

1

Polinomijalna interpolacija

Problem polinomijalne interpolacije važan je zbog svojih primjena na numeričko deriviranje i integriranje. Zbog svojih nedostataka rijetko se koristi za aproksimaciju funkcija i rekonstrukciju iz konačnog skupa podataka, gdje je bolje iskoristiti aproksimativne algoritme kao što je metoda najmanjih kvadrata.

1.1 Lagrangeova interpolacija

Problem koji razmatramo u ovom poglavlju je sljedeći: Zadana je funkcija f , neprekidna na segmentu $[a, b]$, te $n + 1$ međusobno različitih točaka x_0, x_1, \dots, x_n iz segmenta $[a, b]$. Treba naći polinom p , minimalnog stupnja, koji se podudara s funkcijom f u zadanim točkama. To je problem polinomijalne interpolacije; polinom p nazivamo *interpolacijski polinom*.

Problem interpolacija javlja se u dva različita konteksta. Prvo, ako je algoritam za računanje funkcije f kompliciran i zahtijeva puno procesorskog vremena možemo izračunati funkciju u jednom broju točaka, a zatim njenu vrijednost u svakoj drugoj točki aproksimirati interpolacijskim polinomom. U drugoj situaciji raspoložemo samo jednim nizom mjerenja funkcije f i želimo aproksimirati $f(x)$ za argumente x izvan točaka mjerenja. U svakom slučaju, da bismo dobili korektnu aproksimaciju, razmak između interpolacijskih točaka ne smije biti velik i funkcija mora biti dovoljno glatka.

Uvedimo oznaku \mathbb{P}_n za vektorski prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n . Stupanj polinoma p ćemo označavati s $\deg(p)$.

Teorem 1.1 Neka su x_0, x_1, \dots, x_n međusobno različiti brojevi. Tada za proizvoljne brojeve y_0, y_1, \dots, y_n postoji jedinstven polinom $p \in \mathbb{P}_n$ takav da je

$$p(x_i) = y_i \quad \text{za} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Dokaz. *Jedinstvenost.* Kada bi postojala dva takva polinoma p i q , onda bi njihova razlika $p - q$ bio polinom najviše n -tog stupnja i imao bi $n + 1$ nultočku. No odatle slijedi da je $p = q \equiv 0$.

Egzistencija se dokazuje indukcijom. U slučaju jedne točke $n = 0$ traženi polinom je konstanta y_0 . U slučaju $n = 1$ imamo

$$p(x) = p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Pretpostavimo da smo konstruirali polinom $p_{k-1}(x)$, $\deg(p_{k-1}) \leq k - 1$, koji interpolira točke $(x_0, y_0), \dots, (x_{k-1}, y_{k-1})$. Tada definiramo

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}).$$

Očito je $\deg(p_k) \leq k$ i $p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) = y_i$ za $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Konstantu c određujemo iz uvjeta

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1}) = y_k.$$

Izlazi

$$c = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Iz dokaza vidimo da interpolacijski polinom možemo zapisati u obliku

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \quad (1.1)$$

ukoliko usvojimo konvenciju da je $\prod_{j=0}^{-1} (x - x_j) \equiv 1$. To je **Newtonova forma** interpolacijskog polinoma. Uočimo dvije činjenice o interpolacijskom polinomu.

1) Interpolacijski polinom kroz $k + 1$ točku dobiva se tako da se interpolacijskom polinomu kroz k točaka doda još jedan član.

2) Interpolacijski polinom ne ovisi o poretku interpolacijskih točaka.

Interpolacijski polinom možemo zapisati u sljedećoj formi:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x), \quad (1.2)$$

gdje su funkcije $l_i(x)$ dane formulama

$$l_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Zaista, svaka od tih funkcija je polinom stupnja n sa svojstvom $l_i(x_k) = \delta_{i,k}$ za $k = 0, 1, 2, \dots, n$. To je **Lagrangeova forma** interpolacijskog polinoma.

Uočimo da je polinomijalna interpolacija linearan proces. To znači da je preslikavanje L_n koje funkciji f pridružuje interpoland p_n linearan operator. Operator L_n je prirodno promatrati kao operator na prostoru neprekidnih funkcija $C([a, b])$.

Lagrangeova forma interpolacijskog polinoma manje je pogodna od Newtonove forme za efikasno računanje polinoma. Pokazat ćemo da ukoliko poznamo koeficijente c_i u formuli (1.1), vrijednost polinoma možemo izračunati verzijom Hornerovog algoritma. Koeficijente c_i možemo računati po formuli

$$c_i = \frac{y_i - p_{i-1}(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})} \quad (1.3)$$

no to se ne čini jer postoji efikasnija metoda putem podijeljenih razlika koju ćemo objasniti malo kasnije.

Pogledajmo prvo jedan primjer. Uvedimo radi kratkoće oznake $d_j = x - x_j$ i $u = p_n(x)$. U slučaju $n = 3$ trebamo izračunati $u = c_0 + c_1d_0 + c_2d_0d_1 + c_3d_0d_1d_2$. Taj izraz možemo zapisati u rekurzivnoj formi $u = c_0 + d_0(c_1 + d_1(c_2 + d_2(c_3)))$, odakle slijedi algoritam

$$u = c_3, \quad u = c_2 + d_2u, \quad u = c_1 + d_1u, \quad u = c_0 + d_0u.$$

Posljednja vrijednost je traženi u . Isto rasuđivanje vrijedi i u općenitom slučaju. Izraz (1.1) može se zapisati u obliku

$$u = \sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} d_j = c_0 + c_1d_0 + c_2d_0d_1 + \cdots + c_nd_0d_1 \cdots d_{n-1}.$$

Rekurzivno zapisano imamo

$$u = (\cdots(((c_n)d_{n-1} + c_{n-1})d_{n-2} + c_{n-2})d_{n-3} + \cdots + c_1)d_0 + c_0$$

odakle slijedi algoritam

```

u = c_n
for i = n - 1, ..., 0 do
    u = c_i + d_i * u
end for

```

Specijalizacijom na interpolacijski polinom dobivamo Algoritam 1.1.

