavan način u [3]. Više detalja se može naći u [4] i [2]. Osnovne definicije i rezultati se mogu naći u svakoj knjizi iz konačnih elemenata (npr, [1]).

Bibliografija

- [1] Alberto Valli Alfio Quarteroni. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, volume 23 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Berlin, 1997.
- [2] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.
- [3] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [4] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1998.