

1

Numeričko integriranje

1.1 Elementarne formule

U ovom poglavlju promatramo problem numeričkog računanja integrala

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

gdje je $f(x)$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$.

Elementarne formule za aproksimaciju integrala nije teško dobiti. Na primjer, uzmemo li bilo koju točku $\bar{x} \in [a, b]$ možemo pisati

$$I \approx f(\bar{x})(b - a).$$

To je tzv. pravokutna formula. Dobivena je tako da je podintegralna funkcija $f(x)$ *aproksimirana* konstantom $g(x) = f(\bar{x})$. Precizniju formulu dobivamo ako uzmemo bolju aproksimaciju funkcije $f(x)$, ali još uvijek dovoljno jednostavnu da znamo izračunati njen integral. Na primjer, možemo aproksimirati funkciju afinom funkcijom kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Time dolazimo do *trapezne* formule

$$I \approx \frac{b - a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Sljedeći prirodan korak je aproksimirati funkciju kvadratnim polinomom kroz točke

$$(a, f(a)), \quad (b, f(b)), \quad \left(\frac{a + b}{2}, f\left(\frac{a + b}{2}\right)\right).$$

Na taj način dolazimo do *Simpsonove* formule

$$I \approx \frac{b - a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b)).$$

Prije nego što prijedemo na generalizaciju ovog postupka pogledajmo kolika je točnost ovako dobivenih formula. Iz samog izvoda može se odmah zaključiti da će točnost biti to veća što je interval (a, b) po kojem se integrira manji jer se neprekidna funkcija $f(x)$ i njena aproksimacija malo razlikuju na dovoljno malim intervalima. Stoga ćemo preciznost gornjih formula analizirati u odnosu na (mali) parametar $h = b - a$. Radi jednostavnosti promatrat ćemo samo pravokutnu formulu s $\bar{x} = a$ i pretpostavit ćemo da je podintegralna funkcija dovoljno glatka. To nam omogućava primjenu Taylorovog razvoja. Imamo

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^{a+h} f(x) dx.$$

Greška integracijske formule (u ovisnosti o h) je

$$e(h) = I(h) - f(a)h,$$

gdje smo integral napisali kao funkciju od h . Po Taylorovoj formuli možemo naći neki $\eta \in (0, h)$ takav da je

$$e(h) = e(0) + e'(0)h + \frac{1}{2}e''(\eta)h^2.$$

S druge strane lako je izračunati da je

$$e(0) = 0, \quad e'(h) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow e'(0) = 0, \quad e''(\eta) = f'(a+\eta).$$

(Uočite da je $e''(0) \neq 0$.) Stoga za grešku imamo

$$e(h) = \frac{h^2}{2}f'(a+\eta).$$

Vidimo da pravokutna formula ima drugi red točnosti kada $h \rightarrow 0$ (ako se h smanji dva puta, greška se smanji četiri puta) ukoliko je prva derivacija funkcije f ograničena na domeni integracije. Dobivenu formulu možemo zapisati u obliku

$$\int_a^b f(x) dx = f(\bar{x})(b-a) + O((b-a)^2) \quad (1.1)$$

Formula je istinita za svaku vrijednost $\bar{x} \in [a, b]$, a često se primijenjuje za $\bar{x} = a$ ili $\bar{x} = b$. Uzmemo li za točku \bar{x} centar intervala dobit ćemo točniju formulu. To možemo vidjeti na sljedeći način. Uvedimo oznaku $\bar{x} = (a+b)/2$ i napravim Taylorov razvoj funkcije greške $e(h)$, pretpostavljajući dovoljnu glatkoću podintegralne funkcije. Funkcija greške sada ima oblik:

$$e(h) = \int_a^{a+h} f(x) dx - f\left(a + \frac{h}{2}\right)h, \quad e(0) = 0.$$

$$e'(h) = f(a+h) - f(a + \frac{h}{2}) - f'(a + \frac{h}{2})\frac{h}{2}, \quad e'(0) = 0;$$

$$e''(h) = f'(a+h) - f'(a + \frac{h}{2}) - f''(a + \frac{h}{2})\frac{h}{4}, \quad e''(0) = 0;$$

$$e'''(h) = f''(a+h) - f''(a + \frac{h}{2})(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) - f'''(a + \frac{h}{2})\frac{h}{8}, \quad e'''(0) = f'''(a)\frac{1}{4}.$$

Sada je

$$e(h) = e(0) + e'(0)h + \frac{1}{2}e''(0)h^2 + \frac{1}{6}e'''(\xi)h^3 = \frac{1}{6}e'''(\xi)h^3,$$

gdje je ξ neka točka iz intervala (a, b) . Uz pretpostavku da je treća derivacija podintegralne funkcije f ograničena na domeni integracije dobivamo

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + O((b-a)^3). \quad (1.2)$$

Slično se pokazuje da trapezna formula ima treći red točnosti,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + O((b-a)^3). \quad (1.3)$$

a Simpsonova peti

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)) + O((b-a)^5). \quad (1.4)$$

Članovi $O((b-a)^3)$ i $O((b-a)^5)$ predstavljaju grešku integracijskih formula. Kasnije ćemo pokazati kako se tim izrazima može dati preciznija forma.

1.2 Newton-Cotesove formule

Postupak kojim smo izveli elementarne formule za numeričko integriranje može se generalizirati. Radi se o tome da podintegralnu funkciju $f(x)$ aproksimiramo interpolacijakim polinomom $p_n(x)$ te da za približnu vrijednost integrala uzmemo

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx.$$

Kako integral polinoma znamo izračunati time dobivamo dobro definiranu formulu numeričke integracije. Evidentno za $n = 0$ dobivamo pravokutnu formulu, za $n = 1$ trapeznu, a za $n = 2$ Simpsonovu. Formule dobivene tim putem nazivamo Newton-Cotesove formule.

Newton-Cotesova formula reda $n + 1$ za aproksimaciju određenog integrala

$$\int_a^b f(x) dx$$

dobiva se tako da se funkcija f zamijeni Lagrangeovim interpolacijskim polinomom stupnja n , koji interpolira vrijednosti funkcije f u $n + 1$ ekvidistantnih točaka. Ukoliko su krajnje točke intervala a i b ujedno i interpolacijske točke onda govorimo o **zatvorenoj** Newton-Cotesovoj formuli a u suprotnom o **otvorenoj**.

