

# 1

## Rješavanje nelinearnih jednačbi

U ovom se poglavlju bavimo osnovnim metodama za rješavanje jednačbe oblika  $f(x) = 0$ , gdje je  $f$  realna funkcija realne varijable. O funkciji  $f$  ćemo minimalno pretpostavljati da je neprekidna.

### 1.1 Metoda bisekcije

Metoda bisekcije ili polovljenja je vrlo jednostavan postupak koji se može primijeniti na svaku neprekidnu funkciju. Zasniva se na činjenici da neprekidna funkcija  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  koja ima različit predznak u točkama  $a$  i  $b$  mora imati na tom segment bar jednu nultočku (vidi S. Kurepa [?], Teorem 4). Tu tvrdnju možemo formulirati na sljedeći način:

**Teorem 1.1** Neka je  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija na segmentu  $[a, b]$  i neka je  $f(a)f(b) \leq 0$ . Tada postoji bar jedna točka  $r \in [a, b]$  takva da je  $f(r) = 0$ .

Postavlja se pitanje kako na efikasan način provjeriti da funkcija mijenja predznak na nekom segmentu. Prirodno se nameće u tu svrhu računati izraz  $f(a)f(b)$ . Ako je on manji od nule onda sigurno imamo promjenu predznaka budući da je predznak funkcije u dvije krajnje točke različit. Taj uvjet nije i nužan, ali je zato jednostavan za provjeru – treba samo dva izračunavanja funkcije  $f$ . Mi ćemo stoga govoriti da funkcija mijenja predznak na  $[a, b]$  ako je  $f(a)f(b) < 0$ .

Ako nam je zadan jedan takav segment  $[a, b]$  na kome funkcija mijenja predznak, onda uvodimo polovište  $p = (a + b)/2$  i imamo tri mogućnosti.

- $f(p) = 0$ ;
- $f$  mijenja predznak na podsegmentu  $[a, p]$ ;
- $f$  mijenja predznak na podsegmentu  $[p, b]$ ;

U prvom slučaju smo gotovi. U druga dva odabiremo onaj podsegment na kojem funkcija mijenja predznak i nastavimo isti postupak s njime.

Iterirajući ovu shemu dobivamo niz segmenata  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ ,  $[a_3, b_3]$ , ... koji imaju svojstvo da se za svako  $n$  bar jedna nultočka nalazi u  $[a_n, b_n]$ , te

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^n}(b_1 - a_1).$$

Vidimo dakle da nam u svakom koraku metoda daje gornju i donju među za nultočku i preciznu ocjenu greške. Ako nultočku označimo s  $r$ , onda iz  $r \in [a_n, b_n]$  dobivamo

$$\left| r - \frac{1}{2}(a_n + b_n) \right| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b_1 - a_1),$$

pa za aproksimaciju treba uzeti  $x = (a_n + b_n)/2$ .

### Algoritam 1.1 (Bisekcija)

- 1: Ulaz:  $a, b$  ( $a < b$ ) krajevi intervala
- 2:  $f(x)$  funkcija
- 3:  $N$  maksimalan broj iteracija
- 4:  $\varepsilon, \delta$  točnost
- 5:  $f_l = f(a)$
- 6:  $f_r = f(b)$
- 7:  $dx = b - a$
- 8: **if**  $f_l * f_r \geq 0$  **then**
- 9: stop.  $[a, b]$  nije dobar početni segment.
- 10: **end if**
- 11: **for**  $k = 1, 2, \dots, N$  **do**
- 12:  $dx = dx/2$
- 13:  $x_m = a + dx$
- 14:  $f_m = f(x_m)$
- 15: **if**  $|dx| < \varepsilon$  ili  $|f_m| < \delta$  **then**
- 16: stop. Izlaz  $x = x_m$ . Algoritam je konvergirao.
- 17: **end if**
- 18: **if**  $f_l * f_m < 0$  **then**
- 19:  $b = x_m$
- 20:  $f_r = f_m$
- 21: **else**
- 22:  $a = x_m$
- 23:  $f_l = f_m$
- 24: **end if**
- 25: **end for**
- 26: Izlaz  $x = x_m$ . Algoritam nije konvergirao u  $N$  iteracija.