Napomena. Interpolacijski smo polinom mogli tražiti u obliku

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Budući da p_n mora zadovoljavati $p_n(x_i) = y_i$, za $i = 0, 1, \dots, n$ dobivamo za koeficijente polinoma sljedeći sustav jednačbi:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Algoritam 1 Računanje vrijednosti interpolacijskog polinoma

Ulaz: $n, t, (x_0, x_1, \dots, x_n), (c_0, c_1, \dots, c_n)$
 n = stupanj polinoma,
 t = točka u kojoj se računa vrijednost polinoma,
 (x_0, x_1, \dots, x_n) = polje interpolacijskih točaka,
 (c_0, c_1, \dots, c_n) = polje koeficijenata.
// inicijalizacija
 $u = c_n$
for $i = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$ **do**
 $u = (t - x_i) * u + c_i$
end for
Izlaz: u = vrijednost polinoma.

Matrica ovog sustava je tzv. *Vandermondeova matrica*, koja je regularna, ali je loše uvjetovana za velike vrijednosti stupnja n . Stoga ovaj pristup ne vodi na stabilan algoritam računanja interpolacijskog polinoma. Dapače, postupa se suprotno i problem rješavanja sustava s Vandermondeovom matricom svodi se na problem polinomijalne interpolacije koji se zatim rješava podijeljenim razlikama (vidi [?]). \square

1.2 Podijeljene razlike

Obratimo sada pažnju na problem računanja koeficijenata interpolacijskog polinoma. U tu svrhu možemo interpolacijski polinom zapisati u Newtonovoj formi:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i q_i(x), \quad q_0(x) = 1, \quad q_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

gdje su koeficijenti c_i rješenja sustava algebarskih jednadžbi:

$$\sum_{i=0}^n c_i q_i(x_j) = f(x_j) \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Radi se o sustavu s donjom trokutastom matricom

$$\begin{bmatrix} q_0(x_0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_0(x_1) & q_1(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ q_0(x_2) & q_1(x_2) & q_2(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_0(x_n) & q_1(x_n) & q_2(x_n) & \cdots & q_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

stoga što je $q_i(x_j) = 0$ za $i > j$. Uočimo da c_0 ovisi samo o $f(x_0)$, c_1 o $f(x_0)$ i $f(x_1)$ itd. Koeficijent c_k označavamo s

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

i nazivamo k -ta **podijeljena razlika**. U interpolacijskom polinomu p_k podijeljena razlika c_k je koeficijent uz najvišu potenciju polinoma. Uočimo da je

$$c_0 = f[x_0] = f(x_0), \quad c_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Naziv podijeljena razlika opravdava sljedeći teorem.

Teorem 1.2 Neka su x_0, x_1, \dots, x_n međusobno različite točke. Tada za n -tu podijeljenu razliku vrijedi

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Dokaz. Neka je p_n interpolacijski polinom koji interpolira f u točkama $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. S p_{n-1} označimo interpolacijski polinom koji interpolira f u točkama $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, te s q interpolacijski polinom koji interpolira f u točkama x_1, x_2, \dots, x_n . Tada vrijedi sljedeća jednakost:

$$p_n(x) = q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0} [q(x) - p_{n-1}(x)].$$

Zaista, dovoljno je uočiti da na lijevoj i desnoj strani imamo polinome stupnja najviše n koji se podudaraju u točkama $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. K tome $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ je koeficijent uz potenciju x^n u polinomu p_n ; analognu interpretaciju ima član $f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ koji je koeficijent uz x^{n-1} u p_{n-1} , te $f[x_1, x_2, \dots, x_n]$ koji je koeficijent uz x^{n-1} u polinomu q . Sada izjednačavajući koeficijente uz najvišu potenciju na lijevoj i desnoj strani jednakosti dobivamo

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Napomena. Budući da je interpolacijski polinom neovisan o poretku interpolacijskih točaka zaključujemo da ni podijeljene razlike ne ovise o numeraciji točaka. Drugim riječima za svaku permutaciju σ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ vrijedi

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]. \quad \square$$

Tvrđnju Teorema 1.2 možemo evidentno poopćiti na sljedeći način: Za sve $i = 0, 1, \dots, n-1$ i $1 \leq j, i+j \leq n$ vrijedi

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}. \quad (1.4)$$

Podijeljene razlike zapisujemo u obliku tabele

$$\begin{array}{l|lll} x_0 & f(x_0) & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ x_1 & f(x_1) & f[x_1, x_2] & f[x_1, x_2, x_3] & \\ x_2 & f(x_2) & f[x_2, x_3] & & \\ x_3 & f(x_3) & & & \end{array}$$

Prva dva stupca su poznata dok se svaki sljedeći računa pomoći prethodnog i prvog stupca.

Uvedemo li oznaku $c_{i,j} = f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}]$, tada formulu (1.4) možemo zapisati u obliku

$$c_{i,j} = \frac{c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i} \quad (1.5)$$

i imamo sljedeću tablicu:

$$\begin{array}{l|llllll} x_0 & c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & \dots & c_{0,n-1} & c_{0,n} \\ x_1 & c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n-1} & \\ x_2 & c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ x_{n-1} & c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & & & & \\ x_n & c_{n,0} & & & & & \end{array} \quad (1.6)$$

Stoga za računanje imamo sljedeći algoritam:

```

for  $j = 1, 2, \dots, n$  do
  for  $i = 0, 1, \dots, n - j$  do
     $c_{i,j} = (c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1}) / (x_{i+j} - x_i)$ 
  end for
end for

```

Ovaj algoritam možemo dalje optimizirati na sljedeći način: budući da nas zanimaju samo vrijednosti $c_j \equiv c_{0,j}$, umjesto cijele matrice pamtit ćemo samo jedan vektor $d = (d_0, d_1, \dots, d_n)$. U početnom trenutku vektor d inicijaliziramo vrijednostima $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$ (ili u drugim oznakama s $(c_{0,0}, c_{1,0}, \dots, c_{n,0})$). Uočimo da je d_0 prva vrijednost koju želimo izračunati pa stoga tu komponentu više nećemo mijenjati.