Pogledajmo zatvorenu Newton-Cotesovu formulu reda $n + 1$. Interpolacijske točke su

$$x_i = a + hi \quad \text{gdje je} \quad h = (b - a)/n \quad \text{i} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Lagrangeov interpolacijski polinom je oblika:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \quad \text{gdje je} \quad l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}.$$

Stoga dolazimo do formule

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx.$$

Integrale na desnoj strani u ovoj formuli možemo egzaktno izračunati. Nakon zamjene varijabli $x = a + th$ dobivamo

$$\int_a^b l_i(x) dx = h \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - j}{i - j} dt = h \lambda_{n,i}$$

što nam daje eksplicitnu zavisnost koeficijenata formule o parametru h (duljini intervala). Konačno Newton-Cotesova formula reda $n + 1$ ima oblik

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^n f(x_i) \lambda_{n,i}, \quad (1.5)$$

gdje koeficijenti $\lambda_{n,i}$ ne ovise o a i b . Osnovno svojstvo ovih formula, koje slijedi iz načina na koji su izvedene, je sljedeće: **Newton-Cotesova formula reda $n + 1$ točna je na polinomima stupnja manjeg ili jednakog n .** Taj način izražavanja preciznosti formula numeričke integracije u mnogim je situacijama praktičniji.

1.2.1 Ocjena greške

Lagrangeov interpolacijski polinom nam omogućava ocjenu greške Newton-Cotesove formule. Imamo

$$f(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] w_n(x),$$

gdje je

$$w_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

Integriranjem dobivamo

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^n f(x_i) \lambda_{n,i} + \int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] w_n(x) dx.$$

Greška $n + 1$ -ve Newton-Cotesove formule dana je stoga formulom

$$e_{n+1}(f) = \int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] w_n(x) dx.$$

Pokažimo kako možemo ocijeniti grešku u slučaju trapezne formule ($n = 1$). Imamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + \int_a^b f[a, b, x] (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \int_a^b f[a, b, x] (x-a)(b-x) dx. \end{aligned}$$

Kako je $(x-a)(b-x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$ možemo primijeniti teorem srednje vrijednosti za integrale koji kaže da postoji točka $\xi \in [a, b]$ za koju je

$$\int_a^b f[a, b, x] (x-a)(b-x) dx = f[a, b, \xi] \int_a^b (x-a)(b-x) dx = \frac{h^3}{6} f[a, b, \xi].$$

Konačno, formulu možemo zapisati u obliku

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) - \frac{h^3}{12} f''(\eta), \quad h = b - a, \quad (1.6)$$

budući da postoji točka $\eta \in [a, b]$, takva da je $f[a, b, \xi] = f''(\eta)/2!$.

Analogno se može pokazati sljedeća ocjena za Simpsonovo pravilo: postoji točka $\eta \in [a, b]$ za koju je

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta), \quad h = \frac{b-a}{2}, \quad (1.7)$$

Za više n -ove analiza greške je nešto složenija. Dobivaju se sljedeća dva teorema (vidi Isaacson, Keller, [?]): Koristimo li interpolacijski polinom **parnog** stupnja, dobivamo

Teorem 1.1 Neka je n paran broj i $f \in C^{(n+2)}([a, b])$. Tada postoji $x \in (a, b)$ takvo da je

$$e_{n+1}(f) = \frac{K_n}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta),$$

gdje je

$$K_n = \int_a^b x w_n(x) dx < 0.$$

Koristimo li interpolacijski polinom neparnog stupnja, dobivamo

Teorem 1.2 Neka je n neparan broj i $f \in C^{(n+1)}([a, b])$. Tada postoji $x \in (a, b)$ takvo da je

$$e_{n+1}(f) = \frac{K_n}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta),$$

gdje je

$$K_n = \int_a^b w_n(x) dx < 0.$$

Po konstrukciji odmah slijedi da je Newton-Cotesova formula $n+1$ -og reda točna na polinomima stupnja manjeg ili jednakog n . Sada vidimo da u slučaju parnog n -a vrijedi jača tvrdnja: formula je točna na polinomima stupnja manjeg ili jednakog $n+1$.

Uvedimo polinome

$$\begin{aligned} \pi_0(x) &= x \\ \pi_n(x) &= x(x-1) \cdots (x-n), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Tada je, u uvjetima prethodna dva teorema, ovisnost greške o h dana sljedećim formulama: za n parno:

$$e_{n+1}(f) = \frac{M_n h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta), \quad M_n = \int_0^n x \pi_n(x) dx < 0.$$

Za neparno n :

$$e_{n+1}(f) = \frac{M_n h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta), \quad M_n = \int_0^n \pi_n(x) dx < 0.$$

1.2.2 Formule višeg reda

Navedimo još neke primjer Newton-Cotesovih formula. Pri tome ćemo koristiti oznake $x_i = a + i * h$, $h = (b - a)/n$ te $f_i = f(x_i)$. Formule vrijede u smislu da postoji barem jedna točka $\xi \in (a, b)$ za koju vrijedi jednakost.

Newtonovo 3/8 pravilo ($n = 3$):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{3h}{8} [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] - \frac{3h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

Milenovo ili Rombergovo pravilo ($n = 4$):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{2h}{45} [7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi).$$

$n = 5$:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{2h}{288} [19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5] - \frac{27h^7}{12096} f^{(6)}(\xi).$$

$n = 8$:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{4h}{14175} [989f_0 + 5888f_1 - 928f_2 + 10496f_3 - 4540f_4 + 10496f_5 - 928f_6 + 5888f_7 + 989f_8] - \frac{2368h^{11}}{467775} f^{(10)}(\xi).$$

1.2.3 Otvorene Newton-Cotesove formule

Ponekad je zgodno interpolirati podintegralnu funkciju samo kroz unutarnje točke intervala integracije. U tu svrhu definirajmo

$$h = \frac{b-a}{n+1}, \quad x_j = a + jh, \quad j = 1, \dots, n.$$

Prva točka kroz koju interpoliramo funkciju je $x_1 = a + h$, a zadnja je $x_n = b - h$. Ako je $p_n(x)$ pripadni interpolacijski polinom, dobivamo

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx = h \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} f(x_i),$$

gdje je

$$\lambda_{n,i} = \int_0^{n+1} \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t-j}{i-j} dt \quad (1.8)$$

Navodimo neke od tih formula:

$n = 1$:

$$\int_a^b f(x) dx = 2hf_1 + \frac{h^3}{3} f^{(2)}(\xi).$$

$n = 2$:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{3h}{2} (f_1 + f_2) + \frac{3h^3}{4} f^{(2)}(\xi).$$

$n = 3$:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{4h}{3} (2f_1 - f_2 + 2f_3) + \frac{28h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

M. JURAK 6. listopada 2009.

$n = 4$:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{5h}{24}(11f_1 + f_2 + f_3 + 11f_4) + \frac{95h^5}{144}f^{(4)}(\xi).$$

$n = 5$:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{3h}{10}(11f_1 - 14f_2 + 26f_3 - 14f_4 + 11f_5) + \frac{41h^7}{140}f^{(6)}(\xi).$$

1.2.4 Kompozitne formule

Kao što povećanje broja interpolacijskih točaka ne vodi nužno do uniformno bolje aproksimacije funkcije, tako ne vodi nužno i do bolje integracijske formule. Stoga je efikasnije interval (a, b) podijeliti na niz manjih intervala i integracijsku formulu nižeg reda primijeniti na svaki podinterval.