Najveći problem u konstrukciji algoritma je kriterij zaustavljanja. Ako je nultočka u blizini jedinice, onda je tolerancija  $\varepsilon = 10^{-6}$  posve razumna, ali za

korijen reda veličine  $10^{26}$  to neće biti moguće postići. Dobar kriterij ovisi o položaju nule. Jedna mogućnost je uzeti  $\varepsilon = \epsilon(|a| + |b|)/2$ , gdje je  $\epsilon$  strojni epsilon, a  $a$  i  $b$  su inicijalne međe korijena. Ukoliko se pak želi koristiti funkcijska vrijednost kao kriterij zaustavljanja, onda bi trebalo imati određeno poznavanje funkcije u okolini korijena da bi se izbjegla uporaba tog kriterija u području gdje je globalno vrijednost funkcije vrlo mala.

Sljedeći problem je nalaženje polaznog intervala. To može biti evidentno iz načina na koji je funkcija zadana, ali i ne mora. Jedan od mogućih načina da se automatizira traženje početnog segmenta je da se krene od nekog dovoljno velikog segmenta  $[A, B]$  koji se zatim podijeli na  $n$  jednakih podsegmenta koji je svi redom testiraju. Takva rutina bi vratila listu segmenta na kojima funkcija mijenja predznak.

Bisekcija je vrlo robustan algoritam ali konvergencija može biti suviše spora. K tome, ona nema neposrednih generalizacija na sustave više jednadžbi s više nepoznanica.

Primjer. Nađimo najmanji pozitivni korijen jednadžbe  $\operatorname{tg} x = x$ . Budući da je derivacija tangensa veća od 1 na  $(0, \pi/2)$  zaključujemo da korijen leži u intervalu  $(\pi, 3\pi/2)$ . Startat ćemo algoritam s  $a = \pi + 10^{-6}$ ,  $b = 3\pi/2 - 10^{-6}$ . Odaberimo toleranciju  $\varepsilon = \delta = 10^{-7}$ . Nakon 28 iteracija dobivamo  $x = 4.4934094576$ , i  $f(x) = -6.4 \cdot 10^{-9}$ .  $\square$

## 1.2 Newtonova metoda

Neka je  $f$  glatka funkcija i  $r$  jedna njena nultočka. Ako je  $x$  aproksimacija te nultočke, onda možemo pisati  $x = r + h$  te iskoristiti Taylorov razvoj

$$0 = f(r) = f(x + h) = f(x) + f'(x)h + O(h^2)$$

pri čemu pretpostavljamo da imamo dobru aproksimaciju, pa je  $h$  malen. Zane-marimo li član koji je kvadratan u  $h$  dolazimo do približne jednakosti

$$h \approx -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Kako sada imamo procjenu za  $h$ , a  $r = x + h$ , dobivamo novu aproksimaciju za  $r$ :

$$r \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Očekujemo da je nova aproksimacija bolja od prethodne. Time dobivamo iterativnu metodu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

gdje je  $x_0$  zadana početna iteracija.

**Napomena.** Za razliku od bisekcije, Newtonova metoda nije globalno konvergentna. To se može pokazati na primjeru funkcije  $f(x) = \arctan x$  koja ima jedinstvenu, jednostruku nulu  $x = 0$ . Newtonova iteracija koja započne iz točke  $x_0 > 0$ , koja je dovoljno udaljena od ishodišta, generirat će  $x_1 < 0$  koji je po modulu veći od  $x_0$  (budući da je derivacija  $f'(x_0)$  bliska nuli). Svaka sljedeća iteracija bit će po modulu veća od prethodne.  $\square$

**Napomena.** Geometrijska interpretacija Newtonove metode: Točka  $x_{n+1}$  konstruira se iz točke  $x_n$  tako da se u  $(x_n, f(x_n))$  povuče tangenta na graf funkcije i za  $x_{n+1}$  se uzme njeno presjecište s osi  $x$ . Iz interpretacije se vidi da se točka  $x_{n+1}$  u odnosu na  $x_n$  nalazi u smjeru pada funkcije  $f(x)$  (pod uvjetom da je  $f'(x_n) \neq 0$ , što je nužno da bi se mogao napraviti korak Newtonove metode).  $\square$

Na osnovu tog zapažanja možemo konstruirati **globalno konvergentnu Newtonovu metodu**. Polazeći od aproksimacije  $x_n$  konstruiramo  $x_{n+1}$  Newtonovim korakom. Novu aproksimaciju zatim prihvaćamo ako je

$$|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|. \quad (1.1)$$

U suprotnom zaključujemo da nas je Newtonova iteracija dovela predaleko i da korak moramo smanjiti. Iz prethodne napomene znamo da ćemo doći do prihvatljive aproksimacije ako korak dovoljno smanjimo. Stoga umjesto  $x_{n+1}$  uzimamo  $(x_{n+1} + x_n)/2$  kao novu aproksimaciju te postupak polovljenja ponavljamo sve dok uvjet (1.1) ne bude zadovoljen. Time dolazimo do sljedećeg algoritma:

