

# Diskretizacija evolucijske jednadžbe

Praktikum primijenjene matematike 2

ak. god. 2004./05.

## 1 Rubna zadaća

Uzmimo primjer rubne zadaće za parabolčku jednadžbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u = f \quad \text{u } \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

gdje je  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ograničena domena i  $\mu > 0$  konstanta.

Diferencijalnoj jednadžbi treba pridružiti početni i rubni uvjet. Uzmimo za početak najjednostavniji homogeni Dirichletov rubni uvjet:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} &= u_0 \quad \text{u } \Omega. \end{aligned}$$

Funkcija  $u_0(\mathbf{x})$  je zadana i da bi bila kompatibilna s rubnim uvjetom mora se poništavati na rubu domene  $\Omega$ .

## 2 Varijacijska formulacija

Varijacijska formulacija evolucijske rubne zadaće formira se posve analogno kao za eliptičku zadaću. Pri tome se kompliciraju funkcijski prostori u kojima se traži rješenje.

Kao i kod eliptičke zadaće tražit ćemo da rješenje  $u(\cdot, t)$  pripada prostoru  $H_0^1(\Omega)$ , za svako  $t \in [0, T)$ . Stoga se prirodno funkcija  $u(x, t)$  ne promatra kao funkcija varijabli  $\mathbf{x}$  i  $t$ , već kao preslikavanje  $t \mapsto u(\mathbf{x}, t)$ , koje svakom

$t \in (0, T)$  pridružuje jednu funkciju iz prostora  $H_0^1(\Omega)$ . O te se funkcije minimalno traži da joj je norma kvadratno integrabilna, tj.

$$\int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \int_{\Omega} \left( u(\mathbf{x}, t)^2 + \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right)^2 \right) d\mathbf{x} dt < \infty.$$

Skup svih takvih funkcija je linearan prostor (štoviše i Hilbertov) i označava se s

$$L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Za funkciju desne strane  $f(x, t)$  pretpostavit ćemo da je kvadratno integrabilna na  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ , tj.

$$\int_0^T \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t)^2 d\mathbf{x} dt = \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt < \infty.$$

Ponovo je prirodno  $f$  promatrati kao funkciju sa  $(0, T)$  u  $L^2(\Omega)$  i imamo

$$L^2(Q_T) = L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Varijacijsku formulaciju dobivamo množenjem diferencijalne jednadžbe s test funkcijom iz  $H_0^1(\Omega)$  i parcijalnom integracijom. Kao i kod eliptičke jednadžbe Dirichletov rubni uvjet se ugrađuje u prostor:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mu \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Parcijalna integracija:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x})) - \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} v(\mathbf{x}) ds - \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili da je  $v(\mathbf{x}) = 0$  za sve  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Time smo dobili

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mu \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2)$$

za sve  $v \in H_0^1(\Omega)$  i sve  $t \in (0, T)$ . Rješenje  $u(\mathbf{x}, t)$  traži se u prostoru funkcija iz  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  koje imaju vremenske derivacije

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

**Napomena:** Na vremensku derivaciju se obično postavlja slabiji uvjet, ali je za to potrebno uvesti dodatne funkcijske prostore.  $\square$

### 3 Diskretizacija

Izvodi se u dva koraka.

1. Prvo se diskretizira vremenska derivacija metodom konačnih diferencija.

To znači da se uvede vremenski korak  $\Delta t$  i niz vremenskih točaka  $t^m = m\Delta t$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $m\Delta t \leq T$ . Zatim se vremenska derivacija aproksimira nekom diferencijskom formulom. Najjednostavnije je uzeti diferenciju unazad:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t^{m+1}) \approx \frac{1}{\Delta t} (u(\mathbf{x}, t^{m+1}) - u(\mathbf{x}, t^m)).$$

Uvedimo oznaku  $u^m(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t^m)$ . Uvrštavanjem u (2) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (u^{m+1}(\mathbf{x}) - u^m(\mathbf{x}))v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \mu \int_{\Omega} \nabla u^{m+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

i za sve  $m = 0, 1, 2, \dots$ . U svakom koraku  $u^m$  je poznato, a  $u^{m+1}$  se izračunava. Stoga ćemo pisati (za  $m = 0, 1, \dots$ )

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{m+1}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \mu\Delta t \int_{\Omega} \nabla u^{m+1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ = \Delta t \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} u^m(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

2. Dobivenu semidiskretiziranu varijacijsku jednadžbu aproksimiramo metodom konačnih elemenata kao i u eliptičkom slučaju.