Uzmimo $N > 1$ i definirajmo

$$x_i = a + hi, \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Tada je $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{N-1}, x_N]$, pa primjenom trapezne formule na svaki podinterval dobivamo

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)].$$

To je kompozitna trapezna formula. Na sličan način postupamo sa Simpsonovom formulom. U tom slučaju uvodimo $2N + 1$. točku

$$x_i = a + hi, \quad i = 0, 1, \dots, 2N, \quad h = \frac{b-a}{2N},$$

i N intervala

$$[a, b] = [x_0, x_2] \cup [x_2, x_4] \cup \dots \cup [x_{2N-2}, x_{2N}].$$

Na svakom podintervalu primijenimo Simpsonovu formulu, što vodi do formule

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} \sum_{i=1}^N [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] \\ &= \frac{h}{3} [f(a) + 4 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i}) + f(b)]. \end{aligned}$$

To je kompozitna Simpsonova formula. Ocjenu greške kompozitnih formula lako je dobiti na osnovu ocjene greške jednostavne formule. Na primjer, za kompozitnu

trapeznu formulu imamo

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)] \right| \\
 & \leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \right| \\
 & \leq \sum_{i=1}^N \frac{h^3}{12} |f''(\xi_i)| \leq \frac{(b-a)^3}{12N^3} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \sum_{i=1}^N 1 \\
 & = \frac{(b-a)^3}{12N^2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.
 \end{aligned}$$

Vidimo da se gubi "jedan red točnosti" u odnosu na jednostavnu formulu.

Posve analogno se dokazuje ocjena

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{3} [f(a) + 4 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i}) + f(b)] \right| \\
 & \leq \frac{(b-a)^5}{180N^4} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.
 \end{aligned}$$

1.3 Adaptivna integracija

Želimo li izračunati integral s unaprijed zadanom točnošću moramo znati procijeniti grešku integracijske formule. Na primjer, možemo se pitati koliko podintervala treba uzeti u kompozitnoj Simpsonovoj formuli da bismo postigli grešku manju od zadane tolerancije ε . Za odgovor na to pitanje moramo poznavati četvrtu derivaciju podintegralne funkcije, što nije uvijek moguće.

Primjer 1.1 Uzmimo da želimo izračunati integral

$$\int_0^2 (4t - t^3)e^{t^2} dt = \frac{1}{2}(5 - t^2)e^{t^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(e^4 - 5)$$

s točnošću $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$. Prema ocjeni greške imamo

$$\frac{(b-a)^5}{180N^4} \max_{a \leq t \leq b} |f^{(4)}(t)| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{45N^4} \max_{0 \leq t \leq 2} |f^{(4)}(t)| \leq \varepsilon,$$

odnosno,

$$N^4 \geq \frac{8}{45\varepsilon} \max_{0 \leq t \leq 2} |f^{(4)}(t)|.$$

Kako je

$$f^{(4)}(t) = (120t + 20t^3 - 80t^5 - 16t^7)e^{t^2}$$

dobivamo ocjenu

$$\max_{0 \leq t \leq 2} |f^{(4)}(t)| \leq 2.3 \cdot 10^5$$

M. JURAK 6. listopada 2009.

što nas vodi na $N \geq 96$. Analogno se pokaže da bi kompozitna trapezna formula vodila na $N \geq 2367$. \square

Budući da četvrta derivacija nije uvijek lako izračunljiva potrebna nam je numerička metoda njene procjene koja će nam omogućiti kontrolu greške integracijske formule.

Kod nekih podintegralnih funkcija četvrta derivacija može jako varirati na intervalu integracije. Kompozitne formule razbijaju interval integracije na podintervale iste duljine što u tim slučajevima vodi do suviše fine podjele intervala u područjima gdje četvrta derivacija nije velika.

Ova dva razloga vode na potrebu za adaptivnom metodom, koja će efikasno izračunati integral s unaprijed zadanom točnošću. Ona će stoga biti kompozitnog tipa, ali subdivizija intervala integracije općenito neće biti ekvidistantna.

Pogledajmo konstrukciju adaptivne metode na bazi Simpsonove formule. Uvedimo sljedeću oznaku

$$S(a, b) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Ocjena greške daje da postoji $\xi \in (a, b)$ takvo da je

$$\int_a^b f(x) dx = S(a, b) - \frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi).$$

Osnovna ideja adaptivne metode je sljedeća: interval integracije razbijamo na manje podintervale (na primjer polovljenjem). Na svakom podintervalu primijenimo Simpsonovu formulu. Uzmimo za trenutak da znamo procijeniti grešku Simpsonove formule. Ako ta greška nije manja od unaprijed zadane tolerancije, onda interval polovimo na dva dijela i na svakom aproksimiramo integral Simpsonovom formulom. Proces polovljenja zaustavljamo kada je dobiveni interval dovoljno mali da Simpsonova formula daje aproksimaciju zadovoljavajuće točnosti. Očito ćemo na taj način doći do neekvidistantne podjele intervala integracije.

Koju točnost treba zahtijevati od Simpsonove formule na pojedinim podintervalima? Da bismo odgovorili na to pitanje uzmimo da imamo jednu subdiviziju intervala integracije

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n],$$

i da je na i -tom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ vrijednost Simpsonove formule jednaka $S_i = S(x_{i-1}, x_i)$, a pripadnu grešku označimo s e_i . Tada je

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^n (S_i + e_i) = \sum_{i=1}^n S_i + \sum_{i=1}^n e_i.$$

Aproksimacija integrala i greška aproksimacije su

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, \quad E = \sum_{i=1}^n e_i.$$

Mi želimo za zadanu toleranciju $\varepsilon > 0$ postići $|E| < \varepsilon$. Stoga ćemo grešku “uniformno raspodijeliti” po svim podintervalima. To znači da moramo zahtijevati

$$|e_i| < \varepsilon \frac{x_i - x_{i-1}}{b - a}. \quad (1.9)$$

Ako je to zadovoljeno na svim podintervalima, onda je evidentno $|E| < \varepsilon$.

Algoritam će dakle poloviti interval sve dok ne dođe do intervala na kojem je ocjena (1.9) zadovoljena. Budući da se pri polovljenju intervala tražena tolerancija dijeli s dva, a greška Simpsonove formule postaje manja za faktor 2^5 , očekujemo da će opisani postupak konvergirati u konačno mnogo koraka.