**Algoritam 1.2** (Globalno konvergentna Newtonova metoda)

```

1: Ulaz: funkcija  $f(x)$ 
2:     funkcija  $f'(x)$ 
3:     maksimalan broj iteracija  $N$ 
4:     tolerancije  $\varepsilon, \delta$ 
5:     početna iteracija  $x_0$ 
6:  $v = f(x_0)$ 
7: if ( $|v| < \varepsilon$ ) then
8:   stop. Početna aproksimacija je dovoljno dobra.
9: end if
10: for  $k = 1, 2, \dots, N$  do
11:    $x_1 = x_0 - v/f'(x_0)$ 
12:    $w = f(x_1)$ 
13:   while  $|w| \geq |v|$  do
14:      $x_1 = (x_1 + x_0)/2$ 
15:      $w = f(x_1)$ 
16:   end while
17:   if ( $|x_1 - x_0| < \varepsilon$  ili  $|w| < \delta$ ) then
18:     Stop. Metoda je konvergirala. Izlaz  $x_1$ .
19:   else

```

20:  $x_0 = x_1$

21:  $v = w$

22: **end if**

23: **end for**

24: Izlaz  $x = x_1$ . Algoritam nije konvergirao u  $N$  iteracija.

Jednostavna analiza greške. Označimo nultočku funkcije s  $r$ . Greška je  $e_n = x_n - r$ .

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = x_n - r - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Iz Taylorovog razvoja slijedi

$$0 = f(r) = f(x_n - e_n) = f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{1}{2}e_n^2 f''(\xi_n)$$

za neku točku  $\xi_n$  između  $x_n$  i  $r$ . Izlazi

$$\frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2 \approx \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} e_n^2.$$

U zadnjem koraku smo iskoristili neprekidnost druge derivacije.

Ova analiza pokazuje (sugerira) da metoda konvergira kvadratično ukoliko je nultočka jednostruka ( $f'(r) \neq 0$ ). Iz ranijeg primjera smo vidjeli da metoda konvergira jedino ako je početna iteracija dovoljno blizu nultočke.

**Napomena.** Broj

$$p_n = -\log_{10} e_n$$

predstavlja broj točnih decimala u aproksimaciji  $x_n$ . Na osnovu toga se lako vidi da ako vrijedi  $e_{n+1} \approx C e_n^2$ , onda se broj točnih decimala u svakoj iteraciji približno udvostručuje. Naime, tada se dobiva

$$p_{n+1} \approx -\log_{10} C + 2p_n.$$

□

**Primjer 1.1** Treba izračunati  $\sqrt{R}$  Newtonovom metodom.

Problem se svodi na rješavanje jednadžbe  $f(x) = x^2 - R^2$ . Newtonova iteracija nakon sređivanja postaje

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{R}{x_n} \right). \quad (1.2)$$

Evolucija greške:

$$x_{n+1} - \sqrt{R} = \frac{(x_n - \sqrt{R})^2}{2x_n}.$$

Odavde se vidi da ako je  $x_0 > 0$ , onda je  $x_1 > \sqrt{R}$  i indukcijom dobivamo da je  $x_n > \sqrt{R}$  za sve  $n > 0$ . Nadalje,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{x_n} - x_n \right) = \frac{R - x_n^2}{2x_n} \leq 0$$

M. JURAK 25. siječnja 2005.

pa zaključujemo da je dobiveni niz monotono padajući i stoga konvergentan. Neka je  $x^*$  njegov limes. Prijelazom na limes kada  $n \rightarrow \infty$  u (1.2) dobivamo

$$x^* = \frac{1}{2}\left(x^* + \frac{R}{x^*}\right)$$

odnosno  $x^* = \sqrt{R}$ . U ocjeni greške možemo primijeniti ocjenu  $x_n > \sqrt{R}$  pa dobivamo

$$|x_{n+1} - \sqrt{R}| \leq \frac{(x_n - \sqrt{R})^2}{2\sqrt{R}}.$$

Dakle, imamo kvadratičnu konvergenciju.

