

1

Računanje funkcija

1.1 Polinomi

Hornerov algoritam je efikasan način računanja vrijednosti polinoma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0. \quad (1.1)$$

Uzmimo radi određenosti da je stupanj od $p(z)$ jednak n ($a_n \neq 0$) i da ga želimo izračunati u točki z_0 . Dijeljenjem sa $z - z_0$

$$p(z) = (z - z_0)q(z) + p(z_0),$$

dobivamo ostatak $p(z_0)$ koji želimo izračunati. Polinom $q(z)$ je stupnja $n - 1$ i možemo ga zapisati u obliku

$$q(z) = b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_1 z + b_0.$$

Nepoznate koeficijente dobivamo iz jednakosti

$$\begin{aligned} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \\ = (z - z_0)(b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_1 z + b_0) + p(z_0) \end{aligned}$$

što daje

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - z_0 b_{n-1} \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - z_0 b_{n-2} \\ &\dots \\ a_1 &= b_0 - z_0 b_1 \\ a_0 &= p(z_0) - z_0 b_0. \end{aligned}$$

Time smo dobili rekurziju kojom možemo izračunati koeficijente b_i i vrijednost $p(z_0)$.

Ako nam koeficijenti polinoma $q(z)$ nisu potrebni algoritam možemo napisati pomoću samo jedne pomoćne varijable.

Algoritam 1 Hornerov algoritam

Ulaz: $n, z_0, (a_i, i = 0, 1, \dots, n)$
 n = stupanj polinoma
 z_0 = točka u kojoj računamo polinom
 $(a_i, i = 0, 1, \dots, n)$ = koeficijenti polinoma, poredani kao u (1.1)
 $b = a_n$
for $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ **do**
 $b = a_k + z_0 b$
end for
Izlaz: $b = p(z_0)$

Primjer 1.1 Ako pogledamo jedan jednostavan primjer ($n = 3$). Imamo

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = (z - z_0)(b_2 z^2 + b_1 z + b_0) + p(z_0)$$

što vodi do rekurzije

$$\begin{aligned} b_2 &= a_3 \\ b_1 &= z_0 b_2 + a_2 \\ b_0 &= z_0 b_1 + a_1 \\ p(z_0) &= z_0 b_0 + a_0. \end{aligned}$$

Sada je lako uočiti da algoritam odgovara sljedećoj faktorizaciji polinoma

$$p(z) = ((a_3 z_0 + a_2) z_0 + a_1) z_0 + a_0$$

pri čemu računaje ide od unutarnje zagrade prema vanjskoj.

Rekurzivni algoritam računanja polinoma (u kojem z^k računamo kao $z * z^{k-1}$) treba $2n - 1$ množenja i n zbrajanja, dok Hornerov algoritam treba n množenja i n zbrajanja.

Ako zapamtimo koeficijente b_i , Hornerov algoritam moguće je primijeniti na njih. Time dobivamo faktorizaciju

$$q(z) = \frac{p(z) - p(z_0)}{z - z_0} = (z - z_0)(c_{n-2} z^{n-2} + \dots + c_1 z + c_0) + q(z_0),$$

odnosno

$$p(z) = (z - z_0)^2 (c_{n-2} z^{n-2} + \dots + c_1 z + c_0) + q(z_0)(z - z_0) + p(z_0),$$

Evidentno je

$$q(z_0) = p'(z_0).$$

Ponavljajući ovaj postupak n puta dolazimo do Taylorovog razvoja polinoma

$$p(x) = d_n (z - z_0)^n + d_{n-1} (z - z_0)^{n-1} + \dots + d_2 (z - z_0)^2 + d_1 (z - z_0) + d_0, \quad (1.2)$$

gdje je

$$d_k = \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Algoritam je moguće implementirati tako da koristimo samo polje ulaznih koeficijenata. Na izlazu ono će sadržavati polje koeficijenta d_k . U početnom koraku Hornerov algoritam primijenimo na koeficijente a_0, a_1, \dots, a_n . Nakon toga $d_0 = a_0$. Zatim algoritam primjenimo na a_1, \dots, a_n , što će nam dati $d_1 = a_1$ itd.

Algoritam 2 Potpuni Hornerov algoritam

Računa razvoj polinoma u Taylorov red u zadanoj točki.

Ulaz: $n, z_0, (a_i, i = 0, 1, \dots, n)$

n = stupanj polinoma

z_0 = točka u kojoj računamo razvoj

$(a_i, i = 0, 1, \dots, n)$ = koeficijenti polinoma, poredani kao u (1.1)

for $k = 0, 1, \dots, n - 1$ **do**

for $j = n - 1, n - 2, \dots, k$ **do**

$a_j = a_j + z_0 a_{j+1}$

end for

end for

Izlaz: $(a_i, i = 0, 1, \dots, n)$ koeficijenti Taylorovog razvoja polinoma $p(z)$ ($a_i = d_i$ iz formule (1.2)).

1.2 Zadaci

- Z1.1. Formirajte program koja uzima kao ulazne argumente koeficijente polinoma $a_i, i = 0, 1, \dots, n$, te interval (x_{\min}, x_{\max}) i crta polinom i njegove prve dvije derivacije na tom intervalu. Za crtanje odaberite fiksni broj točaka.
- Z1.2. Formirajte program koja uzima kao ulazne argumente koeficijente $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ polinoma $p_n(x)$, koeficijente $b_i, i = 0, 1, \dots, m$ polinoma $q_m(x)$ te interval (x_{\min}, x_{\max}) i crta racionalnu funkciju $p_n(x)/q_m(x)$ na tom intervalu. Za crtanje odaberite fiksni broj točaka. Kako ćete postupiti u slučaju singulariteta?