U sljedećem koraku računamo prvi stupac u tabeli (1.6),

$$(c_{0,1}, c_{1,1}, \dots, c_{n-1,1}).$$

Budući da se radi o n vrijednosti smjestit ćemo ih u vektor d počevši od drugog mjesta. Nakon tog koraka u vektoru d imamo sljedeće vrijednosti:

$$(c_{0,0}, c_{0,1}, c_{1,1}, \dots, c_{n-1,1}).$$

Vrijednosti koje smo ovim načinom izgubili nisu nam više potrebne u računanju novog stupca tabele. Općenito, kod računanja j -tog stupca u tabeli (1.6) imamo ove vrijednosti u vektoru d :

$$d = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ j-1 \\ j \\ j+1 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ \vdots \\ c_{0,j-1} \\ c_{1,j-1} \\ c_{2,j-1} \\ \vdots \\ c_{n-j+1,j-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ j-1 \\ j \\ j+1 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ \vdots \\ c_{0,j-1} \\ c_{0,j} \\ c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{n-j,j} \end{bmatrix}.$$

Odavde vidimo da je prije j -tog koraka $c_{i,j-1}$ na mjestu d_{i+j-1} , za $i = 0, 1, \dots, n-j+1$. U j -tom koraku se vrijednosti $c_{i,j}$ za $i = 0, 1, \dots, n-j$ smještaju u d_{i+j} . Stoga osnovni korak algoritma (1.5) prelazi u

$$d_{i+j} = \frac{d_{i+j} - d_{i+j-1}}{x_{i+j} - x_i}, \quad \text{za } i = 0, 1, \dots, n-j.$$

Konačno u završnoj verziji algoritma uvodimo varijablu $k = i + j$, $k = j, j+1, \dots, n$, umjesto varijable i tako da dobivamo

$$d_k = \frac{d_k - d_{k-1}}{x_k - x_{k-j}}, \quad \text{za } k = j, j+1, \dots, n.$$

Uočimo da koeficijente d_k moramo računati od $k = n$ do $k = j$ kako ne bismo koristili novoizračunate vrijednosti. Na izlazu algoritma je $d_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ i interpolacijski polinom je dan formulom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n d_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Cijeli algoritam računanja interolacijskog polinoma sastoji se od Algoritma 1.2 kojim se prvo izračunaju koeficijenti u Newtonovoj formi polinoma i Algoritma 1.1 kojim se računa vrijednost polinoma u zadanoj točki.

1.3 Greška interpolacije

Grešku interpolacije je lako ocijeniti kada je funkcija f dovoljno glatka. Osnovni rezultat je dan sljedećim teoremom.

Teorem 1.3 Neka je $f \in C^{n+1}([a, b])$ zadana funkcija i neka su $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ međusobno različite točke. Neka je $p_n \in \mathbb{P}_n$ polinom koji interpolira funkciju f

Algoritam 2 Koeficijenti interpolacijskog polinoma

 Algoritam računa koeficijente interpolacijskog polinoma

Ulaz: $n, (x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_n)$
 n : stupanj interpolacijskog polinoma
 (x_0, x_1, \dots, x_n) : interpolacijske točke
 (y_0, y_1, \dots, y_n) : funkcijske vrijednosti
 // Inicijalizacija;
for $i = 0, 1, \dots, n$ **do**
 $d_i = y_i$
end for
for $j = 1, 2, \dots, n$ **do**
 for $k = n, n-1, \dots, j$ **do**
 $d_k = (d_k - d_{k-1}) / (x_k - x_{k-j})$
 end for
end for
Izlaz: (d_0, d_1, \dots, d_n)

u točkama x_0, x_1, \dots, x_n . Tada za svako $x \in [a, b]$ postoji točka $\xi_x \in (a, b)$ takva da je

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (1.7)$$

Posebno, imamo sljedeću ocjenu

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)| \prod_{i=0}^n |x - x_i|.$$

Dokaz. Jednakost (1.7) očito vrijedi u točkama $x_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$ jer su u tim točkama i lijeva i desna strana jednake nuli. Uzmimo stoga točku x koja nije u skupu $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ i definirajmo funkcije

$$w_n(t) = \prod_{i=0}^n (t - x_i), \quad \phi(t) = f(t) - p_n(t) - \lambda w_n(t).$$

Broj λ odredimo tako da bude $\phi(x) = 0$, odnosno

$$\lambda = \frac{f(x) - p_n(x)}{w_n(x)} \quad (1.8)$$

(usporedi s formulom (1.3)). Funkcija ϕ je klase C^{n+1} i ima najmanje $n+2$ nultočke x_0, x_1, \dots, x_n, x koje su međusobno različite. Prema Rolleovom teoremu derivacija ϕ' ima barem $n+1$ različitih nultočaka u intervalu (a, b) . Taj argument

možemo primijeniti na ϕ'' , $\phi^{(3)}$ itd. Dobit ćemo da $\phi^{(n+1)}$ ima najmanje jednu nultočku u intervalu (a, b) . Označimo tu nultočku sa ξ_x . Tada je

$$\phi^{(n+1)}(\xi_x) = 0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - p_n^{(n+1)}(\xi_x) - \lambda w_n^{(n+1)}(\xi_x).$$

Kako je p_n polinom n -tog stupnja, njegova je $n + 1$ -va derivacija jednaka nuli. Polinom $w_n(t)$ je stupnja $n + 1$ i koeficijent uz najvišu potenciju mu je 1; stoga je $w_n^{(n+1)} = (n + 1)!$. Time dobivamo

$$f^{(n+1)}(\xi_x) = (n + 1)! \lambda = (n + 1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{w_n(x)}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Postavlja se pitanje da li proces interpolacije konvergira, preciznije da li je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| = 0.$$

Primjer 1.1 Uzmimo $f(x) = e^x$; Za $x \in [a, b]$ je $\max |f^{n+1}(x)| = e^b$ i kako je uvijek $|w(x)| \leq (b - a)^{n+1}$ dobivamo

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} e^b.$$

kako desna strana teži u nulu kada $n \rightarrow \infty$ dobivamo uniformnu konvergenciju interpolacijskog polinoma.