### 1.2.1 Tipovi konvergencije

Iterativne metode generiraju niz aproksimacija točnog rješenja jednadžbe koji u idealnom slučaju konvergira prema njemu. Stoga je potrebno precizirati terminologiju vezanu uz konvergenciju nizova. Promatrat ćemo općenito niz  $(x_k)$  u prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Pri tome odabiremo jednu normu na  $\mathbb{R}^n$ , koju označavamo s  $\|\cdot\|$ .

1. Niz  $(x_k)$  iz  $\mathbb{R}^n$  konvergira prema  $x_* \in \mathbb{R}^n$  ako je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_*\| = 0.$$

2. Niz  $(x_k)$  iz  $\mathbb{R}^n$  konvergira linearno prema  $x_* \in \mathbb{R}^n$  ako postoji konstanta  $C < 1$  takva da za sve  $k$ , počevši od nekog  $k_0$ , vrijedi

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq C\|x_k - x_*\|.$$

3. Niz  $(x_k)$  iz  $\mathbb{R}^n$  konvergira superlinearno prema  $x_* \in \mathbb{R}^n$  ako postoji niz  $(c_k)$  koji konvergira u nulu, takav da za sve  $k$  vrijedi

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq c_k\|x_k - x_*\|.$$

4. Neka je  $(x_k)$  niz iz  $\mathbb{R}^n$  koji konvergira prema  $x_* \in \mathbb{R}^n$ . Ako postoje konstante  $p > 1$ ,  $C > 0$  takve da počevši od nekog  $k_0$  vrijedi

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq C\|x_k - x_*\|^p$$

onda kažemo da je red konvergencije niza  $(x_k)$  jednak  $p$ . U slučaju  $p = 2$  i  $p = 3$  govorimo o kvadratno i kubno konvergentnim nizovima.

### 1.2.2 Analiza konvergencije Newtonove metode

**Definicija 1.1** Funkcija  $g: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je Lipschitzova s konstantom  $\gamma$  ako za sve  $x, y \in \Omega$  vrijedi

$$|g(x) - g(y)| \leq \gamma|x - y|.$$

Skup svih Lipschitzovih funkcija s konstantom  $\gamma$  označavamo s  $\text{Lip}_\gamma(\Omega)$ .

**Lema 1.1** Neka je  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija sa svojstvom  $f' \in \text{Lip}_\gamma(a, b)$ . Tada za sve  $x, y \in (a, b)$  vrijedi

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq \frac{\gamma}{2}(y - x)^2.$$

**Dokaz.** Polazeći od Newton-Leibnizove formule

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(z) dz,$$

zamjenom varijabli dobivamo

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) &= \int_x^y (f'(z) - f'(x)) dz \\ &= \int_0^1 [f'(x + t(y - x)) - f'(x)](y - x) dt, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq |y - x| \gamma \int_0^1 t|y - x| dt = \frac{\gamma}{2}(y - x)^2.$$

□

Osnovni rezultat o konvergenciji metode je sljedeći

**Teorem 1.2** Neka je  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija sa svojstvom  $f' \in \text{Lip}_\gamma(a, b)$  i neka postoji  $\rho > 0$  takav da je  $|f'(x)| \geq \rho$  za sve  $x \in (a, b)$ . Tada ako jednačba  $f(x) = 0$  ima rješenje  $r \in (a, b)$ , onda postoji broj  $\eta > 0$  takav da  $|x_0 - r| < \eta$  povlači da niz  $(x_n)$ , generiran Newtonovom metodom, konvergira prema  $r$  i vrijedi

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{\gamma}{2\rho}|x_n - r|^2.$$

**Dokaz.** Ocjena greške lako slijedi iz prethodne leme, kao što ćemo vidjeti, no moramo osigurati da Newtonova iteracija nikad ne izađe iz intervala  $(a, b)$  na kojem vrijede sve naše pretpostavke.

M. JURAK 25. siječnja 2005.

Odaberimo  $\hat{\eta} > 0$  kao najveći broj sa svojstvom da je  $(r - \hat{\eta}, r + \hat{\eta}) \subseteq (a, b)$  te proizvoljan  $\tau \in (0, 1)$ . Broj  $\eta$  definiramo formulom

$$\eta = \min\left\{\hat{\eta}, \tau \frac{2\rho}{\gamma}\right\}.$$

Sada indukcijom pokazujemo da za sve  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{\gamma}{2\rho}|x_n - r|^2 \quad \text{i} \quad |x_{n+1} - r| \leq |x_n - r| < \eta.$$

