

Poglavlje 1

Tok fluida kroz poroznu sredinu

1.1 Uvod

Gibanje fluida kroz šupljine u tlu ili nekom drugom poroznom materijalu od velikog je značaja za različite tehničke discipline, od kojih su neke hidrogeologija, naftno inženjerstvo, agronomija, kemijsko inženjerstvo itd. Matematički modeli koji opisuju takvo gibanje imaju zadaću predvidjeti transport mase i energije unutar sustava pod zadanim vanjskim uvjetima. Formiramo ih pomoću zakona sačuvanja mase, impulsa, momenta impulsa i energije, te primjenom termodinamičkih relacija. Pri tome je često potrebno uzeti u obzir prisutnost tekuće i plinovite faza, izmjenu materije među fazama pod utjecajem promjene termodinamičkih parametara, kemijske reakcije između čvrste stijenske porozne sredine i fluida, itd.

Matematičko modeliranje nas vodi na Navier-Stokesov sustav diferencijalnih jednadžbi koji treba zapisati u domeni sastavljenoj od šupljina koje su fluidu na raspolaganju za gibanje (*pornom prostoru*) i koji zatim dopunjujemo rubnim i početnim uvjetima. Time dobivamo model koji je zadan na *prostornoj skali* određenoj karakterističnom dimenzijom pora kroz koje se fluid giba. Dva su razloga zbog kojih je praktična upotrebljivost takvog modela vrlo mala:

1. Geometrija pornog prostora nam nije strogo poznata te stoga ne možemo postaviti inicijalno–rubnu zadaću;
2. Dimenzije pora su reda veličine mikrometra, dok su prostorne dimenzije domene u kojoj promatramo strujanje veličine od nekoliko metara do nekoliko kilometara.

Zbog velike razlike u karakterističnim dimenzijama pornog prostora i domene u kojoj promatramo strujanje, govorimo o prisutnosti dviju različitih prostornih skala, mikroskopskoj i makroskopskoj. Matematički model postavljen u pornom prostoru nazivamo *mikroskopskim modelom* ili modelom na *mikroskopskoj skali*, dok se prostorna skala određena karakterističnom dimenzijom domene strujanja naziva *makroskopskom*, i za praktična računanja evidentno moramo imati *makroskopski model*, odnosno model formiran na makroskopskoj skali.

U makroskopskom modelu porozna sredina je *kontinuum* u kome više nema separirane čvrste faze (stijene, tla) i fluida koji ispunjava porni prostor. Svaka točka u tom modelu predstavlja volumen koji je dovoljno velik da sadrži i čvrstu fazu i fluid u pornom prostoru. Svojstva makroskopskog kontinuuma opisuju se pomoću nekoliko parametara od kojih su najvažniji *poroznost* i *propusnost*. Poroznost predstavlja udio pornog prostora u jediničnom volumenu porozne sredine, a propusnost je mjera kojom se sredina opire strujanju fluida. Veličine koje se pojavljuju u makroskopskom modelu, kao što su tlak i brzina strujanja, predstavljaju srednje vrijednosti uzete na dovoljno velikim (u odnosu na dimenzije pora) volumenima.

Zakoni sačuvanja mase i energije jednako vrijede na svim prostornim skalama, no konstitutivni zakoni mijenjaju svoj oblik pri promjeni skale. Određivanje konstitutivnih zakona na makroskopskoj skali, poznajući odgovarajuće zakone na mikroskopskoj skali, je posve netrivialan *problem skaliranja* modela (eng. *upscaling*). On se može teorijski riješiti ukoliko se postave dovoljno jake pretpostavke o strukturi porozne sredine, no u praksi se te makroskopske zakonitosti određuju eksperimentalno. Mi ćemo se nadalje baviti isključivo makroskopskim modelima i pri tome ćemo polaziti od eksperimentalno dobivenih i široko prihvaćenih konstitutivnih zakona.

1.2 Makroskopska svojstva porozne sredine

Svaki materijal koji odlikuje poroznost – prisutnost šupljina ili pukotina unutar materijala – nazivat ćemo *porozna sredina*. Idealan primjer porozne sredine je pijesak koji se sastoji od gusto pakiranih zrnaca. Zbog čvrstoće zrnaca između njih uvijek postoji određen prazan prostor koji će biti ispunjen fluidom, najčešće zrakom ili vodom. Dio prostora koji zauzima fluid nazivamo *pornim prostorom* i u slučaju pijeska on će biti povezan i dozvoljavat će strujanje fluida. Situacije u kojima porni prostor nije povezan i stoga ne dozvoljava gibanje fluida nisu nam od interesa pa ćemo stoga pod poroznom sredinom podrazumijevati samo one materijale koji imaju povezani porni prostor. Uočimo da je stoga porozna sredina medij koji se sastoji od čvrste faze i barem jedne tekuće ili plinovite faze, a često sve tri zajedno. Čvrsta se faza može u mnogim situacijama promatrati kao kruta, dok se u nekim slučajevima uzima u obzir njena deformacija.

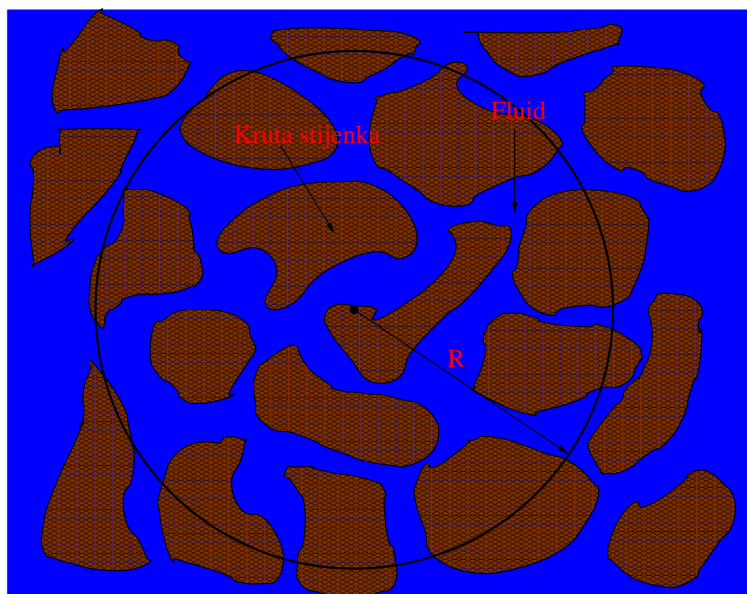
Kada porni prostor ispunjava samo jedan fluid za karakterizaciju makroskopskih svojstava porozne sredine dovoljne su nam dvije veličine: poroznost i propusnost.

1.2.1 Poroznost

Poroznost se definira kao volumen pora podijeljen s ukupnim volumenom porozne sredine.

$$\Phi = \frac{V_p}{V_t} = \frac{V_p}{V_p + V_s}, \quad (1.1)$$

gdje je V_p volumen pora, V_s volumen čvrstog dijela porozne sredine, a $V_t = V_p + V_s$ ukupni volumen. U formuli (1.1) su uračunate sve pore, čak i one koje nisu povezane i ne sudjeluju



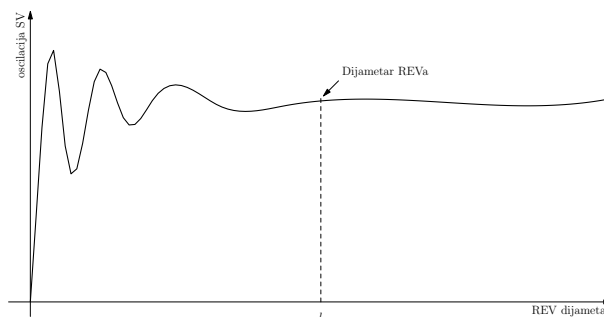
Slika 1.1: Shematski prikaz porozne sredine i volumena usrednjavanja.

u strujanju fluida. Za nas je korisnija *efektivna poroznost* koja se definira kao omjer korisnog volumena pora i ukupnog volumena porozne sredine. Pri tome se u koristan volumen pora ubraja samo volumen međusobno povezanih pora kroz koje fluid može strujati. Pored toga može postojati određen porni volumen ispunjen fluidom, posve izoliran od ostalog poroznog volumena, koji ne ubrajamo u koristan volumen pora. Mi ćemo nadalje termin poroznost koristiti za efektivnu poroznost.