Sljedeće pitanje na koje moramo dati odgovor je kako procijeniti grešku integracijske formule na svakom pojedinom intervalu. U tu svrhu koristit ćemo postupak sličan Richardsonovoj ekstrapolaciji. Uzmimo neki interval (u, v) i neka je njegovo polovište $w = (u + v)/2$. Tada je za neku točku $\xi_1 \in (u, v)$

$$\int_u^v f(x) dx = S(u, v) - \frac{1}{90} \left(\frac{v - u}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi_1). \quad (1.10)$$

S druge strane, primijenjujući Simpsonovu formulu na svaki od dva podintervala (u, w) i (w, v) , dobivamo

$$\begin{aligned} \int_u^v f(x) dx &= \int_u^w f(x) dx + \int_w^v f(x) dx \\ &= S(u, w) + S(w, v) - \frac{1}{90} \left[\left(\frac{w - u}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi_2) + \left(\frac{v - w}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi_3) \right] \end{aligned}$$

Izraz na desnoj strani možemo pojednostaviti uz pretpostavku neprekidnosti četvrte derivacije. Tada postoji točka ξ takva da je

$$\frac{1}{2}(f^{(4)}(\xi_2) + f^{(4)}(\xi_3)) = f^{(4)}(\xi)$$

pa možemo pisati

$$\int_u^v f(x) dx = S(u, w) + S(w, v) - \frac{1}{16} \frac{1}{90} \left(\frac{v - u}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi). \quad (1.11)$$

Pretpostavimo sada da je interval dovoljno mali da možemo pretpostaviti da je četvrta derivacija na njemu približno konstantna (taj interval dakle može biti veći u području gdje je oscilacija četvrte derivacije manja i mora biti manji u područjima velike oscilacije). Imamo

$$f^{(4)}(\xi), f^{(4)}(\xi_1) \approx f_4$$

gdje smo srednju vrijednost označili s f_4 . Jednadžbe (1.10) i (1.11) prelaze u

$$\int_u^v f(x) dx \approx S(u, v) - \frac{1}{90} \left(\frac{v - u}{2} \right)^5 f_4,$$

$$\int_u^v f(x) dx = S(u, w) + S(w, v) - \frac{1}{16} \frac{1}{90} \left(\frac{v-u}{2} \right)^5 f_4,$$

što nakon oduzimanja daje

$$0 \approx S(u, v) - S(u, w) - S(w, v) - \left(1 - \frac{1}{16}\right) \frac{1}{90} \left(\frac{v-u}{2} \right)^5 f_4.$$

Time smo došli do procjene za srednju vrijednost četvrte derivacije koju ćemo napisati u obliku:

$$\frac{1}{16} \frac{1}{90} \left(\frac{v-u}{2} \right)^5 f_4 \approx \frac{1}{15} (S(u, v) - S(u, w) - S(w, v)). \quad (1.12)$$

Kao posljedicu dobivamo još točniju formulu za vrijednost integrala na intervalu (u, v) ,

$$\int_u^v f(x) dx \approx S(u, w) + S(w, v) + \frac{1}{15} [S(u, w) + S(w, v) - S(u, v)]. \quad (1.13)$$

Uočimo da je taj korak upravo jedan korak Richardsonove ekstrapolacije.

Sada imamo sve elemente koji su potrebni za funkcioniranje adaptivnog algoritma.

Osnovni korak algoritma: Algoritam počinje s intervalom integracije (a, b) . Za taj interval, kao i za svaki sljedeći formira se vektor od 6 komponenti:

$$(a, h, f(a), f(a+h), f(a+2h), S) \quad (1.14)$$

gdje je $h = (b-a)/2$ pola duljine intervala i $S = S(a, b)$. Uočimo da vektor sadrži sve komponente potrebne za Simpsonovu formulu. U sljedećem koraku računamo dodatne vrijednosti

$$c = a + h, \quad S^* = S(a, c), \quad S^{**} = S(c, b),$$

gdje je, dakle c polovište intervala, a S^* i S^{**} vrijednosti Simpsonove formule na podintervalima. Iz formule za ocjenu greške znamo da je $S^* + S^{**}$ točnija vrijednost integrala od S . Treba vidjeti da li je ona dovoljno dobra, tj. da li za zadanu toleranciju ε (vidi (1.9)) vrijedi

$$\left| \frac{1}{16} \frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 f_4 \right| = \frac{1}{15} |S(a, b) - S(a, c) - S(c, b)| < \varepsilon \frac{2h}{b-a}. \quad (1.15)$$

Ako je uvjet zadovoljen, onda za vrijednost integrala na (a, b) uzimamo najprecizniju vrijednost koju možemo formirati pomoću izračunatih vrijednosti, a to je

$$S^* + S^{**} + \frac{1}{15} [S^* + S^{**} - S].$$

Ako uvjet (1.15) nije zadovoljen, onda polovimo interval $[a, b]$ na intervale $[a, c]$ i $[c, b]$ i nastavljamo postupak za svaki podinterval. To znači da računamo dva nova vektora

$$\begin{aligned} & \left(a, \frac{h}{2}, f(a), f(y), f(c), S^*\right), \quad y = a + \frac{h}{2} \\ & \left(c, \frac{h}{2}, f(c), f(z), f(b), S^{**}\right), \quad z = c + \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Uočimo da su jedine nove vrijednosti koje treba izračunati $f(y)$ i $f(z)$. Postupak koji smo primijenili na vektor (1.14), primijenimo sada na svaki od dva nova vektora.

Opis cijelog algoritma: Neka je Σ varijabla u koju ćemo akumulirati vrijednost integrala. Na početku ju inicijaliziramo nulom. Nadalje, potreban nam je **stog** vektora koji odgovaraju intervalima na kojima integral još nije izračunat s odgovarajućom točnošću.

Svaki vektor na stogu ima oblik

$$(u, h, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, S)$$

pri čemu se te vrijednosti računaju po formulama

$$\begin{aligned} w &= u + h, & v &= u + 2h \\ \bar{u} &= f(u), & \bar{w} &= f(w), & \bar{v} &= f(v) \\ S &= \frac{h}{3}(\bar{u} + 4\bar{w} + \bar{v}). \end{aligned}$$

nakon što smo jedan takav vektor uzeli sa stoga, polovimo korak

$$h = \frac{h}{2}$$

i računamo sljedeće vrijednosti:

$$\begin{aligned} y &= u + h, & z &= u + 3h \\ \bar{y} &= f(y), & \bar{z} &= f(z), \\ S^* &= \frac{h}{3}(\bar{u} + 4\bar{y} + \bar{w}), & S^{**} &= \frac{h}{3}(\bar{w} + 4\bar{z} + \bar{v}). \end{aligned}$$

Ako je

$$|S^* + S^{**} - S| \leq \frac{30\varepsilon h}{b-a},$$

onda vrijednost

$$S^* + S^{**} + \frac{1}{15}[S^* + S^{**} - S]$$

dodajemo varijabli Σ . Algoritam se tada nastavlja uzimanjem sljedećeg vektora sa stoga. Gotovi smo kada na stogu više nema vektora.

Ako uvijet nije zadovoljen, na stog gurnemo dva nova vektora:

$$(u, h, \bar{u}, \bar{y}, \bar{w}, S^*),$$

$$(u + 2h, h, \bar{w}, \bar{z}, \bar{v}, S^{**}).$$

Nakon toga uzimamo vektor sa stoga i nastavljamo s procesuiranjem.