Baza i korak indukcije pokazuju se na isti naćni. PokaŹimo korak indukcije. Uz pretpostavku da su nejednakosti zadovoljene za  $n - 1$ , imamo

$$\begin{aligned} x_{n+1} - r &= x_n - r - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{f'(x_n)}[(x_n - r)f'(x_n) - f(x_n)] \\ &= \frac{1}{f'(x_n)}[f(r) - f(x_n) - (r - x_n)f'(x_n)]. \end{aligned}$$

Prema Lemi 1.1 imamo

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{1}{|f'(x_n)|} |f(r) - f(x_n) - (r - x_n)f'(x_n)| \leq \frac{\gamma}{2\rho} |x_n - r|^2.$$

Iz dokazanog i prema definiciji broja  $\eta$  slijedi

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{\gamma}{2\rho} |x_n - r|^2 \leq \frac{\gamma}{2\rho} |x_n - r| \tau \frac{2\rho}{\gamma} = \tau |x_n - r| < |x_n - r| < \eta.$$

Time je dokaz gotov.  $\square$

### 1.2.3 Metode kada derivacija nije poznata

Newtonova metoda funkcionira tako da u  $n$ -tom koraku funkciju zamijeni modelom  $M_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$  i zatim traŹi njegovu nultoćku. Ako nam analitićki izraz za derivaciju nije poznat, onda moŹemo pokuŹati s modelom

$$M_n(x) = f(x_n) + a_n(x - x_n)$$

pri ćemu je  $a_n$  aproksimacija derivacije  $f'(x_n)$ . Time dolazimo do metode oblika

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{a_n}.$$

Newtonova metoda s konaćnom diferencijom sastoji se u tome da se za  $a_n$  uzme

$$a_n = \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n},$$

gdje je  $h_n$  na neki način odabran korak. Jedno izračunavanje funkcije  $f(x)$  se može uštediti po koraku ako se za  $a_n$  uzme izraz

$$a_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Time se dobiva metoda sekante za koju je dakle  $h_n = e_{n-1}$ .

Napravimo sada ocjenu greške za metodu s konačnom diferencijom. Imamo

$$\begin{aligned} x_{n+1} - r &= x_n - r - \frac{f(x_n)}{a_n} \\ &= \frac{1}{a_n} [(x_n - r)a_n - f(x_n)] \\ &= \frac{1}{a_n} [f(r) - f(x_n) - (r - x_n)a_n] \\ &= \frac{1}{a_n} [f(r) - f(x_n) - (r - x_n)f'(x_n) + (f'(x_n) - a_n)(r - x_n)] \end{aligned}$$

Prema Lemi 1.1 imamo ( $e_n = x_n - r$ )

$$|e_{n+1}| \leq \frac{1}{|a_n|} \left[ \frac{\gamma}{2} e_n^2 + |f'(x_n) - a_n| |e_n| \right].$$

Neka je  $a_n$  zadano formulom konačne diferencije s nekim korakom  $h_n$ . Tada ponovo koristeći Lemu 1.1, imamo

$$|f'(x_n) - a_n| = \left| f'(x_n) - \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n} \right| \leq \frac{1}{h_n} \frac{\gamma}{2} h_n^2 = \frac{\gamma}{2} h_n.$$

Time smo dobili ocjenu

$$|e_{n+1}| \leq \frac{1}{|a_n|} \frac{\gamma}{2} [e_n^2 + |h_n e_n|].$$

Ukoliko imamo ocjenu na derivaciju odozdo oblika  $|f'(x)| \geq \rho$ , onda se takva ocjena može za dovoljno male korake dobiti i na  $a_n$ . Stoga možemo zaključiti da će metoda ostati drugog reda točnosti ako je

$$|h_n| \leq C |e_n|,$$

s konstantom  $C$  koja ne ovisi o  $n$ . Ukoliko imamo samo da  $h_n \rightarrow 0$  kada  $n \rightarrow \infty$ , onda dobivamo superlinearnu konvergenciju. U slučaju metode sekante imamo

$$|e_{n+1}| \leq \frac{1}{|a_n|} \frac{\gamma}{2} [e_n^2 + |e_{n-1} e_n|] \leq \frac{\gamma}{|a_n|} |e_{n-1} e_n|.$$

### Napomena.

- Jedan praktičan izbor koraka  $h_n$  je  $h_n = \sqrt{\varepsilon} |x_n|$ , gdje je  $\varepsilon$  strojni epsilon;
- Korak  $h_n$  se ne smije uzimati suviše malim jer će doći do dominacije grešaka zaokruživanja. Ako je potrebno moguće je koristiti centralnu diferenciju za računanje koeficijenta  $a_n$ . To omogućava uzimanje većeg koraka, ali uvodi još jedno računanje funkcije u svakom koraku.  $\square$