U formuli (1.1) postavlja se pitanje koliki volumen V_t treba uzeti pri računu poroznosti. Na njega nije moguće odgovoriti a da se ne postave određene pretpostavke o strukturi porozne sredine, odnosno pornog prostora. S praktične strane se pretpostavlja da postoji određen reprezentativni volumen (eng. *representative elementary volume*, REV) koji treba koristiti u formuli (1.1). Uzimanjem bitno manjih volumena dobit ćemo velike fluktuacije poroznosti u bliskim točkama, dok uzimanjem većih volumena ne dolazi ni do kakve promjene u izračunatoj poroznosti, sve dok volumeni ne postanu toliko veliki da zahvate makroskopske varijacije poroznosti (npr. zbog prisutnosti različitih materijala). Egzistencija jednog takvog reprezentativnog elementarnog volumena je temeljna pretpostavka za modeliranje porozne sredine kao kontinuuma. Svaka točka u makroskopskom kontinuumu predstavlja jedan elementaran reprezentativan volumen i sve varijable u makroskopskom modelu imaju značenje srednje vrijednosti po elementaranom reprezentativnom volumenu.

Poroznost se označava sa Φ (ili n) i prima vrijednosti između 0 i 1. Ona općenito varira s položajem, odnosno ovisi o prostornoj varijabli \mathbf{x} . Obično se određuje eksperimentalno, pokusima na uzorcima poroznog materijala.

Napomena 1. Uvedimo funkciju $Z(\mathbf{x})$ koja prima vrijednosti 1 ako se točka \mathbf{x} nalazi u pornom prostoru, a vrijednost 0 ako se nalazi u krutoj stijenci. Ako skup $\Omega(\mathbf{x})$ predstavlja



Slika 1.2: Određivanje dijametra reprezentativnog elementarnog volumena (REV).

REV u točki \mathbf{x} , onda je

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega(\mathbf{x})|} \int_{\Omega(\mathbf{x})} Z(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

gdje je $|\Omega(\mathbf{x})|$ volumen od $\Omega(\mathbf{x})$.

Koncept reprezentativnog elementarnog volumena ima kao temeljni nedostatak odsustvo jasnog kriterija za veličinu REVa te je upitna i sama egzistencija takvog volumena u zadanoj prirodnoj sredini. Nadalje, usrednjavanjem se uvijek dobiva neprekidna veličina što ne odgovara modeliranju prirodnih sredina s diskontinuitetima u svojstvima sredine, kakve se često susreću.

Iz tih je razloga razvijen drugi pristup makroskopskom modeliranju porozne sredine koji se ukratko sastoji u sljedećem. Funkciju $Z(\mathbf{x})$ iz Napomene 1 smatramo, u svakoj točki \mathbf{x} , slučajnom varijablom. To znači da se radi o funkciji dvije varijable $Z(\mathbf{x}, \omega)$, pri čemu ω prolazi vjerojatnostnim prostorom. Za svako ω , $Z(\mathbf{x}) = Z(\mathbf{x}, \omega)$ (ω se najčešće ne piše) je jedna realizacija slučajne varijable $Z(\mathbf{x})$, odnosno slučajnog polja $\mathbf{x} \rightarrow Z(\mathbf{x})$. Očekivanje slučajne varijable $Z(\mathbf{x})$ je poroznost sredine u točki \mathbf{x} : $\phi(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(Z(\mathbf{x}))$. Ideja tog pristupa je sljedeća: prirodna porozna sredina je proizvod velikog niza prirodnih procesa koji su se dešavali u određenom geološkom razdoblju i koji nam nisu dostupni. Varijacije u redosljedu i intenzitetu tih procesa dovode do varijacija u strukturi porozne sredine, i kako nam informacije o procesima koji su doveli do sadašnjeg stanja nisu poznate, prirodno je opisivati sadašnje stanje (ishod tih procesa) kao jednu realizaciju iz niza mogućnosti. Problem u tom, stohastičkom, pristupu je što imamo samo jednu realizaciju slučajne varijable (polja), dok za računanje matematičkog očekivanja trebamo integrirati po cijelom vjerojatnosnom prostoru i poznavati vjerojatnostnu mjeru. Izlaz iz te situacije se nalazi u principu *ergodičnosti* koji omogućava da se integriranje po vjerojatnosnom prostoru zamijeni integracijom po prostoru. Vjerojatnostna se mjera također, uz određene pretpostavke, deducira iz prostornih razdioba svojstava porozne sredine. Više detalja o ovom pristupu može se naći npr. u knjigama [3], [2] i [4].

U većini slučajeva porozna je sredina približno kruta. Varijacije tlaka fluida u njoj nemaju veliki utjecaj na geometriju pornog prostora i poroznost te se zavisnost poroznosti o tlaku može zanemariti. Ipak, u nekim situacijama deformacije su dovoljno velike da ih

moramo uzeti u obzir. Pri tome je važno znati o kakvoj vrsti deformacije se radi: elastičnoj ili plastičnoj. Kod elastične deformacije porozna matrica se komprimira pri povećanju tlaka u fluidu i porni prostor se povećava; kod smanjenja tlaka dešava se upravo obrnuti proces. Elastična deformacija se može očekivati kod konsolidiranih materijala koji su podvrgnuti velikim tlakovima, no ne toliko velikim da bi odziv stijene bio plastičan. Tipični primjeri su duboka naftna ležišta.

Do plastične deformacije dolazi kada su naprezanja porozne matrice toliko velika da nakon smanjenja tlak u fluidu ona više ne dolazi u polazno stanje. To je moguće kod vrlo velikih varijacija tlaka u konsolidiranim stijenama no nije od velikog praktičnog značenja. Puno se češće susreće plastična deformacija u nekonsolidiranim materijalima (pijescima) kod kojih zbog promjene tlaka dolazi do preslagivanja zrnaca koje dovodi do promjene poroznosti. Na primjer, zrnca u obliku kugala mogu se slagati kubično ili romboedarski što vodi do promjene u poroznosti za oko 17 % (vidi npr. [7]).

Modeliranje plastične deformacije porozne sredine složeno je i njime se ovdje nećemo baviti (vidi [5]). Elastična deformacija se, s druge strane, jednostavno modelira zadavanjem zavisnosti poroznosti o tlaku $\Phi = \Phi(p)$. Razmatranja koja dovode do takve zavisnosti mogu se naći npr. u [6], [7], [1], [5].

Kompresibilnost porozne sredine (čvrste faze) definira se pri referentnom tlaku $p = p_{ref}$ kao veličina:

$$\beta_R = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad \text{pri } p = p_{ref}. \quad (1.2)$$

Ta je veličina prilično mala (npr. oko 10^{-5} bar^{-1}) pa se često koristi linearna aproksimacija za poroznost:

$$\Phi(\mathbf{x}, p) = \Phi_0(\mathbf{x})(1 + \beta_R(p - p_{ref})). \quad (1.3)$$

Ako su varijacije od β_R značajne, onda se poroznost deducira iz β_R jednostavnom integracijom. Za $\beta_R = 0$ dobiva se kruta porozna sredina.