Ukoliko uzmemo ekvidistantne točke x_i na segmentu $[a, b]$, $x_i = a + i(b - a)/n$, za $i = 0, 1, \dots, n$, onda možemo naći bolju ocjenu za polinom $w(x)$. Naime tada postoji konstanta c neovisna o n takva da je

$$\max_{a \leq x \leq b} |w(x)| \leq c \frac{e^{-n}}{\sqrt{n} \ln(n)} (b - a)^{n+1}. \quad (1.9)$$

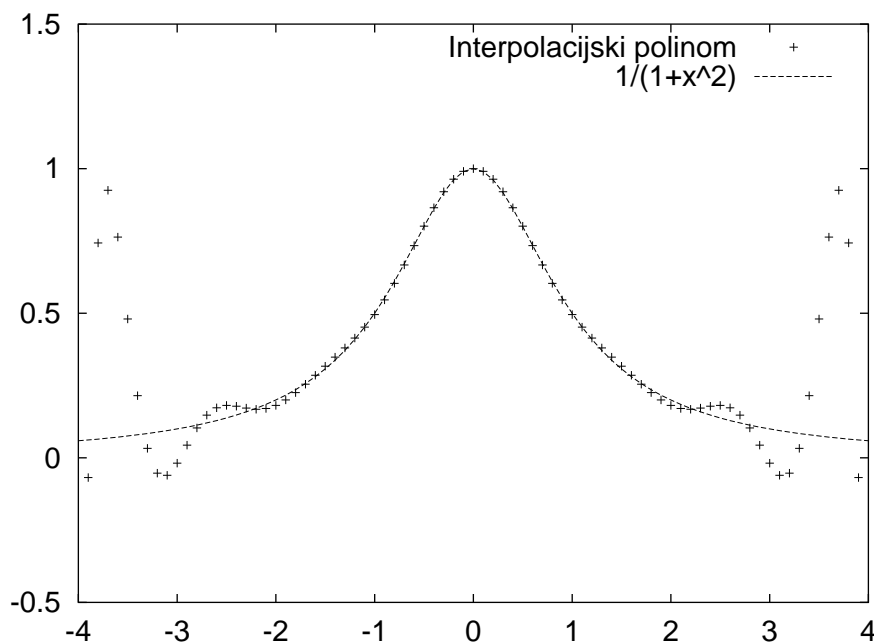
Za ekvidistantne točke time dolazimo do ocjene greške

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{c}{(n + 1)!} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n} \ln(n)} (b - a)^{n+1} \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)|.$$

Primjer 1.2 (Rungeov primjer) Uzmimo funkciju $f(x) = 1/(1 + x^2)$ na simetričnom intervalu $[-b, b]$. Tada se može dokazati da je za svako $k \in \mathbb{N}$, $\max |f^{(k)}(x)| \leq k!$ (Zadatak 2) pa je stoga

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c \frac{e^{-n}}{\sqrt{n} \ln(n)} (2b)^{n+1} = 2bc \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)} \left(\frac{2b}{e} \right)^n.$$

Oдавде se vidi da je uniformna konvergencija osigurana samo za $2b < e$. Za dovoljno velike b interpolacijski proces više ne konvergira. U to se je lako uvjeriti numerički računajući interpolacijski polinom za $b = 5$ i n dovoljno veliko (Zadatak 3).



Može se pokazati (vidi [?]) da za bilo koji izbor interpolacijskih točaka

$$x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

postoji neprekidna funkcija f takva da $L_n(f)$ ne konvergira uniformno prema f kada $n \rightarrow \infty$.

Iz iznesenog možemo zaključiti da postupak interpolacije nije prikladan za aproksimaciju funkcija. Svojstva interpolacijskog polinoma možemo popraviti ako ispravno izaberemo interpolacijske točke.

1.4 Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Kontrolirajući točke u kojima interpoliramo funkciju možemo kontrolirati funkciju $w(x)$ koja se javlja u izrazu za grešku interpolacije. Stoga se postavlja pitanje nalaženja najoptimalnijeg izbora točaka interpolacije tj. onog koji će dati najmanji $\max |w(x)|$. Pokazuje se da je najoptimalniji izbor dan s nultočkama Čebiševljevih polinoma.

Čebiševljevi polinomi definiraju se rekurzivno formulama:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, & T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) & \text{za } n \geq 1. \end{cases} \quad (1.10)$$

Prvih nekoliko polinoma je:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots$$

Teorem 1.4 Za $x \in [-1, 1]$ Čebiševljevi polinomi imaju sljedeći prikaz:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \geq 0.$$

Dokaz. Kako su Čebiševljevi polinomi na jedinstven način definirani rekurzijom (1.10), dovoljno je pokazati da funkcije $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ zadovoljavaju istu rekurziju, no to je jednostavan trigonometrijski zadatak (vidi Zadatak 4). Q.E.D.

Čebiševljevi polinomi očito imaju sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned} |T_n(x)| &\leq 1 \quad \text{za } x \in [-1, 1] \\ T_n(\cos \frac{j\pi}{n}) &= (-1)^j \quad \text{za } j = 0, 1, \dots, n \\ T_n(\cos(\frac{2j+1}{2n}\pi)) &= 0 \quad \text{za } j = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Odavde vidimo da n -ti Čebiševljevi polinom mijenja predznak n -puta na $[-1, 1]$ i da ima n realnih i jednostrukih nultočaka u intervalu $(-1, 1)$.