### 1.3 Jednostavne iteracije

Jednadžba  $f(x) = 0$  može se rješavati tako ako se zapiše u obliku  $x = g(x)$  i zatim se primjene tzv. *jednostavne iteracije*:

$$x_{n+1} = g(x_n). \quad (1.3)$$

Time je problem nalaženja nultočke sveden na problem određivanja fiksne točke preslikavanja  $g$ . Metoda se bazira na Banachovom teoremu o fiksnoj točki. Najprije uvedimo definiciju kontrakcije:

**Definicija 1.2** Funkcija  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je kontrakcija na  $[a, b]$  ako postoji konstanta  $0 < L < 1$  takva da je za sve  $x, y \in [a, b]$

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

Funkcija je dakle kontrakcija ako je Lipschitzova s konstantom strogo manjom od jedan.

**Teorem 1.3** Neka je  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija na segmentu  $[a, b]$  sa sljedeća dva svojstva:

1. Za sve  $x \in [a, b]$ ,  $g(x) \in [a, b]$ ;
2.  $g$  je kontrakcija na  $[a, b]$ .

Tada  $g$  ima jedinstvenu fiksnu točku u segmentu  $[a, b]$  i niz jednostavnih iteracije  $(x_k)$ , definiran s (1.3), konvergira prema fiksnoj točki za svaku početnu vrijednost  $x_0 \in [a, b]$ .

**Dokaz.** Promatramo niz jednostavnih iteracija (1.3), pri čemu je  $x_0 \in [a, b]$  proizvoljno. Uočimo prvo da je za svako  $n \geq 1$

$$|x_n - x_{n-1}| = |g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| \leq L|x_{n-1} - x_{n-2}|,$$

i stoga rekurzivno slijedi

$$|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1}|x_1 - x_0|.$$

Uzmimo sada  $n > m > 0$ :

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\ &= |g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| + \cdots + |g(x_m) - g(x_{m-1})| \\ &\leq L(|x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_m - x_{m-1}|) \\ &\leq \left( \sum_{k=m}^{n-1} L^{k-1} \right) |x_1 - x_0| = L^{m-1} \left( \sum_{k=0}^{n-m-1} L^k \right) |x_1 - x_0| \\ &\leq L^{m-1} \frac{1}{1-L} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Odavde lako zaključujemo da je  $(x_n)$  Cauchyjev niz te je stoga konvergentan. Ako sa  $r \in [a, b]$  označimo limes tog niza, onda prijelazom na limes u (1.3), koristeći neprekidnost funkcije  $g$ , dobivamo

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(r).$$

Time je dokazana egzistencija fiksne točke i konvergencija niza jednostavnih iteracija. Ostaje još samopokazati da je fiksna točka jedinstvena. Pretpostavimo stoga da postoje dvije fiksne točke,  $r, \eta \in [a, b]$ . Tada je

$$|r - \eta| = |g(r) - g(\eta)| \leq L|r - \eta| < |r - \eta|.$$

To je kontradikcija i teorem je dokazan.  $\square$

**Napomena.** Iz dokaza Banachovog teorema o fiksnoj točki lako se dobiva ocjena za brzinu konvergencije jednostavnih iteracija. Naime, u dokazu je pokazano da je

$$|x_n - x_m| \leq \frac{L^{m-1}}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

Prijeđemo li na limes kada  $n \rightarrow \infty$ , dobivamo

$$|r - x_m| \leq \frac{L^{m-1}}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

Dakle  $|r - x_m| < \varepsilon$  bit će zadovoljeno ako je

$$\frac{L^{m-1}}{1-L}|x_1 - x_0| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad m > 1 + \frac{\ln|x_1 - x_0| - \ln(\varepsilon(1-L))}{\ln(1/L)}. \quad \square$$

Pretpostavimo li da je funkcija  $g$  derivabilna, pomoću Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti dobivamo ovaj teorem čije je pretpostavke lakše provjeriti.

**Teorem 1.4** Neka je  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija na segmentu  $[a, b]$  sa sljedeća dva svojstva:

1. Za sve  $x \in [a, b]$ ,  $g(x) \in [a, b]$ ;
2.  $g$  je neprekidno derivabilna i  $|g'(x)| < 1$  za sve  $x \in (a, b)$ .