Napomena 2. Poroznost o kojoj smo do sada govorili naziva se primarna ili granularna poroznost i karakterizirana je malim dimenzijama pora. U stijenama se može javiti i sekundarna poroznost kao posljedica tektonske aktivnosti ili djelovanja vode, koja se manifestira kao niz fraktura (pukotina) u stijeni. Osnovna razlika prema primarnoj poroznosti je u tome što pukotine sekundarne poroznosti imaju barem jednu linearnu dimenziju veliku u odnosu na ostale, onu u smjeru prostiranja pukotine. Premda su ostale dimenzije pukotina male kao i kod granularne poroznosti, prisutnost jedne velike dimenzije onemogućava nam da ukupnu poroznost i njen utjecaj na tok fluida predstavimo usrednjavanjem kao što smo to učinili s primarnom poroznošću. Primjena REVa bitno implicira da su sve dimenzije pora male u odnosu na dimenziju REVa. Drugim riječima, ukoliko postoji povezan sustav sekundarnih pukotina, tok fluida kroz njih mora se modelirati drugačije od toka kroz primarne pore.

1.2.2 Propusnost. Darcyjev zakon

Osnovni konstitutivan zakon na makroskopskoj skali daje vezu između gradijenta tlaka i brzine fluida. Eksperimentalno ga je utvrdio francuski inženjer Henry Darcy, 1856. godine, te je zakon po njemu dobio ime. Da bismo ga izrazili trebamo precizirati definiciju brzine fluida u poroznoj sredini.

Prividna makroskopska brzina fluida (ili *Darcyjeva brzina*) \mathbf{q} definira se odnosom:

- $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$ = volumen fluida koji u jedinici vremena protekne kroz površinu dS , okomitu na jedinični vektor \mathbf{n} [L^3/T].

Po toj definiciji \mathbf{q} ima dimenziju [L/T] i najčešće se mjeri u jedinici m/dan (metar po danu). Stvarna makroskopska brzina fluida, s druge strane, jednaka je \mathbf{q}/Φ budući da jedinični volumen porozne sredine sadrži količinu Φ fluida.

Veza između Darcyjeve brzine i tlaka fluida dana je tzv. **Darcyjevim zakonom**.

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{\mu} \mathbb{K} (\nabla p - \rho \mathbf{g}), \quad (1.4)$$

gdje je:

- μ je dinamička viskoznost fluida. Može ovisiti o tlaku i temperaturi fluida;
- \mathbb{K} je propusnost porozne sredine (dimenzija [L^2]). Općenito je propusnost simetričan pozitivno-definitan tenzor. Ukoliko je sredina nehomogena \mathbb{K} je funkcija prostornog položaja. U slučaju da je \mathbb{K} skalarna matrica ($\mathbb{K} = k\mathbb{I}$) kažemo da je sredina izotropna;
- p je tlak fluida;
- ρ je gustoća fluida. Može ovisiti o tlaku i temperaturi;
- \mathbf{g} je vektor ubrzanja sile teže.

Darcyjev zakon jednostavno postulira linearnu zavisnost brzine fluida i gradijenta tlaka. U tome je on posve analogan Ohmovom zakonu u elektrotehnici (jakost struje=Darcyjeva brzina, električni napon=tlak). Razlika je u tome što se mora uzeti u obzir gravitacijska sila, koja ovdje nije zanemariva, i viskoznost fluida.

Jedinica za propusnost u MKS sustavu je metar kvadratni (m^2) umjesto koje se koristi praktičnija jedinica D (**darsi**) definirana na sljedeći način:

$$1 \text{ D} = \frac{1 \text{ cP} \cdot (1 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} / 1 \text{ cm}^2)}{1 \text{ atm cm}^{-1}},$$

gdje je cP (centipoise) jedinica za viskoznost jednaka 10^{-3} Pa s. Time se dobiva

$$1 \text{ D} = 9.86923 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2.$$

Ta je jedinica još uvijek suviše velika pa se obično koristi jedinica mD (mili Darcy = 10^{-3} D) jer tipične vrijednosti propusnosti stijena u naftnim i vodonosnim rezervoarima iznose 5 do 500 mD.

Napomena 3. Označimo stvarnu, mikroskopsku, brzinu fluida s \mathbf{v} . Neka je $\Omega(\mathbf{x})$ reprezentativni elementarni volumen u točki \mathbf{x} , $\Omega(\mathbf{x}) = \Omega_s(\mathbf{x}) \cup \Omega_f(\mathbf{x})$, gdje su $\Omega_s(\mathbf{x})$ i $\Omega_p(\mathbf{x})$ podskupovi REVa koji pripadaju čvrstoj fazi i pornom prostoru ispunjenom fluidom. Tada je Darcyjeva brzina u točki \mathbf{x} jednaka

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega(\mathbf{x})|} \int_{\Omega_p(\mathbf{x})} \mathbf{v}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Ona stoga ne predstavlja pravu srednju vrijednost brzine u REVu, koja bi bila definirana kao

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega_p(\mathbf{x})|} \int_{\Omega_p(\mathbf{x})} \mathbf{v}(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

već imamo

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{|\Omega_p(\mathbf{x})|}{|\Omega(\mathbf{x})|} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \Phi \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}).$$

1.2.3 Darcyjev eksperiment

Darcyjev zakon ili zakon filtracije pronašao je eksperimentalno francuski inženjer Henry Darcy, 1856. godine. On je postavio eksperiment u kome je kroz spremnik duljin L i površine presjeka A , ispunjen pijeskom, proticala voda (Slika 1.3). Mjerena je brzina volumnog toka vode Q te piezometarska razina na ulazu i izlazu, h_1 (ulaz) i h_2 (izlaz). Dobiven je sljedeći odnos:

$$Q \sim A(h_1 - h_2)/L,$$

odnosno, postoji konstanta \bar{k} takva da je

$$Q = \bar{k}A(h_1 - h_2)/L.$$

Izraz Q/A je volumni protok po jedinici površine, odnosno Darcyjeva brzina. Generalizacijom dobivamo

$$\mathbf{q} = -\bar{k}\nabla h, \quad (1.5)$$

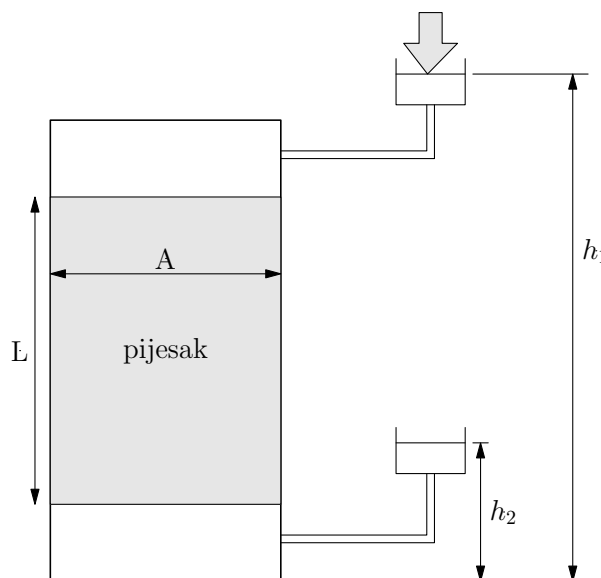
Kako je piezometrijska razina jednaka $h = p/(\rho g) + z$ imamo da je

$$\mathbf{q} = -\frac{\bar{k}}{\rho g}(\nabla p - \rho \mathbf{g}).$$

Usporedbom s (1.4) vidimo da je

$$\bar{k} = k \frac{\rho g}{\mu}. \quad (1.6)$$

Koeficijent k se naziva **propusnost** (eng. permeability) dok se \bar{k} **hidraulička vodljivost** (eng. hydraulic conductivity), dok se ∇h ponekad zove hidraulički gradijent. Hidraulička vodljivost ima dimenziju brzine i mjeri se često u jedinicama m/dan (metar po danu). Kao i propusnost, hidraulička vodljivost je u najopćenitijem slučaju simetričan, pozitivno definitan tenzor.