Napišimo konačan algoritam. U njemu ćemo veličinu stoga ograničiti na n vektora. Vektore ćemo označavati s

$$v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, \dots, v^{(n)}$$

pri čemu su komponente

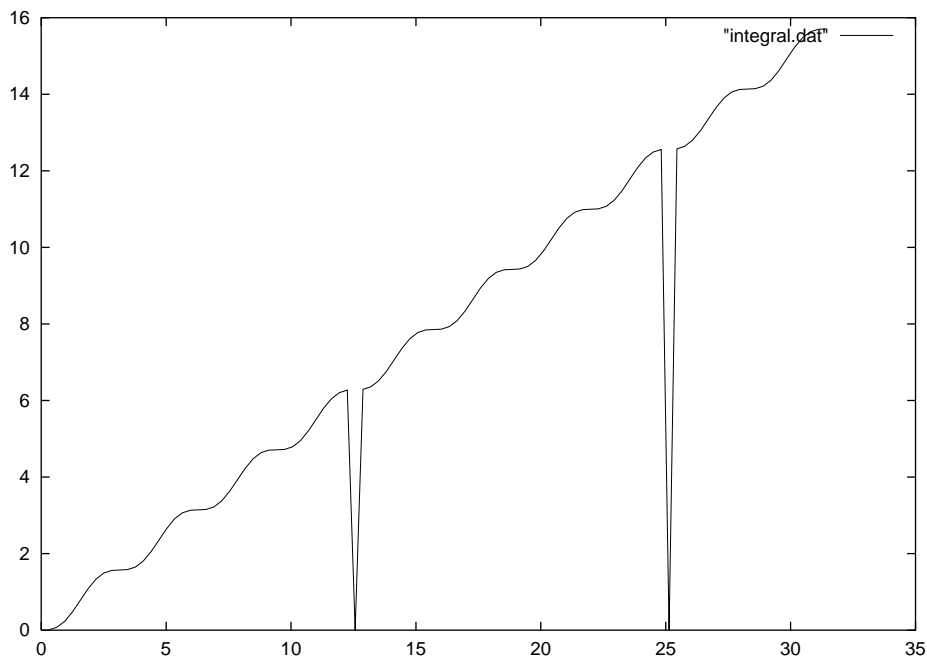
$$v^{(k)} = (v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_6^{(k)}).$$

Problem koji može nastupiti s ovim algoritmom ilustriran je sljedećim primjekom.

Primjer 1.2 Pomoću Algoritma 1.3 treba računati funkciju

$$F(x) = \int_0^x \sin^2 t \, dt$$

na intervalu $x \in [0, 10\pi]$. Rezultat koji se dobiva prikazan je na sljedećoj slici.



Problem se dešava u okolini brojeva $x = 4\pi$ i $x = 8\pi$. Za $x = 4\pi$ algoritam će usporediti $S(0, 4\pi) = 0$, sa $S(0, 2\pi) + S(2\pi, 4\pi) = 0$ i zaključiti da je vrijednost integrala jednaka nuli. Problem je evidentno u tome što se algoritam zaustavio na velikom intervalu integracije, na kojem naša pretpostavka o približnoj konstantnosti četvrte derivacije nije ispunjena.

Algorithm 1 Adaptivna integracija

Ulaz: a, b, ε, n, f
 (a, b) = interval integracije,
 ε = tolerancija,
 n = dimenzija stoga.
 f = podintegralna funkcija

// Inicijalizacija
 $\Delta = b - a$
 $\Sigma = 0$
 $h = \Delta/2$
 $c = (a + b)/2$
 $\bar{a} = f(a), \bar{b} = f(b), \bar{c} = f(c)$
 $S = (\bar{a} + 4\bar{c} + \bar{b})h/3$
 $v^{(1)} = (a, h, \bar{a}, \bar{c}, \bar{b}, S)$ // vrh stoga je cijeli segment $[a, b]$
 $k = 1$ // pokazivač na vrh stoga

while $1 \leq k \leq n$ **do**
 $h = v_2^{(k)}/2$
 $\bar{y} = f(v_1^{(k)} + h)$
 $S^* = (v_3^{(k)} + 4\bar{y} + v_4^{(k)})h/3$
 $\bar{z} = f(v_1^{(k)} + 3h)$
 $S^{**} = (v_4^{(k)} + 4\bar{z} + v_5^{(k)})h/3$
if $|S^* + S^{**} - v_6^{(k)}| < 30\varepsilon h/\Delta$ **then**
 $\Sigma = \Sigma + S^* + S^{**} + \frac{1}{15}[S^* + S^{**} - v_6^{(k)}]$
 $k = k - 1$ // skini vektor sa stoga
if $k \leq 0$ **then**
STOP. Izlaz Σ
end if
else
if $k \geq n$ **then**
STOP. Izlaz s greškom: stog je suviše malen.
end if
 $\bar{v} = v_5^{(k)}$ // to moramo sačuvati
 $v^{(k)} = (v_1^{(k)}, h, v_3^{(k)}, \bar{y}, v_4^{(k)}, S^*)$
 $k = k + 1$
 $v^{(k)} = (v_1^{(k-1)} + 2h, h, v_5^{(k-1)}, \bar{z}, \bar{v}, S^{**})$
end if
end while

Rješenje ovog problema je u tome da se polazni interval integracije prvo podijeli na jedan broj dovoljno malih podintervala te da se adaptivni algoritam primijeni na svaki podinterval. U slučaju periodičkih funkcija treba iskoristiti periodičnost i integrirati samo po osnovnom periodu.

1.4 Gaussove integracijske formule

Newton-Cotesove formule reda n imaju oblik (vidi (1.5))

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \quad (1.16)$$

gdje je $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $h = (b - a)/n$. Prema konstrukciji one su točne na polinomima stupnja n . To nam daje alternativnu mogućnost određivanja *integracijskih težina* w_i . Naime, integrirajući polinome $1, x, x^2, \dots, x^n$ dobivamo sustav linearnih jednadžbi za koeficijente w_i :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w_i &= \int_a^b dx \\ \sum_{i=0}^n x_i w_i &= \int_a^b x dx \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 w_i &= \int_a^b x^2 dx \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=0}^n x_i^n w_i &= \int_a^b x^n dx \end{aligned} \quad (1.17)$$

Matrica ovog sustava je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

čija je determinata tzv. Vandermondeova determinata koja je različita od nule ako su točke x_i međusobno različite.

Formula oblika (1.16) može biti točna na polinomoma stupnja n stoga što u njoj imamo $n+1$ slobodnih koeficijenata $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$ pomoću kojih možemo zadovoljiti jednadžbe (1.17). Integracijske točke x_i su ekvidistantno raspoređene i stoga unaprijed zadane.

Ukoliko integracijske točke mogu biti proizvoljno raspoređene duž segmenta $[a, b]$ dobivamo, još $n + 1$ stupnjeva slobode, ukupno $2n + 2$ koeficijenata koje možemo birati. Pomoću njih možemo dobiti integracijsku formulu točnu na polinomima stupnja $2n + 1$.

Primjer 1.3 Naći integracijsku formulu oblika

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx w_0 f(t_0) + w_1 f(t_1)$$

točnu na polinomima trećeg stupnja ($n = 1, 2n + 1 = 3$).