Tada vrijede zaključci Teorema 1.3.

**Primjer 1.2** Jednadžbu  $f(x) = e^x - 1 - 2x = 0$  možemo pokušati riješiti s dvije vrste jednostavnih iteracija:

- (a)  $x_{n+1} = (e^{x_n} - 1)/2$ ;
- (b)  $x_{n+1} = \ln(1 + 2x_n)$ .

M. JURAK 25. siječnja 2005.

Da bismo vidjeli koja od tih iteracija konvergira primijetimo da je  $f(1) < 0 < f(2)$ , pa se nultočka nalazi u segmentu  $[1, 2]$ .

U slučaju (a) je  $g(x) = (e^x - 1)/2$  te  $g'(x) = e^x/2 > 1$  za  $x \geq 1$ . Uvjet kontrakcije ovdje nije zadovoljen te ne možemo očekivati sa sigurnošću konvergenciju (provjerite eksperimentalno).

U slučaju (b) je  $g(x) = \ln(1 + 2x)$  i  $g'(x) = 2/(1 + 2x) < 1$  za  $x \geq 1$ . Nadalje  $g(x)$  je rastuća funkcijam  $g(1) = \ln 3$ ,  $g(2) = \ln 5$ , te je slika  $g([1, 2]) \subset [1, 2]$ . Time su pretpostavke Banachovog teorema zadovoljene i jednostavne iteracije konvergiraju za svaki početni podatak iz segmenta  $[1, 2]$ .

Svaku iterativnu metodu možemo interpretirati kao metodu jednostavnih iteracija. Na primjer, za Newtonovu metodu imamo

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Banachov teorem o fiksnoj točki ima vrlo jake pretpostavke. Za egzistenciju fiksne točke dovoljno je uzeti prvu pretpostavku iz Teorema 1.3.

**Teorem 1.5** (Brouwerov teorem o fiksnoj točki) Neka je  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija na segmentu  $[a, b]$  i neka je  $g(x) \in [a, b]$  za sve  $x \in [a, b]$ . Tada  $g$  ima bar jednu fiksnu točku u segmentu  $[a, b]$ .

Uočimo da teorem ne daje jedinstvenost fiksne točke niti konvergenciju jednostavnih iteracija.

**Dokaz.** Funkcija  $f(x) = x - g(x)$  je neprekidna na segmentu i zbog  $g(a), g(b) \in [a, b]$  zadovoljava

$$f(a) = a - g(a) \leq 0 \quad f(b) = b - g(b) \geq 0.$$

Dakle,  $f(a)f(b) \leq 0$  i stoga  $f(x)$  ima barem jednu nultočku na  $[a, b]$ , što je ekvivalentno tvrdnji teorema.  $\square$

Ovaj se čuveni teorem generalizira na preslikavanja na  $\mathbb{R}^n$ .

**Jednostavna analiza greške.** Neka je  $g(r) = r$  i  $e_n = x_n - r$ . Tada je

$$e_{n+1} = g(x_n) - g(r) = g'(r)e_n + \frac{1}{2}g''(r)e_n^2 + \dots$$

Iz ovog razvoja možemo vidjeti red konvergencije metode. Ako je  $g'(r) \neq 0$ , onda je ona prvog reda, ako je  $g'(r) = 0$  i  $g''(r) \neq 0$ , onda je drugog itd. Nadalje, lako se vidi da ako je funkcija  $g(x)$  rastuća, onda je niz jednostavnih iteracija monoton, a ako je  $g(x)$  padajuća funkcija, onda niz oscilira oko fiksne točke.

### 1.3.1 Newtonova metoda za nultočke višeg reda

Newtonova metoda može se promatrati kao jedna od metoda jednostavnih iteracija. S tim ciljem problem nalaženja nultočke  $f(x) = 0$  formuliramo kao problem nalaženja fiksne točke  $x = x + \lambda(x)f(x)$  u kojem želimo funkciju  $\lambda(x)$

odrediti tako da  $g(x) = x + \lambda(x)f(x)$  ima u nultočki funkcije  $f(x)$  prvu derivaciju jednaku nuli. Tada će, prema prethodnoj analizi, metoda jednostavnih iteracija biti kvadratično konvergentna.