Slika 1.3: Skica Darcyjevog eksperimenta.

1.2.4 Korelacije propusnost-poroznost

Poroznost i propusnost su dva makroskopska parametra koji opisuju svojstva porozne sredine u odnosu na fluid koji se u njoj nalazi. Iako su u osnovi oni posve neovisni jedan o drugome moguće je u nekim situacijama naći određenu korelaciju među njima. To je redovito tako kada se prihvati određeni konceptijski model porozne sredine.

Ilustrirat ćemo to na primjeru konceptualnog modela porozne sredine pomoći niza kapilarnih cjevčica. U tom se modelu porozna sredina promatra kao blok čvrstog materijala kroz koji prolazi jedan broj paralelno postavljenih cjevčica malog dijametra. Uzmimo da je dijametar svake cjevčice jednak d i da po jedinici površine imamo N cjevčica.

U svakoj cjevčici možemo riješiti problem gibanja fluida te dolazimo do Hagen-Poiseuilleovog toka koji za srednju brzinu kroz cjevčicu V daje

$$V = -\frac{d^2 \rho g}{32\mu} \frac{\partial h}{\partial s},$$

gdje je h piezometarska razina. Poroznost materijala je jednaka

$$\Phi = N \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = \frac{Nd^2\pi}{4}.$$

Protok fluida po jedinici površine porozne sredine (Darcyjeva brzina) je jednak

$$Q = N \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \cdot V = -N\pi \frac{d^4 \rho g}{128\mu} \frac{\partial h}{\partial s} = -\Phi \frac{d^2 \rho g}{32\mu} \frac{\partial h}{\partial s}$$

Iz Darcyjevog zakona

$$Q = -\frac{k\rho g}{\mu} \frac{\partial h}{\partial s} = -\Phi \frac{d^2 \rho g}{32\mu} \frac{\partial h}{\partial s}$$

izlazi

$$k = \frac{d^2}{32} \Phi. \quad (1.7)$$

Budući da u našem modelu imamo jedan istaknuti smjer, formulu (1.7) možemo generalizirati tako da dobivenu propusnost raspodijelimo u sva tri smjera, tj da formulu podijelimo s 3: $k = \phi d^2/96$. Uočimo da je u toj formuli faktor $1/96$ nevažan; on se odnosi samo na vrlo specifičnu poroznu sredinu koja u prirodi nigdje ne postoji. Ono što formula daje je linearan odnos propusnosti i poroznosti u kojem faktor proporcionalnosti ovisi o kvadratu dijametara pora. Dobiveni odno sje moguće dalje generalizirati tako na pretpostavimo da po jediničnoj površini imamo N_i cjevčica dijametara d_i , što nas vodi na

$$Q = -\sum_i N_i \pi \frac{d_i^4 \rho g}{128\mu} \frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{k\rho g}{\mu} \frac{\partial h}{\partial s},$$

što daje

$$k = \frac{\pi}{128} \sum_i N_i d_i^4.$$

Puno korisnija generalizacija se dobiva uvođenjem **hidrauličkog radijus** koji predstavlja omjer volumena fluida i površine čvrste faze koju taj fluid vlaži. Na primjer, za kružnu cijev radijusa R taj je omjer jednak:

$$\frac{R^2 \pi L}{2R\pi L} = \frac{R}{2},$$

gdje je L duljina cijevi. U poroznoj sredini se hidraulički radijus generalizira na sljedeći način: prvo se uvede **specifična površina** porozne sredine M kao

$$M = \frac{A_s}{V_t}, \quad (1.8)$$

gdje je V_t volumen REVa, a A_s površina krute faze unutar REVa. Hidraulički radijus R se tada definira kao

$$R = \frac{\text{volumen fluid}}{\text{površina fluida}} = \frac{\Phi}{M}. \quad (1.9)$$

Sada se odnos (1.7) koji je dobiven za model kapilarnih cjevčica može zapisati u obliku

$$k = \frac{d^2}{32} \Phi = \left(\frac{d}{4}\right)^2 \frac{1}{2} \Phi = \frac{R^2}{2} \Phi = \frac{1}{2} \frac{\Phi^3}{M^2},$$

gdje je $R = d/4$ hidraulički radijus za cijev i gdje smo iskoristili formulu (1.9). Ta je formula sad pogodnija za generalizaciju na složenije geometrijske konfiguracije.

Dobivena formula se generalizira uvođenjem nepoznate konstante c_0 , koju je potrebno odrediti za svaki medij posebno:

$$k = c_0 \frac{\Phi^3}{M^2},$$

pri čemu za kružnu cijev imamo $c_0 = 1/2$. Konstanta c_0 je tzv. Kozenyjeva konstanta. Daljnje poopćenje dobivamo uvođenjem novog geometrijskog parametra (pored specifične površine M), tzv. vijugavosti (eng. *tortuosity*) $\tau \leq 1$ koja mjeri odstupanje strujnice od ravne linije. Definiramo

$$\tau = \left(\frac{L}{L_e} \right)^2 < 1,$$

gdje je L pravocrtna udaljenost koju je čestica fluida prešla, a L_e stvarno prijeđena udaljenost. Sada se odnos propusnost-poroznost uzima u obliku

$$k = c_0 \tau \frac{\Phi^3}{M^2}.$$

Konačno, s praktičnog stanovišta umjesto specifične površine lakše je dostupna veličina $M_s = A_s/V_s$, odnosno $M_s = M/(1 - \Phi)$, a s time dolazimo do korelacije

$$k = c_0 \tau \frac{\Phi^3}{(1 - \Phi)^2} \frac{1}{M_s^2} \quad (1.10)$$

koja se naziva Carman-Kozenyjeva jednadžba. U vezi između k i Φ sudjeluju tri geometrijska parametra koji ovise o obliku porozne sredine: c_0 , M_s i τ . Eksperimentalnim određivanjem tih parametara za danu prirodnu poroznu sredinu dobiva se veza između propusnosti i poroznosti.

Gornji izvod ilustrira dio inženjerskog modeliranja svojstava porozne sredine. Dobivene formule nemaju općenitu primijenjivost no izuzetno su važne u slučajevima kada su primjenjive.

1.2.5 Nelinearni zakon filtracije

Linearnost Darcyjevog zakona je posljedica malih brzina strujanja fluida u pornom prostoru zbog čega se mogu zanemariti efekti inercije. Ta je pretpostavka narušena u nekim situacijama, kao što je strujanje plina u blizini bušotine, i tada je potrebno dodati Darcyjevom zakonu neku nelinearnu korekciju. Često se u tu svrhu koristi tzv. Forchheimerov zakon

$$-\frac{1}{\mu} k \nabla p = \mathbf{q} + \beta k^{1/2} \frac{\rho}{\mu} |\mathbf{q}| \mathbf{q}. \quad (1.11)$$

Zakon ima posve eksperimentalan karakter, no dobro opisuje brza gibanja fluida.