Prema (1.17) imamo sustav jednažbi:

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 &= 2 \\ t_0 w_0 + t_1 w_1 &= 0 \\ t_0^2 w_0 + t_1^2 w_1 &= \frac{2}{3} \\ t_0^3 w_0 + t_1^3 w_1 &= 0 \end{aligned}$$

Formirajmo polinom

$$p(t) = (t - t_0)(t - t_1) = t^2 + at + b.$$

Množeći prvu jednažbu sa b , drugu sa a , treću s 1 te zbrajajući sve tri dobivamo

$$p(t_0)w_0 + p(t_1)w_1 = 2b + \frac{2}{3}.$$

Odavde zbog $p(t_0) = p(t_1) = 0$ slijedi da je $b = 1/3$. Posve analogno, množeći drugu jednažbu sa b , treću sa a i četvrtu s 1 te zbrajajući sve tri dobivamo

$$t_0 p(t_0)w_0 + t_1 p(t_1)w_1 = \frac{2}{3}a.$$

Odavde slijedi da je $a = 0$ pa dobivamo da je $p(t) = t^2 - 1/3$ odnosno da je

$$t_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nadalje je lako vidjeti iz prve dvije jednažbe da je $w_0 = w_1 = 1$. Time dolazimo do formule

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad \square$$

Napomena. Ukoliko je na segmentu $[-1, 1]$ dana formula numeričke integracije

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{i=0}^n w_i f(t_i),$$

onda zamjenom varijabli

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \quad t \in [-1, 1]$$

M. JURAK 6. listopada 2009.

dolazimo do formule

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \\ &\approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{b+a}{2}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Postavlja se pitanje kako općenito odrediti integracijske točke u Gaussovim integracijskim formulama. Kao i u prethodnom primjeru promatrat ćemo specijalan slučaj kada je interval integracije $(-1, 1)$. Pokazuje se da Odgovor na to pitanje daju ortogonalni polinomi.

1.4.1 Legendreovi polinomi

Rekapitulirat ćemo ukratko svojstva Legendreovih polinoma. U prostor svih polinoma na segmentu $[-1, 1]$ uvedemo skalarni produkt

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

Legendreovi polinomi P_n , za $n = 0, 1, 2, \dots$ su polinomi sa sljedećim svojstvima:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad \deg P_n = n \quad n \geq 0 \\ \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx &= 0 \quad \text{za } n \neq m \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{2}{2n+1} \quad \text{za } n \geq 0 \end{aligned}$$

To su dakle ortogonalni polinomi u ovom skalarnom produktu. Lako je vidjeti da je prvih nekoliko članova

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ &\dots \end{aligned}$$

Kao i ostali ortogonalni polinomi, Legendreovi polinomi imaju ova svojstva: polinom $P_n(x)$ u intervalu $(-1, 1)$ imaju točno n jednostrukih nultočaka koje su simetrično raspoređene po intervalu (ako je x_i nultočka, onda je i $-x_i$ nultočka). Sustav legendreovih polinoma je linearno nezavisan i vrijedi sljedeća rekurzija:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Gaussove integracijske formule na intervalu $(-1, 1)$ imaju oblik

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i),$$

gdje su x_i nultočke $n+1$ -og Legendreovog polinoma $P_{n+1}(x)$, a integracijske težine w_i određene su sustavom algebarskih jednažbi

$$\sum_{i=0}^n x_i^j w_i = \int_{-1}^1 x^j dx \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Integracijsku formulu konstruiranu na ovaj način nazivamo Gaussova integracijska formula reda $n + 1$.

Navedimo nekoliko primjera Gaussovih formula:

Za $n = 1$

| i | x_i | w_i |
|-----|----------------|-------|
| 0 | -0.57735026919 | 1 |
| 1 | 0.57735026919 | 1 |

Za $n = 2$

| i | x_i | w_i |
|-----|-----------------|-----------------|
| 0 | -0.774596669241 | 0.5555555555556 |
| 1 | 0 | 0.8888888888889 |
| 2 | 0.774596669241 | 0.5555555555555 |

Za $n = 3$

| i | x_i | w_i |
|-----|-----------------|----------------|
| 0 | -0.861136311594 | 0.347854845137 |
| 1 | -0.339981043585 | 0.652145154863 |
| 2 | 0.339981043585 | 0.652145154863 |
| 3 | 0.861136311594 | 0.347854845137 |

Za $n = 4$

| i | x_i | w_i |
|-----|-----------------|----------------|
| 0 | -0.906179845939 | 0.236926885056 |
| 1 | -0.538469310106 | 0.478628670499 |
| 2 | 0 | 0.568888888889 |
| 3 | 0.538469310106 | 0.478628670499 |
| 4 | 0.906179845939 | 0.236926885056 |

Sada možemo dokazati sljedeći teorem.

Teorem 1.3 Gaussova integracijska formula reda $n + 1$ točna je na polinomima stupnja $2n + 1$.

Dokaz. Uzmimo polinom $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ i neka je P_{n+1} Legendreov polinom. Tada postoje jedinstveni polinomi $r, q \in \mathbb{P}_n$ takve da je

$$p(x) = q(x)P_{n+1}(x) + r(x).$$

Nadalje, postoje jedinstveni rastavi po Legendreovim polinomima

$$q(x) = \sum_{i=0}^n q_i P_i(x), \quad r(x) = \sum_{i=0}^n r_i P_i(x).$$

Sada je zbog ortogonalnosti Legendreovih polinoma

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(x) dx &= \int_{-1}^1 q(x)P_{n+1}(x) dx + \int_{-1}^1 r(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n (q_i \int_{-1}^1 P_i(x)P_{n+1}(x) dx + r_i \int_{-1}^1 P_i(x)P_0(x) dx) \\ &= r_0 \int_{-1}^1 P_0(x) dx = 2r_0. \end{aligned}$$

S druge strane, prema definiciji integracijskih točaka, imamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w_i p(x_i) &= \sum_{i=0}^n w_i (q(x_i)P_{n+1}(x_i) + r(x_i)) \\ &= \sum_{i=0}^n w_i r(x_i) = \sum_{i=0}^n w_i \sum_{j=0}^n r_j P_j(x_i) \\ &= \sum_{j=0}^n r_j \sum_{i=0}^n w_i P_j(x_i). \end{aligned}$$

Po definiciji integracijskih težina znamo da je formula točna na svim polinomima stupnja manjeg ili jednakog n , a posebno onda i za Legendreove polinome $P_j(x)$, $j \leq n$. Time gornja formula daje

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{j=0}^n r_j \int_{-1}^1 P_j(x) dx = r_0 \int_{-1}^1 P_0(x) dx = 2r_0.$$

Tu smo ponovo iskoristili ortogonalnost. Vidimo, dakle, da za proizvoljno $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ vrijedi

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = 2r_0 = \sum_{i=0}^n w_i p(x_i). \quad \square$$

Posljedica 1.1 Ako je $l_i(x)$, i -ti Lagrangeov interpolacijski polinom, onda je

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i^2(x) dx > 0.$$

Dokaz. Za $i \leq n$ imamo $l_i \in \mathbb{P}_n$, pa je $l_i^2 \in \mathbb{P}_{2n}$. Prema dokazanom imamo

$$\int_{-1}^1 l_i^2(x) dx = \sum_{j=0}^n w_j l_i^2(x_j) = w_i$$

jer je $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$, \square

1.5 Primjene

1. Jednadžba prigušenih oscilacija

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

ima rješenje

$$x(t) = x_0 e^{-bt/2m} \cos(\omega t) + \frac{bx_0 + mv_0}{m\omega} e^{-bt/2m} \sin(\omega t) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t e^{-bv/2m} \sin(\omega v) f(t-v) dv,$$

gdje je

$$b^2 < 4mk, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

Treba računati rješenje ovog problema kada je $f(t)$ periodička funkcija. Obratiti pažnju na rezonanciju.