Nadalje, iz rekurzije se lako vidi da je vodeći koeficijent polinoma T_n , tj. koeficijent uz najvišu potenciju, jednak 2^{n-1} ($T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$). Normirani Čebiševljevi polinomi

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

zadovoljavaju nejednakost

$$|\tilde{T}_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{za } x \in [-1, 1].$$

Oscilatorni karakter Čebiševljevi polinoma daje sljedeće minimizirajuće svojstvo:

Teorem 1.5 Neka je $p(x)$ polinom n -tog stupnja s jediničnim koeficijentom uz najvišu potenciju. Tada je

$$\|p\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dokaz. Dokaz ide metodom kontradikcije. Pretpostavit ćemo da postoji polinom $p(x)$ stupnja n , s jedinicom uz najvišu potenciju, koji zadovoljava $|p(x)| < 1/2^{n-1}$ za sve $x \in [-1, 1]$. U točkama $x_j = \cos(\frac{j\pi}{n})$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ zbog (1.11) vrijedi:

$$(-1)^j p(x_j) \leq |p(x_j)| < \frac{1}{2^{n-1}} = (-1)^j \tilde{T}_n(x_j)$$

odakle slijedi

$$(-1)^j [p(x_j) - \tilde{T}_n(x_j)] < 0 \quad \text{za } j = 0, 1, \dots, n.$$

Uočimo da je $p - \tilde{T}_n$ zbog normiranja polinom stupnja manjeg ili jednakog $n - 1$. Nadalje, upravo smo dokazali da taj polinom mijenja predznak najmanje n puta, što znači da ima najmanje n nultočaka u $(-1, 1)$. Time nužno dobivamo da je $p - \tilde{T}_n \equiv 0$ što je kontradikcija s polaznom tvrdnjom. Q.E.D.

Primjena na interpolaciju funkcija na segmentu $[-1, 1]$ je neposredna. Iz prethodnog teorema znamo da za proizvoljan izbor interpolacijskih točaka vrijedi

$$|w_n(x)| = \prod_{i=0}^n |x - x_i| \geq \frac{1}{2^n}.$$

Jednakost ćemo imati ako za interpolacijske točke uzmemo nultočke Čebiševljevog polinoma T_{n+1} jer onda na lijevoj strani imamo $|\tilde{T}_{n+1}(x)|$. Te su nultočke

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

i nazivamo ih **Čebiševljevim točkama**. Uz taj izbor točaka imamo ocjenu

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)|.$$

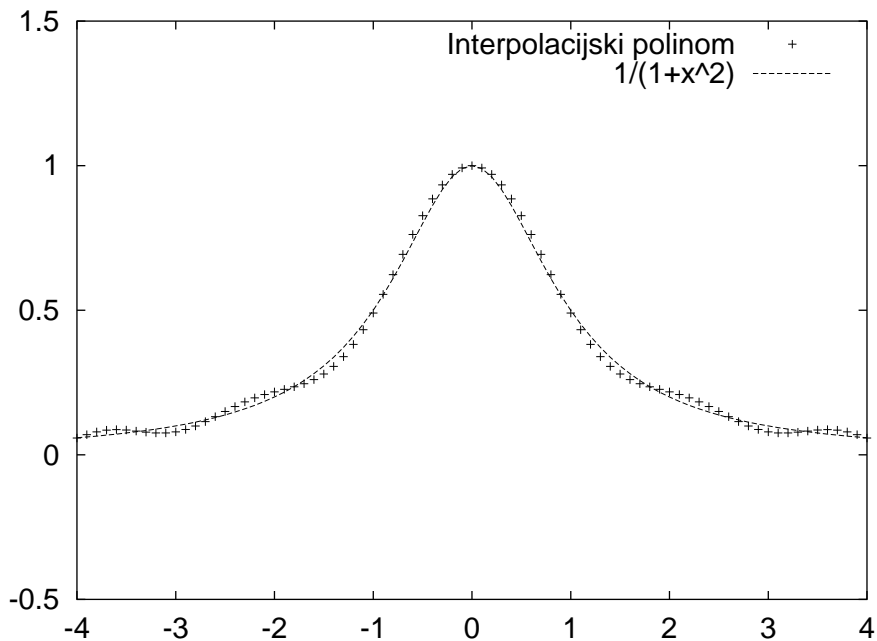
U slučaju proizvoljnog segmenta $[a, b]$ linearnom transformacijom preslikamo $[a, b]$ na $[-1, 1]$ i zatim interpoliramo u Čebiševljevim točkama na $[-1, 1]$. Na taj način dobivamo da su Čebiševljeve točke na $[a, b]$

$$x_j = a + \frac{b-a}{2} \left(\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) + 1 \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.12)$$

a greška interpolacije dana je ocjenom (Zadatak 5)

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (1.13)$$

Na Rungeovu primjeru (Primjer 1.2) sa Čebiševljevim točkama dobivamo rezultat na slici 1.



1.5 Interpolacija splineovima

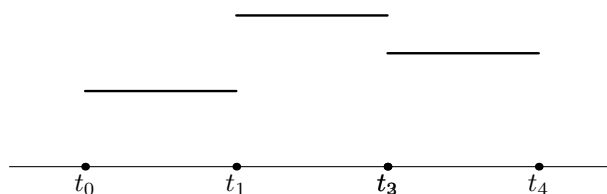
Interpolacija funkcije polinomom visokog stupnja ne daje dobre rezultate ako ne možemo birati položaj interpolacijskih točaka. Vidjeli smo pojavu oscilacija u interpolacijskom polinomu kada na dovoljno velikom intervalu pokušavamo točnost interpolacije postići polinomom visokog stupnja. S druge strane, na intervalima male duljine interpolacija daje rezultate zadovoljavajuće točnosti već s polinomima nižeg stupnja. To nas prirodno vodi na ideju da polinomijalnu interpolaciju koristimo *po dijelovima*, odnosno da interval na kojem želimo interpolirati funkciju razbijemo na niz manjih podintervala, na kojima ćemo funkciju interpolirati polinomima relativno niskog stupnja.