1.3 Svojstva fluida

Svojstva fluida koja ulaze u transportne modele tipično su gustoća mase, viskoznost, toplinska vodljivost, difuzivnost itd. Njih je potrebno izraziti kao funkcije onih veličina koje su nepoznanice modela. Naši do sada uvedeni modeli koriste samo gustoću mase i viskoznost.

Gustoća mase fluida određena je *jednadžbom stanja* fluida koja daje gustoću kao funkciju tlaka, temperature i kompozicije fluida (ako se fluid sastoji od više kemijskih komponenti). U slučaju jednokomponentnog fluida dobivamo zavisnost oblika $\rho = \rho(p, \theta)$, koja se u izotermalnim uvjetima pojednostavljuje na $\rho = \rho(p)$ (temperatura θ je sada samo parametar modela). Kada je fluid plin možemo koristiti jednadžbu stanja idealnog plina koja daje

$$\rho = \frac{pM}{R\theta}, \quad (1.12)$$

gdje je $R \approx 8.31 \text{ J/K mol}$, univerzalna plinska konstanta, a M molarna masa plina. Ako idealni plin nije dovoljno dobra aproksimacija može se koristiti npr. van der Waalsova jednadžba stanja plina ili različite eksperimentalne jednadžbe koje često imaju oblik

$$\rho = \frac{pM}{ZR\theta}, \quad (1.13)$$

gdje je $Z = Z(p, \theta)$ tzv. **Z-faktor**, eksperimentalna korekcija jednadžbe (1.12).

Kod tekućina je kompresibilnost znatno manja pa se koriste aproksimativne jednadžbe stanja. Pretpostavimo jednostavnu situaciju jednokomponentnog fluida pri konstantnoj temperaturi i uvedimo *koeficijent kompresibilnosti* fluida

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}. \quad (1.14)$$

Uobičajena je pretpostavka da je β konstanta, tako da dobivamo

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p-p_0)}, \quad (1.15)$$

gdje je p_0 neki referentni tlak i $\rho_0 = \rho(p_0)$. Kako je β obično vrlo malen dovoljno je dobra i aproksimacija

$$\rho = \rho_0 + \beta(p - p_0). \quad (1.16)$$

U tom slučaju govorimo o *slabo kompresibilnom fluidu*.

Viskoznost fluida je također funkcija tlaka, temperature i kompozicije fluida. Generalno važećih zakona ovdje nema već se koriste različite empirijske formule. Općenito viskoznost značajno varira s temperaturom, a manje s tlakom. Ovisnost o kompoziciji fluida može biti vrlo značajna. Jedinica za viskoznost u MKS sustavu je Pa·s (paskal-sekunda), dok je u cgs sustavu to 1 *poise* (imenovana prema francuskom fizičaru Jean Louis Marie Poiseuille-u), jednak $1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$. U praktične svrhe se često koristi *centipoise* (cP ili cps) koji je jednak 10^{-2} poise ili $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s} = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$. Viskoznost vode pri 20° C iznosi 1 cP.

1.4 Zakon sačuvanja mase

Mikroskopski zakon sačuvanja mase za jedan fluid u diferencijalnom obliku glasi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

gdje je ρ gustoća a \mathbf{v} brzina fluida. Ukupna masa fluida koji se nalazi u kontrolnom volumenu \mathcal{R} jednaka je

$$\int_{\mathcal{R}} \rho(x) dx,$$

dok je izrazom

$$\int_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(\rho(x)\mathbf{v}(x)) dx = \int_{\partial\mathcal{R}} \rho(x)\mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) dS$$

dana količina mase fluida koja u jedinici vremena utekne, odn. istekne u/iz kontrolnog volumena \mathcal{R} . Uočimo da je ta veličina pozitivna ako se radi o istjecanju, budući da, kao što je uobičajeno, \mathbf{n} predstavlja *vanjsku* jediničnu normalu na $\partial\mathcal{R}$.

Ukoliko se fluid nalazi u poroznoj sredini treba primijeniti *makroskopski zakon sačuvanja mase* koji glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\rho) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{q}) = 0, \quad (1.17)$$

gdje je Φ poroznost sredine, a \mathbf{q} Darcyjeva brzina. Do promjene dolazi stoga što je sada

$$\int_{\mathcal{R}} \Phi(x)\rho(x) dx,$$

količina mase fluida u kontrolnom volumenu \mathcal{R} , dok je količina mase fluida koja utekne/istekne kroz granice kontrolnog volumena dana sa

$$\int_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(\rho(x)\mathbf{q}(x)) dx = \int_{\partial\mathcal{R}} \rho(x)\mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{n}(x) dx$$

prema definiciji Darcyjeve brzine (vidi sekciju 1.2.2).

1.5 Model jednofaznog toka

Sada možemo opisati najjednostavniji model strujanja kroz poroznu sredinu. Pretpostavit ćemo da su u poroznom mediju nalazi jedan fluid pod izotermnim uvjetim. Tada su gustoća mase i viskoznost funkcije samo od tlaka (temperatura je poznata i konstantna), pa je za opis gibanja dovoljno primijeniti zakon sačuvanja mase i Darcyjev zakon. Imamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(\mathbf{x}, p)\rho(p)) + \operatorname{div}(\rho(p)\mathbf{q}) = 0, \quad (1.18)$$

gdje je Darcyjeva brzina dana formulom

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{\mu(p)} \mathbb{K}(\mathbf{x}) (\nabla p - \rho(p)\mathbf{g}). \quad (1.19)$$

Eliminacijom Darcyjeve brzine dobivamo kvazilinearnu jednadžbu parabolickog tipa za tlak.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(\mathbf{x}, p)\rho(p)) - \operatorname{div}\left(\frac{\rho(p)}{\mu(p)} \mathbb{K}(\mathbf{x}) (\nabla p - \rho(p)\mathbf{g})\right) = 0. \quad (1.20)$$

Uz pretpostavku konstantne gustoće ρ i krute porozne sredine dobivamo eliptičku jednadžbu

$$\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\mu} \mathbb{K}(\mathbf{x}) (\nabla p - \rho\mathbf{g})\right) = 0, \quad (1.21)$$

gdje smo ujedno pretpostavili da i viskoznost ne ovisi o tlaku, tako da faktor ρ/μ možemo skratiti. U hidrološkoj literaturi se koristi tenzor *hidraulička vodljivost* (dimenzija L/T)

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \frac{\rho g}{\mu} \mathbb{K}(\mathbf{x}) \quad (1.22)$$

i piezometarska razina potencijal h (os z gleda vertikalno prema gore):

$$h = z + \frac{p}{\rho g}, \quad (1.23)$$

(dimenzija L) koji dozvoljava da se Darcyjev zakon zapiše u obliku

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla h, \quad (1.24)$$

a zakon sačuvanja mase

$$\operatorname{div}(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \nabla h) = 0. \quad (1.25)$$

Slična se transformacija može izvršiti i u slučaju *slabo kompresibilnog fluida* i krute porozne sredine. Uzmemo li zavisnost gustoće fluida o tlaku u obliku (1.15), pri čemu ćemo koeficijent kompresibilnosti označiti s β_F , dobivamo jednadžbu

$$\Phi(\mathbf{x})\beta_F\rho(p)\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{\rho(p)}{\mu(p)} \mathbb{K}(\mathbf{x}) (\nabla p - \rho(p)\mathbf{g})\right) = 0, \quad (1.26)$$