2. Inicijalno rubni problem za parabolčku jednadžbu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0, \infty), t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in (0, \infty) \\ u(0, t) = u_0 & t > 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

gdje su $a > 0$ i u_0 konstante ima rješenje koje je dano formulom

$$u(x, t) = u_0 \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right],$$

i gdje je $\operatorname{erf}(x)$ Gaussova funkcija greške

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (1.19)$$

Treba nacrtati rješenje na intervalu $(0, L)$ za nekoliko početnih vremena.

3. Fourierov red funkcije $f(x)$ s periodom $2L$ je dan formulom

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

gdje je

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Napraviti program koji crta parcijalne sume Fourierovog reda. Demonstrirati Gibbsov fenomen.

1.5.1 Primjer matematičkog njihala

Matematičko njihalo je čestica mase m obješena o nerastezljivu nit duljine l , u polju sile teže; masu niti pri tome zanemarujemo.

Ako vektor početne brzine leži u vertikalnoj ravnini, onda se gibanje vrši u ravnini određenoj tim vektorom. U ravninu gibanja postavljamo polarni koordinatni sustav s polom u objesištu njihala i polarnom osi orijentiranom vertikalno prema dolje.

Na česticu djeluje sila teža $m\vec{g}$ i sila reakcije niti \vec{N} (koja djeluje duž niti i tjera česticu da se giba po luku kružnice radijusa l)

Newtonov zakon daje jednadžbu gibanja

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N},$$

što projicirano u smjerovima koordinatnih vektora daje

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = N - mg \cos \phi, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = -mg \sin \phi.$$

U tim jednadžbama treba uvažiti uvjet gibanja $r = l$. Time dobivamo

$$-ml\dot{\phi}^2 = N - mg \cos \phi, \quad ml\ddot{\phi} = -mg \sin \phi.$$

Druga jednadžba u ovom sustavu omogućava da se izračuna $\phi = \phi(t)$, a onda iz prve jednadžbe možemo odrediti silu N .

Zadatak. Izvedite diferencijalnu jednadžbu gibanja matematičkog njihala iz zakona sačuvanja energije. \square

Zadatak. Evidentno je $\phi = 0$ stabilan položaj ravnoteže njihala, pa jednadžbu gibanja možemo inearizirati uzimajući $\sin \phi \approx \phi$: dobiva se

$$l\ddot{\phi} + g\phi = 0.$$

Nađite opće rješenje te jednadžbe i pokažite da je period lineariziranog gibanja (odn. vrijeme jednog titraja)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad \square$$

Izračunajmo sada period oscilacija matematičkog njihala. Jednadžbu gibanja

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0$$

pomnožimo s $\dot{\phi}$ i izvučemo jednu derivaciju ispred jednadžbe. Dobivamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{l} \cos \phi\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}^2 = 2\frac{g}{l} \cos \phi + K,$$

gdje je K konstanta. Time smo, ustvari, izveli zakon energije. Konstantu K određujemo iz početnog uvjeta $\phi(0) = \phi_M$, $\dot{\phi}(0) = 0$, koji daje

$$\dot{\phi}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos \phi - \cos \phi_M).$$

Primjenom formule za sinus polovičnog kuta dobivamo

$$\cos \phi - \cos \phi_M = \cos \phi - 1 + 1 - \cos \phi_M = 2\left(\sin^2 \frac{\phi_M}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}\right)$$

i odavde

$$\dot{\phi} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{\sin^2 \frac{\phi_M}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}.$$

Neka su kutevi $\phi_1 = \phi(t_1)$ i $\phi_2 = \phi(t_2)$ takvi da funkcija $\dot{\phi}$ ne mijenja znak na intervalu (t_1, t_2) . Tada je

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_M/2) - \sin^2(\phi/2)}} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}(t_2 - t_1).$$

Uvedimo supstituciju $\sin(\phi/2) = \sin(\phi_M/2) \sin \psi$ i pomoću izraza

$$\sin^2 \frac{\phi_M}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} = \sin^2 \frac{\phi_M}{2} \cos^2 \psi, \quad \frac{1}{2} \cos \frac{\phi}{2} d\phi = \sin \frac{\phi_M}{2} \cos \psi d\psi,$$

$$\cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\phi_M}{2} \sin^2 \psi},$$

transformiramo integral u oblik

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\phi_M}{2} \sin^2 \psi}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}(t_2 - t_1).$$

M. JURAK 6. listopada 2009.

Uvedimo konstantu $k = \sin(\phi_M/2)$ i eliptički integral prve vrste

$$F(k, \psi_1) = \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}.$$

Očito je

$$F(k, \psi_2) - F(k, \psi_1) = \operatorname{sgn}(\dot{\phi}) \sqrt{\frac{g}{l}} (t_2 - t_1).$$

Razbijmo period njihala na dva dijela na kojima $\dot{\phi}$ ne mijenja predznak. Neka je t_1 početni trenutak u kome je $\phi = \phi_M$, odnosno $\psi = \pi/2$. U trenutku t_2 neka je $\phi = -\phi_M$ i $\psi = -\pi/2$, a u trenutku t_3 neka je ponovo $\phi = \phi_M$ odnosno $\psi = \pi/2$. Tada je vrijeme punog njihaja

$$\begin{aligned} T &= (t_3 - t_1) = (t_3 - t_2) + (t_2 - t_1) \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ (F(k, \frac{\pi}{2}) - F(k, -\frac{\pi}{2})) - (F(k, -\frac{\pi}{2}) - F(k, \frac{\pi}{2})) \right\} \\ &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \left(F(k, \frac{\pi}{2}) - F(k, -\frac{\pi}{2}) \right). \end{aligned}$$

Budući da eliptički integral ima simetriju $F(k, \psi) = -F(k, -\psi)$, dolazimo do formule za period

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} F(k, \frac{\pi}{2}) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \quad (1.20)$$

Poznato je da se eliptički integral ne može prikazati pomoću elementarnih funkcija te se stoga mora računati numerički.

Uočimo iz formule (1.20) da, za razliku od lineariziranog njihala, period T ovisi o početnom otklonu njihala.