U ovom pristupu interpolaciji promijenjen je prostor funkcija u kojem tražimo *interpoland*. Do sada smo interpolirali tablicu podataka (ili zadanu funkciju) polinomima određenog stupnja, a sada koristimo funkcije koje su *po dijelovima polinomi*, odnosno *splineovi*.

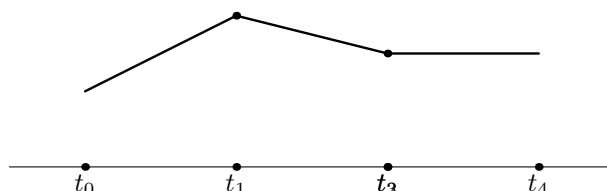
Spline na nekom segment $[a, b]$ je određen subdivizijom tog segmenta na konačan broj podsegmentata i stupnjem interpolacijskog polinoma na podsegmentima. Subdivizija je određena zadavanjem $n + 1$ točaka, t_0, t_1, \dots, t_n , sa svojstvom

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b. \quad (1.14)$$

Točke t_i nazivamo čvorovima i oni razbijaju $[a, b]$ na n podsegmentata $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, \dots, n$). Neka je $k \geq 0$ stupanj interpolacijskog polinoma koji koristimo na svakom podsegmentu. Tada kažemo da je **spline** stupnja k , na subdiviziji



Slika 1.1: Spline stupnja 0



Slika 1.2: Spline stupnja 1

t_0, t_1, \dots, t_n , svaka funkcija $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ koja ima sljedeća dva svojstva:

- Na svakom intervalu $[t_{i-1}, t_i)$ S je polinom stupnja manjeg ili jednakog k ;
- Za $k = 1$ funkcija S je neprekidna na $[a, b]$; Za $k > 1$ derivacija funkcije S reda $k - 1$ je neprekidna na $[a, b]$.

Skup svih splineova stupnja k označavamo s V_k odnosno $V_k(t_0, t_1, \dots, t_n)$ kada želimo istaknuti ovisnost o subdiviziji.

Za skup V_k moramo pokazati da je neprazan i da ima strukturu linearnog prostora.

Spline stupnja 0 je po dijelovima konstantna funkcija na zadanoj subdiviziji. Evidentno skup V_0 nije prazan i ima strukturu linearnog prostora u odnosu na uobičajene operacije zbrajanja funkcija i množenja skalarom.

Spline stupnja 1 je po dijelovima afina, neprekidna funkcija. I ovdje je nepraznost skupa V_1 posve evidentna, a isto tako i svojstva linearnog prostora.

Pokažimo da pomoću splinea stupnja 1 možemo interpolirati zadanu tablicu vrijednosti

x	t_0	t_1	t_2	\cdots	t_n
y	y_0	y_1	y_2	\cdots	y_n

odnosno da možemo naći spline stupnja 1 koji zadovoljava uvjete $S(t_i) = y_i$, za $i = 0, 1, \dots, n$.

Na svakom intervalu $[t_{i-1}, t_i)$ spline S je oblika $S(x) = a_i x + b_i$, odnosno ukupno imamo $2n$ stupnjeva slobode (koeficijenti a_i i b_i). Pomoću njih treba zadovoljiti uvjete neprekidnosti

$$S(t_i - 0) = S(t_i + 0) \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

te uvjete interpolacije

$$S(t_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Ukupno, dakle, ima $(n-1) + (n+1) = 2n$ uvjeta, koliko je i parametara. Kako je sustav iz kojeg se određuju parametri splinea linearan, zaključujemo da problem interpolacije ima jedinstveno rješenje.

Slično bi se mogao analizirati kvadatičan spline te spline bilo kojeg stupnja i pokazati da je skup V_k , za svako k , neprazan i ima strukturu linearnog prostora. Mi ćemo se posvetiti splineu trećeg stupnja koji se često koristi za aproksimaciju krivulja. To spline najnižeg stupnja s neprekidnom drugom derivacijom koja je, za razliku od viših derivacija, vizualno raspoznatljiva jer reprezentira zakrivljenost krivulje.

Interpolacija kubičnim splineom. Pred nama je sljedeća zadaća: zadana je tabela brojeva

$$\begin{array}{c|cccccc} x & t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array}$$

pri čemu je zadovoljeno (1.14). Treba naći spline trećeg stupnja koji zadovoljava $S(t_i) = y_i$, za $i = 0, 1, \dots, n$.

Da bismo se uvjerali da je konstrukcija moguća provjerit ćemo broj parametara koji nam stoje na raspolaganju i broj uvjeta koje moramo zadovoljiti.

Polinom stupnja 3 ima 4 koeficijenta tako da je ukupan broj *stupnjeva slobode* jednak $4n$. Uvjeti koje treba zadovoljiti su sljedeći:

- Neprekidnost: $S(t_i - 0) = S(t_i + 0)$ za $i = 1, 2, \dots, n - 1$;
- Interpolacija: $S(t_i) = y_i$ za $i = 0, 1, 2, \dots, n$;
- Neprekidnost 1. der: $S'(t_i - 0) = S'(t_i + 0)$ za $i = 1, 2, \dots, n - 1$;
- Neprekidnost 2. der: $S''(t_i - 0) = S''(t_i + 0)$ za $i = 1, 2, \dots, n - 1$;

To je ukupno $3(n-1) + (n+1) = 4n - 2$ uvjeta. Preostaju nam dva stupnja slobode pomoću kojih možemo zadovoljiti neke *rubne uvjete*. Mi ćemo konstruirati prirodan kubični spline koji ima drugu derivaciju u t_0 i t_n jednaku nuli.