Štoviše, ako je $1/\rho(p)$ integrabilna funkcija možemo definirati *Hubbertov potencijal*

$$h = z + \int_{p_0}^p \frac{d\xi}{g\rho(\xi)} \quad (1.27)$$

uz koji imamo

$$\Phi(\mathbf{x})\beta_F g \rho^2(p) \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{g\rho^2(p)}{\mu(p)} \mathbb{K}(\mathbf{x}) \nabla h\right) = 0. \quad (1.28)$$

Integracijom dobivamo da je

$$h = z - \frac{1}{\beta_F g \rho} + \frac{1}{\beta_F g \rho_0} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta_F g \rho_0 (z - h)}.$$

Posve analogno, ako pretpostavimo slabu *viskozibilnost*, iz odnosa

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha(p-p_0)} = \mu_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\alpha/\beta_F}, \quad (1.29)$$

možemo izraziti viskoznost preko potencijala ψ . Time se jednadžba (1.28) može zapisati u potpunosti u terminu Hubbertovog potencijala:

$$\Phi(\mathbf{x}) \beta_F g \rho^2(\mathbf{x}, h) \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{g \rho^2(\mathbf{x}, h)}{\mu(\mathbf{x}, h)} \mathbb{K}(\mathbf{x}) \nabla h \right) = 0. \quad (1.30)$$

Pogledajmo konačno i slučaj kompresibilne porozne sredine kod koje je poroznost zadana u obliku $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, p)$. Kako *kompresibilnost stijene* nije velika ponovo se pretpostavlja da je

$$\beta_R = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad (1.31)$$

konstanta u odnosu na tlak, što daje

$$\Phi(\mathbf{x}, p) = \Phi_0(\mathbf{x}) e^{\beta_R (p-p_0)}. \quad (1.32)$$

Jednadžba gibanja (1.18) dobiva oblik:

$$\Phi(\mathbf{x}, p) \beta_R \rho(p) \frac{\partial p}{\partial t} + \Phi(\mathbf{x}, p) \frac{\partial \rho(p)}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{\rho(p)}{\mu(p)} \mathbb{K}(\mathbf{x}) (\nabla p - \rho(p) \mathbf{g}) \right) = 0,$$

odnosno

$$\Phi(\mathbf{x}, p) (\beta_R + \beta_F) \rho(p) \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{\rho(p)}{\mu(p)} \mathbb{K}(\mathbf{x}) (\nabla p - \rho(p) \mathbf{g}) \right) = 0. \quad (1.33)$$

Vidimo dakle, da u uvjetima slabe kompresibilnosti sredine i fluida treba koristiti ukupni koeficijent kompresibilnosti $\beta = \beta_R + \beta_F$. Jednadžba se (1.33) zapisuje u terminima Hubbertovog potencijala kao što je pokazano.

Rubni uvjeti. Osnovni rubni uvjeti su Dirichletov (za tlak ili *piezometric head*) ili Neumanov u kojem se zadaje maseni protok $\rho \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$.

1.6 Rubne zadaće za jednofazni tok

1.6.1 Nestlačivi tok kroz krutu poroznu sredinu

Ovdje pretpostavljamo da su gustoća i viskoznost fluida, ρ i μ , konstantne, te da poroznost i propusnost ne ovise o tlaku. U tom slučaju model jednofaznog toka se svodi na

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu} \nabla (p + \rho g h), \quad \operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0.$$

gdje ćemo pretpostavljati da je sredina izotropna, odnosno da je tenzor propusnosti skalaran; h je visina točke.

Ako je propusnost k konstantna, onda možemo uvesti potencijal

$$\phi = \frac{k}{\mu}(p + \rho gh)$$

koji zadovoljava Laplaceovu jednadžbu:

$$\Delta\phi = 0,$$

u domeni fluida.

Jednodimenzionalni tok

Jednadžbu gibanja je najlakše riješiti u jednoj dimenziji, no postavlja se pitanje što takvo rješenje reprezentira. Da bismo interpretirali 1-D rješenje zamislimo cilindrični uzorak porozne sredine $\Omega = S \times (0, L)$. Os x neka je položena duž uzorka, dok su y i z druge dvije osi kartezijevog koordinatnog sustava. Integriranjem Darcyjevog zakona po presjeku cilindra dobivamo

$$\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_1 dydz = -\frac{k}{\mu} \int_S \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho gh) dydz = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_S p dydz + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} |S| \right),$$

gdje je $|S|$ površina poprečnog presjeka i gdje smo iskoristili činjenicu da je derivacija visine konstantna (visina je afina funkcija). Uvedimo veličine:

$$q(x) = \frac{1}{|S|} \int_S \mathbf{q}(x, y, z) \cdot \mathbf{e}_1 dydz, \quad P(x) = \frac{1}{|S|} \int_S p(x, y, z) dydz.$$

Tada je

$$q = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{dP}{dx} + \rho g \frac{dh}{dx} \right) = -\frac{k}{\mu} \frac{d}{dx}(P + \rho gh), \quad (1.34)$$

gdje se sada visina h računa na osi x . Time smo dobili jednodimenzionalni Darcyjev zakon.

Pretpostavimo još da je

$$\int_{\partial S} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (1.35)$$

za svako $x \in (0, L)$, odnosno da nema protoka kroz plašt cilindra. Tada integriranjem jednadžbe $\text{div}(\mathbf{q}) = 0$ po presjeku cilindra dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_S q_x dydz + \int_S \frac{\partial q_y}{\partial y} dydz + \int_S \frac{\partial q_z}{\partial z} dydz = 0$$

Ovdje smo prvu derivaciju mogli izvući izvan integrala, dok druga dva integrala propadaju zbog (1.35). Time smo dobili

$$\frac{dq}{dx} = 0. \quad (1.36)$$

Interpretacija jednodimenzionalnih jednadžbi (1.34), (1.36) je sada potpuna. Flux i tlak u njima predstavljaju srednje vrijednostipo presjeku cilindra.

Zadatak 1. Postavite 1D jednadžbe gibanja u horizontalnom kružnom sloju pretpostavljajući radialnu simetriju toka.

Zadatak 2. Riješiti jednodimenzionalni tok u smjeru osi x , pod kutem α prema horizontali. Uzeti da se tok dešava duž segmenta $(0, L)$ i da su zadani rubni uvjeti $p(0) = p_0$ i $p(L) = p_L < p_0$.

Rj.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{k}{\mu} \left(p_0 + (p_L - p_0) \frac{x}{L} + \rho g x \sin \alpha \right), \\ q &= -\frac{k}{\mu} \left(\frac{p_L - p_0}{L} + \rho g \sin \alpha \right), \quad p = p_0 + (p_L - p_0) \frac{x}{L}. \end{aligned}$$

Numerički primjer: Kolika je brzina istjecanja fluida u vertikalnoj koloni pod utjecajem sile teže ako je $k = 50$ mD, $\rho = 10^3$ kg/m³ i $\mu = 1$ cP? Odg. $q = 5 \cdot 10^{-8}$ m/s = $4.32 \cdot 10^{-3}$ m/dan.