Zadatak. Primjenom kompozitne trapezne formule izračunajte period matematičkog njihala (npr. $l = 1$, $m = 17$) za 20 vrijednosti početnog otklona ϕ_M u rasponu $[\pi/40, \pi/2]$. Nacrtajte krivulju i usporedite s vrijednošću $2\pi\sqrt{l/g}$. \square

Želimo li izračunati eliptički integral sa zadanom točnošću ε , trebamo ocijeniti drugu derivaciju podintegralne funkcije. Na primjer,

$$\left| \frac{d^2}{d\psi^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \right) \right| \leq \frac{2}{(1 - k^2)^{5/2}},$$

što vodi na

$$\frac{\pi^3}{48N^2} \frac{1}{(1 - k^2)^{5/2}} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad N^2 > \frac{\pi^3}{48\varepsilon} \frac{1}{(1 - k^2)^{5/2}}.$$

Pri tome naravno treba uzeti najveći k iz promatranog intervala početnih otklona.

Zadatak. Izračunajte vrijednost perioda s kutom otklona uzimajući točnost $\varepsilon = 10^{-8}$. \square

Rješenje razvojem u red potencija Druga mogućnost za računanje eliptičkog integrala je razvojem podintegralne funkcije u red potencija po $k = \sin \phi_M/2$.

Koristimo binomni red

$$(1+x)^p = 1 + px + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \dots \quad (|x| < 1).$$

Dobivamo

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{l} (-1)^l k^{2l} \sin^{2l} \psi d\psi.$$

Zbog uniformne konvergencije binomnog reda na intervalu $(-1, 1)$ možemo ga integrirati član po član. Koristeći formule

$$(-1)^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2l} = \frac{(2l-1)!!}{2l!!},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l} \psi d\psi = \frac{\pi (2l-1)!!}{2 \cdot 2l!!},$$

dobivamo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{(2l-1)!!}{2l!!}\right]^2 k^{2l}\right). \quad (1.21)$$

Zadatak. Izračunajte period njihala pomoću formule (1.21). Koliko članova treba uzeti da bi se postigla točnost ε ? \square

1.5.2 Linearne integralne jednadžbe

Definicije Integralne jednadžbe su jednadžbe u kojima se nepoznata funkcija nalazi pod znakom integrala. Na primjer,

$$y(x) = \int_a^b K(x, t)y(t) dt + f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.22)$$

gdje je $y(x)$ nepoznata funkcija, ili

$$y(x) = \int_a^x K(x, t)y(t) dt + f(x). \quad (1.23)$$

Ove su jednadžbe evidentno linearne. Integralne jednadžbe mogu biti i nelinearne, kao u slučaju

$$y(x) = \int_a^x K(x, y(t)) dt + f(x).$$

Imamo sljedeću terminologiju: ako se nepoznata funkcija nalazi samo pod znakom integrala, onda je to jednačba **prvog reda**. Takve su jednačbe

$$\int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.24)$$

ili

$$\int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x). \quad (1.25)$$

Jednačbe oblika (1.22) i (1.23) u kojima se nepoznata funkcija nalazi i izvan integrala nazivamo jednačbama **drugog reda**.

Ako su granice integracije fiksirane, onda je jednačba **Fredholmova**, slučaj (1.22) i (1.24). Ako granice ovise o nezavisnoj varijable, onda je jednačba **Volterina** (slučaj (1.23) i (1.25)).

Funkcija $K(x, t)$ je u svim ovim jednačbama zadana i naziva se **jezgra** jednačbe.

Formalno je Volterina jednačba poseban slučaj Fredholmove jednačbe, dovoljno je staviti $K(x, t) = 0$ za $t > x$. Ipak se promatra kao poseban tip jednačbi jer odgovara fizikalno drugačijim zadacima.

Degenerirane jezgre Za jezgru $K(x, t)$ kažemo da je degenerirana ako je oblika

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^m a_i(x)b_i(t).$$

Pri tome, bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti da su funkcije a_1, \dots, a_m i isto tako b_1, \dots, b_m linearno nezavisne.

Ovaj slučaj nazivamo degeneriranim jer se integralna jednačba svodi na običnu matricnu jednačbu. Aista, pogledajmo Fredholmovu jednačbu drugog reda s degeneriranim jezgrom. Imamo

$$y(x) = \int_a^b K(x, t)y(t) dt + f(x) = \sum_{i=1}^m a_i(x) \int_a^b b_i(t)y(t) dt + f(x).$$

Uvedmo li oznaku

$$\xi_i = \int_a^b b_i(t)y(t) dt$$

vidimo da rješenje ima specijalnu strukturu

$$y(x) = \sum_{i=1}^m a_i(x)\xi_i + f(x).$$

Dakle, da bismo došli do rješenja potrebno je odrediti samo konačno mnogo koeficijenata. Množenjem ove jednadžbe s $b_j(x)$ i integriranjem, dobivamo

$$\xi_j = \sum_{i=1}^m m_{i,j} \xi_i + f_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

gdje je

$$m_{i,j} = \int_a^b a_i(x) b_j(x) dx, \quad f_j = \int_a^b f(x) b_j(x) dx.$$

Time smo došli do matrice jednadžbe

$$\begin{bmatrix} 1 - m_{1,1} & -m_{1,2} & -m_{1,3} & \cdots & -m_{1,m} \\ -m_{2,1} & 1 - m_{2,2} & -m_{2,3} & \cdots & -m_{2,m} \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & 1 - m_{3,3} & \cdots & -m_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{m,1} & -m_{m,2} & -m_{m,3} & \cdots & 1 - m_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}.$$

1.6 Zadaci

Z1.1. Izvedite Simpsonovu formulu.

Z1.2. Računajte integral

$$\int_{-5}^5 \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 5$$

Newton-Cotesovim formulama za $n = 3, 4$ i 8 . Pokažite da se za $n = 8$ dobivaju lošiji rezultati nego za $n = 3, 4$. Nacrtajte pripadne interpolacijske polinome.

Z1.3. Računajte integral

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln 3$$

kompozitnom trapeznom i Simpsonovom formulom sa 10, 20, 40, 80, 160, 320 i 640 točaka. Usporedite rezultate. Verificirajte red konvergencije.

Z1.4. Pokažite da u Primjeru 1.1 ako bismo uzeli kompozitni trapeznu formulu, dobili bismo $N \geq 2367$.

Z1.5. Konstruirajte adaptivni algoritam za integraciju na osnovi trapezne formule.

M. JURAK 6. listopada 2009.

Z1.6. Modificirajte Algoritam 1.3 tako da uzima dodatni parametar K te da pravi ekvidistantnu subdiviziju intervala integracije na K podintervala. Integral će biti rastavljen na sumu integrala

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^K \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx,$$

i svaki pojedini integral će biti računat adaptivnim algoritmom. Iskoristite novi algoritam da biste ispravno izračunali funkciju iz Primjera 1.2.

Z1.7. Dokažite formulu (1.8).