Označimo s  $r$  nultočku funkcije  $f(x)$ . Imamo

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x + \lambda(x)f(x)) = 1 + \lambda'(x)f(x) + \lambda(x)f'(x).$$

U  $x = r$  dobivamo

$$g'(r) = 1 + \lambda'(r)f(r) + \lambda(r)f'(r) = 1 + \lambda(r)f'(r).$$

Dakle, uz uvjet da je  $f'(r) \neq 0$ , (jednostruka nultočka) treba uzeti

$$\lambda(r) = -\frac{1}{f'(r)} \Rightarrow g'(r) = 0.$$

Taj je uvjet najjednostavnije zadovoljiti tako da uzmemo

$$\lambda(x) = -\frac{1}{f'(x)},$$

što vodi na

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

i vidimo da je pripadna metoda jednostavnih iteracija upravo Newtonova metoda.

Iz prethodnog rauna vidimo da je Newtonova metoda drugog reda točnosti ukoliko je nultočka funkcije  $f(x)$  jednostruka. U suprotnom, ako je  $f'(r) = 0$ , gornji račun nije korektan. Da bismo vidjeli kojiko je  $g'(r)$  uz pretpostavku da je  $f'(r) = 0$ , pretpostavimo da je nultočka dvostruka:

$$f'(r) = 0, \quad f''(r) \neq 0.$$

Tada deriviranjem izraza

$$f'(x)g(x) = f'(x)x - f(x)$$

dva puta dobivamo:

$$\begin{aligned} f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) &= f''(x)x + f'(x) - f'(x) = f''(x)x \\ f'''(x)g(x) + 2f''(x)g'(x) + f'(x)g''(x) &= f'''(x)x + f''(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Uvrstimo u drugu jednakost  $x = r$  i uvažimo  $f(r) = 0$ ,  $g(r) = r$  (odnosno  $\lim_{x \rightarrow r} g(x) = r$ ), dobivamo

$$f'''(r)r + 2f''(r)g'(r) = f'''(r)r + f''(r), \quad (1.5)$$

što daje (zbog  $f''(r) \neq 0$ )  $g'(r) = 1/2$ . Metoda dakle nije kvadratično konvergentna.

Postavlja se pitanje kako modificirati Newtonovu metodu tako da ona ostane kvadratično konvergentna i u slučaju višestruke nultočke. Dade se naslutiti da će modifikacija biti ovisna o redu nultočke. Pogledajmo ponovo slučaj nultočke drugog reda. Da bismo postigli  $g'(r) = 0$ , u jednažbi (1.5) nam nedostaje član  $-f''(r)$ . Umjesto (1.5) trebali bismo imati

$$f'''(r)r + 2f''(r)g'(r) = f'''(r)r + f''(r) - \boxed{f''(r)}.$$

Uokvireni član je onaj kojeg smo dodali. Odavde sada možemo rekonstruirati novu polaznu jednažbu ako uočimo da gornji rezultat dobivamo ako se (1.4) modificira analogno:

$$f'''(x)g(x) + 2f''(x)g'(x) + f'(x)g''(x) = f'''(x)x + f''(x) - \boxed{f''(r)},$$

što možemo pisati u obliku:

$$\frac{d^2}{dx^2}(f'(x)g(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(f'(x)x - f(x)) - \boxed{f''(r)}.$$

Sada se vidi da treba uzeti

$$g(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)},$$

i modificirana Newtonova metoda za nultočke drugog reda postaje

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Opisani postupak se generalizira neposredno na nultočke bilo kojeg reda. Ako imamo nultočku  $k$ -tog reda ( $k > 1$ ),

$$f(r) = f'(r) = \dots = f^{(k-1)}(r) = 0, \quad f^{(k)}(r) \neq 0$$

onda se pokazuje da je

$$g'(r) = \frac{k-1}{k} \tag{1.6}$$

i da modificirana Newtonova metoda glasi

$$x_{n+1} = x_n - k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.7}$$

## 1.4 Zadaci

Z1.1. Bisekcijom nađite nultočke sljedećih funkcija:

- $f(x) = 1/x - \operatorname{tg} x$  na  $[0, \pi/2]$ ;
- $f(x) = 1/x - 2^x$  na  $[0, 1]$ ;
- $f(x) = 2^{-x} + e^x + 2 \cos x - 6$  na  $[1, 3]$ ;
- $f(x) = (x^3 + 4x^2 + 3x + 5)/(2x^3 - 9x^2 + 18x - 2)$  na  $[0, 4]$ .

Z1.2. Dokažite da za nultočku  $k$ -tog reda vrijedi formula (1.6) i da modificirana Newtonova metoda za nultočku  $k$ -tog reda ima oblik (1.7).