Ovaj nam numerički primjer pokazuje da trebamo skalirati diferencijalnu jednadžbu kako ne bismo radili s izuzetno malim veličinama. Skaliranje se radi tako da se prijeđe na bezdimenzionalne varijable:

$$p' = \frac{p}{p_0}, \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L_0}, \quad t' = \frac{t}{T_0}, \quad k' = \frac{k}{k_0}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad g' = \frac{g}{g_0}, \quad (1.37)$$

gdje su crtane veličine bezdimenzionalne, dok konstante proporcionalnosti označene s indeksom 0 imaju odgovarajuću dimenziju te predstavljaju *karakteristične vrijednosti* pojedinih varijabli. Uočimo da je $\mathbf{q}' = \mathbf{q}/(L_0/T_0)$. Sada je

$$(L_0/T_0)\mathbf{q}' = -\frac{k_0 p_0}{\mu_0 L_0} \frac{k'}{\mu'} \nabla_{\mathbf{x}'} (p' + \frac{\rho_0 g_0 L_0}{p_0} \rho' g' z'), \quad \text{div}_{\mathbf{x}'}(\mathbf{q}') = 0.$$

Bezdimenzionalne jednadžbe imaju dakle obil:

$$\mathbf{q}' = -D \frac{k'}{\mu'} \nabla_{\mathbf{x}'} (p' + \gamma \rho' g' z'), \quad \text{div}_{\mathbf{x}'}(\mathbf{q}') = 0.$$

gdje su

$$D = \frac{k_0 p_0 T_0}{\mu_0 L_0^2}, \quad \gamma = \frac{\rho_0 g_0 L_0}{p_0}$$

bezdimezionalni parametri. Odavdje dolazimo do zaključka da utjecaj sile teže možemo zanemariti u slučaju da je $\gamma \ll 1$.

Skaliranje (1.37) možemo iskoristiti kako bismo s MKS sustava (ili bilo kojeg konzistentnog sustava jedinica) prešli na *praktični sustav jedinica*. Na primjer, ako želimo koristiti sljedeće jedinice: metar za duljinu, godinu za vrijeme, bar za tlak, mili darsi za propusnost, centi poise za viskoznost, kg/m^3 za gustoći i m/s^2 za ubrzanje sile teže, onda treba uzeti

$$p_0 = 10^5, L_0 = 1, T_0 = 365 \cdot 86400, k_0 = 9.86923 \cdot 10^{-16}, \mu_0 = 10^{-3}, \rho_0 = 1, g_0 = 1.$$

Sada je

$$D = \frac{k_0 p_0 T_0}{\mu_0 L_0^2} = \frac{9.86923 \cdot 10^{-16} \cdot 10^5 \cdot 31536000}{10^{-3}} = 9.86923 \cdot 0.31536000 = 3.112360373$$

i $\gamma = 10^{-5}$. Konstanta $D \approx 3.112360373$ se naziva *Darcyjeva konstanta*. U slučaju da smo odlučili mjeriti vrijeme u danima dobili bismo $D \approx 0.008527015$. Želimo li eliminirati konstantu γ dovoljno je gustoću mase mjeriti u tonama po metru kubnom, i ubrzanje sile teže hektometrima u kvadratnoj sekundi.

Ravninski tok

Promatramo ravninski tok u horizontalnoj ravnini omeđenoj odozgo i odozdo nepropusnim ravninama. Uzmimo kartezijev koordinatni sustav x, y, z u kome os z gleda vertikalno prema gore. Područje gibanja neka je $\Omega \times (0, a)$, gdje je Ω ravninska domena, a a je visina promatranog sloja.

U bilo kojoj točki $(x, y) \in \Omega$ možemo integrirati po osi z od 0 do a :

$$\begin{aligned} \int_0^a q_x dz &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^a (p + \rho g z) dz = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^a p dz + \rho g a^2 / 2 \right) = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^a p dz, \\ \int_0^a q_y dz &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a (p + \rho g z) dz = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^a p dz + \rho g a^2 / 2 \right) = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a p dz, \\ \int_0^a q_z dz &= -\frac{k}{\mu} \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho g z) dz = -\frac{k}{\mu} (p(a) - p(0) + \rho g a) \end{aligned}$$

Integriranjem jednadžbe $\text{div}(\mathbf{q}) = 0$ dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^a q_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a q_y dz + \int_0^a \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = 0,$$

pri čemu zadnji integral propada zbog nepropusnosti gornje i donje granice sloja:

$$\int_0^a \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = q_z(a) - q_z(0) = 0.$$

Uvedemo li sada

$$P(x, y) = \frac{1}{a} \int_0^a p(x, y, z) dz,$$

$$\mathbf{Q}(x, y) = \frac{1}{a} \int_0^a q_x(x, y, z) dz \mathbf{i} + \frac{1}{a} \int_0^a q_y(x, y, z) dz \mathbf{j},$$

dobivamo dvodimenzionalne jednadžbe,

$$\mathbf{Q} = -\frac{k}{\mu} \nabla P, \quad \operatorname{div}(\mathbf{Q}) = 0. \quad (1.38)$$

Zadatak 3. Postaviti dvodimenzionalne jednadžbe gibanja u verikalnom sloju porozne sredine.

Promatrajmo sada jednadžbe ravninskog toka u horizontalnom sloju, koristeći standardne oznake \mathbf{q} i p . Tada je

$$\mathbf{q} = -\nabla \phi, \quad \phi = \frac{k}{\mu} p, \quad \operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0.$$

Vidimo da je brzina potencijalno polje i ϕ je njen potencijal. Brzinu možemo tražiti u specijalnom obliku:

$$q_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad q_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.39)$$

Tada je jednadžba $\operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0$ zadovoljena za svaki izbor funkcije ψ . Funkciju ψ nazivamo *strujna funkcija* brzine \mathbf{v} . Uočimo da su $\nabla \phi$ i $\nabla \psi$ međusobno okomiti u svakoj točki i stoga su nivo linije od ψ i ϕ međusobno okomite. Dok je nivo linija od ϕ ekvipotencijalna linija, nivo linija od ψ je strujnica.

Napomena 4. Formulu (1.39) možemo formalno zapisati u obliku

$$\mathbf{q} = \operatorname{rot} \psi = \operatorname{def} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \vec{i} \partial_y \psi - \vec{j} \partial_x \psi,$$

gdje determinantu treba razvijati po prvom retku.

Identificirajmo ravninu gibanja s kompleksnom ravninom i funkcije ψ i ϕ s realnim funkcijama kompleksne varijable z . Tada možemo uvesti *kompleksni potencijal*

$$F(z) = -\phi(z) + i\psi(z).$$

Funkcija F je analitička jer su zadovoljeni Cauchy-Riemannovi uvjeti:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\phi) = q_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(-\phi) = q_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Stoga slijedi da su ψ i ϕ harmonijske funkcije. *Kompleksna brzina* se definira formulom

$$w(z) = \frac{dF}{dz}(z) = -\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = q_x - iq_y.$$

Prednost metode kompleksnih funkcija pri rješavanju zadaća dvodimenzionalnog toka je u tome što možemo eksplicitno konstruirati tokove zadavanjem kompleksnog potencijala F . Iz njega se tada mogu izračunati sve tražene veličine. Na primjer, afina funkcija $F(z) = az + b$ daje tok s konstantnom kompleksnom brzinom $w = a$ (a onda i konstantnom brzinom) te se lako dobiva da je $\phi = -(a_x x - a_y y + b_x)$ te $\psi = a_y x + a_x y + b_y$. Nalaženje kompleksnog potencijala koji zadovoljava propisane rubne uvjete nije jednostavna zadaća i danas je puno jednostavnije doći do približnog rješenja nekom numeričkom metodom. Nasuprot tome, metoda kompleksnih funkcija omogućava vrlo jednostavnu analizu nekih izuzetno važnih primjera tokova. Jedan od njih je radijalni tok.