Uvedimo oznake

$$z_i = S''(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Druga derivacija S'' je po dijelovima afina funkcija koja mora interpolirati točke z_i (koje nam trenutno nisu poznate). Stoga je

$$\begin{aligned} S''_i(x) &= \frac{z_i}{h_i}(t_{i+1} - x) + \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - t_i) \\ h_i &= t_{i+1} - t_i, \end{aligned}$$

gdje smo uveli oznaku $S_i = S|_{[t_i, t_{i+1}]}$.

Integriramo li dva puta izraz za $S_i''(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} S_i'(x) &= -\frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 + \alpha \\ S_i(x) &= \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \alpha x + \beta. \end{aligned}$$

Zadnji izraz je zgodnije napisati u obliku

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + C(x - t_i) + D(t_{i+1} - x). \quad (1.15)$$

Uvjeti neprekidnosti i interpolacije daju

$$S_i(t_i) = \frac{z_i}{6}h_i^2 + Dh_i = y_i \quad \Rightarrow \quad D = \frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i}{6}h_i \quad (1.16)$$

$$S_i(t_{i+1}) = \frac{z_{i+1}}{6}h_i^2 + Ch_i = y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}}{6}h_i. \quad (1.17)$$

Potrebno je još osigurati neprekidnost prve derivacije, što će nam dati koeficijente z_i . Imamo

$$\begin{aligned} S_i'(x) &= -\frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}}{6}h_i\right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i}{6}h_i\right), \\ S_i'(t_i) &= -\frac{h_i}{3}z_i - \frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}. \end{aligned}$$

Posve analogno

$$\begin{aligned} S_{i-1}'(x) &= -\frac{z_{i-1}}{2h_{i-1}}(t_i - x)^2 + \frac{z_i}{2h_{i-1}}(x - t_{i-1})^2 + \left(\frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{z_i}{6}h_{i-1}\right) - \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{z_{i-1}}{6}h_{i-1}\right), \\ S_{i-1}'(t_i) &= \frac{h_{i-1}}{6}z_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}z_i - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}}. \end{aligned}$$

Iz uvjeta

$$S_i'(t_i) = S_{i-1}'(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

dobivamo

$$\frac{h_{i-1}}{6}z_{i-1} + \frac{h_i + h_{i-1}}{3}z_i + \frac{h_i}{6}z_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

za $i = 1, 2, \dots, n-1$. Ovo je linearan sustav za vrijednosti z_1, \dots, z_{n-1} . Kako u sustav ulaze i vrijednosti z_0 i z_n , njih moramo zadati. To su dva stupnja slobode koji nam preostaju. U prirodnom kubičnom splineu uzimamo

$$z_0 = z_n = 0.$$

Da bismo bolje vidjeli strukturu matičnog sustava uvedimo sljedeće brojeve:

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}), \quad b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i), \quad v_i = b_i - b_{i-1}.$$

Matrični zapis sustava je sljedeći:

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & u_2 & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & u_3 & h_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Uočimo da je matrica strogo dijagonalno dominantna pa za rješavanje sustava koristimo Gaussove eliminacije bez pivotiranja. Proces rješavanja sastoji se od dvije petlje: u prvoj poništavamo elemente ispod glavne dijagonale, a u drugoj rješavamo sustav s gornjom trokutastom, dvodijagonalnom matricom (općenito o Gaussovima eliminacijama vidi u poglavlju o linearnim sustavima).

Pogledajmo detaljnije poništavanje donje dijagonale. Da bismo poništili h_1 na mjestu $(2, 1)$ trebamo prvi redak množiti s faktorom h_1/u_1 i oduzeti ga od drugog retka. Efekt te operacije je poništavanje elementa na mjestu $(2, 1)$ i promjena dijagonalnog elementa po formuli

$$u_2 = u_2 - h_1 \frac{h_1}{u_1}.$$

Element h_2 na mjestu $(2, 3)$ ne mijenja se jer iznad njega stoji nula. Uočimo da na isti način moramo promijeniti element v_2 :

$$v_2 = v_2 - v_1 \frac{h_1}{u_1}.$$

Postupak se zatim nastavlja sa sljedećim retkom.

Iz ovoga možemo zaključiti da se u postupku eliminacije donje subdijagonale mijenja dijagonala i vektor desne strane, ali ne i gornja subdijagonala. Formule su:

$$u_i = u_i - h_{i-1} \frac{h_{i-1}}{u_{i-1}}, \quad v_i = v_i - v_{i-1} \frac{h_{i-1}}{u_{i-1}},$$

za $i = 2, 3, \dots, n-1$. Nakon toga imamo sustav oblika

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & h_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

gdje su u_i i v_i komponente promijenjene po gornjim formulama. Rješenje se dobiva u jednoj petlji ($z_n = 0$):

$$z_i = (v_i - h_i z_{i+1}) \frac{1}{u_i}, \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

U sljedećem algoritmu spojeno je formiranje matrice i rješavanje sustava.

Algoritam 3 Prirodni kubični spline

```

1: Ulaz:  $n, (t_i, y_i)$  za  $i = 0, 1, \dots, n$ 
2: for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do
3:    $h_i = t_{i+1} - t_i$ 
4:    $b_i = 6(y_{i+1} - y_i)/h_i$ 
5: end for
6:  $u_1 = 2(h_0 + h_1)$ 
7:  $v_1 = b_1 - b_0$ 
8: for  $i = 2, 3, \dots, n-1$  do
9:    $u_i = 2(h_i + h_{i-1}) - h_{i-1}^2/u_{i-1}$ 
10:   $v_i = b_i - b_{i-1} - h_{i-1}v_{i-1}/u_{i-1}$ 
11: end for
12:  $z_n = 0$ 
13: for  $i = n-1, n-2, \dots, 1$  do
14:   $z_i = (v_i - h_i z_{i+1})/u_i$ 
15: end for
16:  $z_0 = 0$ 
17: Izlaz: vektor  $(z_i)$ 

```

Da bi algoritam eliminacije donje dijagonale funkcionirao mora biti $u_{i-1} > 0$ u linijama 9 i 10 algoritma. No, indukcijom je lako pokazati da je $u_i > h_i$ za sve $i = 1, \dots, n-1$. Baza indukcije: $u_1 = 2(h_0 + h_1) > h_1$. Korak indukcije:

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}) - \frac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}} > 2(h_i + h_{i-1}) - \frac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}} = 2h_i + h_{i-1} > h_i.$$

Time je dokaz gotov. (Zadatak: Nađite točniju donju među.)

Algoritam konstrukcije kubičnog splinea treba kompletirati s dvije dodatne rutine. Prva treba za zadani $x \in \mathbb{R}$ naći interval $[t_i, t_{i+1})$ kojem x pripada. Slučaj kad je x izvan intervala $[t_0, t_n)$ može se tretirati na različite načine. Na primjer, spline se može proširiti konstantom izvan $[t_0, t_n)$:

$$\bar{S}(x) = \begin{cases} S(t_0) & \text{za } x < t_0 \\ S(x) & \text{za } x \in [t_0, t_n) \\ S(t_n) & \text{za } x \geq t_n. \end{cases}$$

Kada je interval kojem x pripada određen treba računati vrijednost funkcije po formulama (1.15), (1.16) i (1.17). Te se formule mogu još i napisati u obliku

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i)[C_i + (x - t_i)[B_i + (x - t_i)A_i]] \quad (1.18)$$

$$A_i = \frac{1}{6h_i}(z_{i+1} - z_i), \quad B_i = z_i/2, \quad (1.19)$$

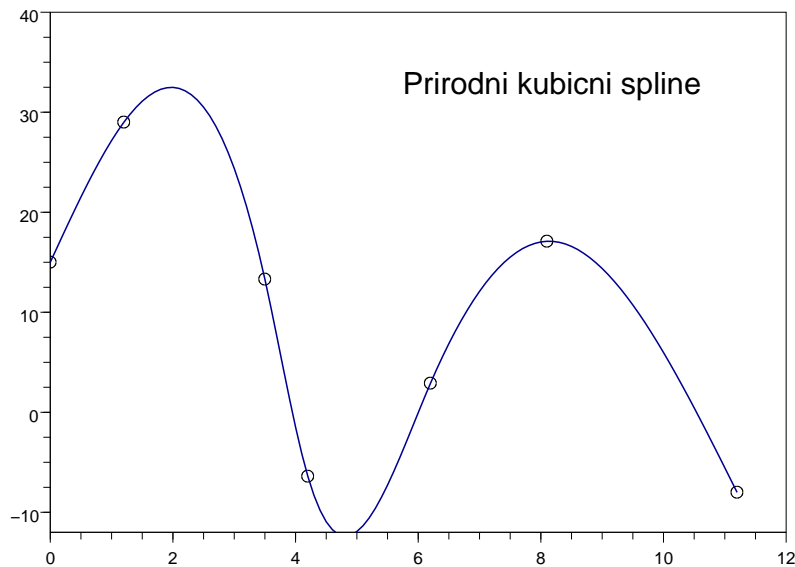
$$C_i = -\frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{h_i}{3}z_i + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i), \quad (1.20)$$

koji je pogodniji za računanje.

Primjer 1.3 Zadana je tablica interpolacijskih točaka:

x	0	1.2	3.5	4.2	6.2	8.1	11.2
y	15	29	13.3	-6.4	2.9	17.1	-8

Dobivamo sljedeću interpolaciju:



1.6 Zadaci

Z1.1. Dokazati formulu (1.9). (RAZRADITI)

Z1.2. Pokažite da je za $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $\max |f^k(x)| \leq k!$.

M. JURAK 22. studenog 2006.

Z1.3. Izračunajte i prikažite grafički interpolacijski polinom za funkciju $f(x) = 1/(1+x^2)$ na segmentu $[-5, 5]$ sa ekvidistantnim interpolacijskim točkama. Prikažite polinome stupnja 5 do 10 i uvjerite se eksperimentalno da interpolacijski proces ne konvergira (Primjer 1.2).

Z1.4. Koristeći adicione teoreme za kosinus dokažite da funkcije

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

zadovoljavaju rekurziju $f_{n+1} = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x)$ za $n \geq 1$. Evidentno je $f_0(x) = 1$ i $f_1(x) = x$.

Z1.5. Neka je $f(x)$ funkcija definirana na segmentu $[a, b]$. Definiramo afino preslikavanje $t = -1 + 2(x-a)/(b-a)$ koje preslikava $[a, b]$ na $[-1, 1]$; njegov inverz je $x = a + (b-a)(t+1)/2$. Definiramo funkciju F na segmentu $[-1, 1]$ formulom $F(t) = f(a + (b-a)(t+1)/2)$. Neka je $P_n(t)$ polinom koji na $[-1, 1]$ interpolira funkciju F kroz Čebiševljeve točke. Definirajmo $p_n(x) = P_n(-1 + 2(x-a)/(b-a))$. Pokažite da je to polinom stupnja najviše n , koji interpolira funkciju f kroz točke (1.12). Dokažite ocjenu (1.13).

Z1.6. Izračunajte dimenziju prostora splineova V_k za $k \geq 0$.

Z1.7. Riješite problem interpolacije splineom prvog stupnja. Uvjerite se da je problem linearan.

Z1.8. Napišite program koji za zadanu tabelu točaka crta prirodni kubični spline koji interpolira te točke. Implementirajte kao zasebnu funkciju rutinu koja nalazi interval u kojem se točka nalazi te funkciju koja računa vrijednost splinea.

Z1.9. Pokažite da je λ iz formule (1.8) jednako $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$.