Primjer 1. *Treba odrediti radijalan tok s izvorom (ponorom) u točki $x = y = 0$. Kompleksan potencijal tražimo u obliku $F(z) = A \ln(z) + B$, gdje su A i B kompleksne konstante. Uzimajući kompleksnu točku z u obliku $z = re^{i\theta}$ dobivamo $F(re^{i\theta}) = A(\ln r + i\theta) + B$, odnosno*

$$\phi = -A_1 \ln r + B_1$$

(potencijal brzine), gdje je $A = A_1 + iA_2$ i $B = B_1 + iB_2$. Time dobivamo Darcyjevu brzinu

$$\mathbf{q} = A_1 \frac{1}{r} \mathbf{e}_r.$$

Evidentno je da odabrani tok ima radijalnu simetriju. Lako se vidi da je tok kroz kružnicu Γ_r oko ishodišta, radijusa r , neovisan o r i iznosi

$$Q = \int_{\Gamma_r} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds = 2\pi A_1,$$

pa stoga pišemo

$$\mathbf{q} = \frac{Q}{2\pi r} \mathbf{e}_r, \quad \phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r + B_1.$$

Instruktivno je pogledati radijalni tok u kome su zadani tlakovi na dvije koncentrične kružnice, recimo s radijusima r_w (radijus bušotine) i $R > r_w$. Tlakove na tim kružnicama označimo s p_w i p_R . Tada se lakim računom dobiva da je

$$Q = -\frac{2k(p_R - p_w)}{\mu \ln(R/r_w)}.$$

Uzmemo li još u obzir debljinu horizontalnog sloja $h > 0$ dolazimo do Dupuitove formule

$$Q = -\frac{2kh(p_R - p_w)}{\mu \ln(R/r_w)}, \quad (1.40)$$

koja veže protok kroz bušotinu (ili bilo koju koncentričnu kružnicu) i pad tlaka. Sam tlak se može izraziti formulom:

$$p(r) = p_w + \frac{p_w - p_R}{\ln(R/r_w)} \ln(r_w/r). \quad (1.41)$$

Radijus bušotine obično je puno manji od karakteristične linearne dimenzije čitave porozne domene, odnosno $r_w \ll R$. Uzmimo neke tipične vrijednosti: $r_w = 0.1$ m, $R = 100$ m; tada je $R/r_w = 10^3$ i iz (1.41) lako dobivamo da se jedna trećina ukupnog pada tlaka dobiva na udaljenosti $r = 10r_w = 1$ m. Iz toga slijedi praktičan zaključak da je propusnost sloja oko bušotine iznimno važna za efikasnost bušotine.

Uvjeti koji vladaju u neposrednoj okolini bušotine obično su takvi da je sloj porozne sredine neposredno uz bušotinu manje propusan od ostalog dijela porozne sredine. U sljedećem primjeru promatramo utjecaj te smanjene poroznosti na protok kroz bušotinu.

Primjer 2. Tražimo radijalni tok u slučaju da je propusnost sredine jednaka k_1 u području $r \in [r_w, r_0]$ te $k_2 \neq k_1$ u području $r > r_0$.

Ovdje imamo slučaj u kojem je propusnost sredine po dijelovima konstantna. Jedna je konstantna vrijednost k_1 zadana na kružnom vijencu $r_w \leq r \leq r_0$, koji predstavlja sloj u kontaktu s bušotinom, dok je druga vrijednost k_2 zadana daleko od bušotine (za $r > r_0$). Budući da su svojstva porozne sredine radijalno simetrična i ovdje tražimo radijalno simetrično rješenje. Ono će nužno imati oblik

$$p(r) = \begin{cases} -A_1 \ln r + B_1 & r_w \leq r \leq r_0 \\ A_2 \ln r + B_2 & r_0 \leq r \end{cases} \quad (1.42)$$

Na granici između dviju poddomena, $r = r_0$, potrebno je zadati kontaktne uvjete kako bismo dobili globalno rješenje (tj. rješenje u čitavoj domeni). Ti kontaktni uvjeti moraju eliminirati dvije konstante i oni su: 1) neprekidnost tlaka na prijelazu iz jedne poddomene u drugu i 2) neprekidnost normalne komponente toka. Preciznije, mora vrijediti

$$p(r_0-) = p(r_0+) \quad (1.43)$$

$$-\frac{k_1}{\mu} \nabla p(r_0-) \cdot \mathbf{n} = -\frac{k_2}{\mu} \nabla p(r_0+) \cdot \mathbf{n} \quad (1.44)$$

(Ovdje $p(r_0-)$ predstavlja limes s lijeva tlaka kada r teži prema r_0 , dok $p(r_0+)$ predstavlja limes s desna.)

If (1.42) i (1.44), (1.43) lako se dobiva da je protok Q kroz proizvoljnu kružnicu radijusa r oko ishodišta konstantan (neovisan o r) i vrijedi:

$$Q = -\frac{2\pi k_2 (p_w - p_R)}{\mu [\ln(R/r_0) + (k_2/k_1) \ln(r_0/r_w)]}.$$

To se slaže s formulom (1.40) kada $r_0 \rightarrow r_w$. Nadalje, formula se radi jednostavnije interpretacije zapisuje u obliku:

$$Q = -\frac{2\pi k_2(p_w - p_R)}{\mu \ln(R/r_w^*)}, \quad r_w^* = r_w \left(\frac{r_w}{r_0}\right)^{\gamma-1}, \quad \gamma = \frac{k_2}{k_1}. \quad (1.45)$$

Vrijednost r_w^* se naziva reducirani radijus bušotine i kako je tipično $\gamma \gg 1$ dobivamo $r_w^* \ll r_w$. Uzmimo, na primjer, $r_w = 0.1$ m, $r_0 = 0.5$ m, $k_2/k_1 = 10$ i $R = 100$ m. Tada je $r_w^* = 5^{-9}r_w$ i lako se vidi da je protok Q s perturbiranom propusnošću tri puta manji od protoka s neperturbiranom propusnošću.

Suma kompleksnih potencijala je ponovo kompleksan potencijal koji predstavlja superpoziciju tokova koji ulaze u sumu. To je temelj principa superpozicije. Posebno, možemo praviti superpoziciju izvora kako bismo dobili opticanje pojedinih kontura. Na primjer, ako smjestimo dva izvora istog intenziteta $Q/2$ u točke $(a, 0)$ i $(-a, 0)$, dolazimo do potencijala

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - a) + \frac{Q}{2\pi} \ln(z + a).$$

Sada se lako provjerava da se imaginarna os $x = 0$ optiče, odnosno da je strujna funkcija konstanta na imaginarnoj osi (u stvari po dijelovima konstanta). To znači da taj tok opisuje strujanje s izvorom u (na primjer) točki $(a, 0)$ pri čemu je imaginarna os kruta stijenka. Drugi izvor, postavljen u točki $(-a, 0)$, je imaginaran i samo služi tome da se postigne opticanje imaginarne osi. Tom tehnikom razmiještanja izvora i ponora možemo postići opticanje nekih ravnih stijenki, a kombiniranjem s tehnikom konformnih preslikavanja mogu se konstruirati tokovi koji optiču puno općenitije konture. Ovdje u tu klasičnu tehniku mehanike fluida nećemo ulaziti.

Zadatak 4. Naći sferno-simetričan tok između dviju koncentričnih sfera na kojima su zadani konstantni tlakovi. Pokazati da je protok kroz svaku sferu neovisan o radijusu sfere (kao i u dvodimenzionalnom slučaju). Izračunati tlak i Darcyjevu brzinu.

1.6.2 Varijacijska formulacija rubne zadaće

Promatrajmo sada općenitu zadaću u tri dimenzije. Domena toka neka je ograničena domena $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a glatkom granicom. Granica domena $\partial\Omega$ neka je podijeljena na dva disjunktne podskupa

$$\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset, \quad \Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega.$$

Zadane su dvije glatke funkcije $P: \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$ i $F: \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$ i treba naći funkcije $\mathbf{q} \in C^1(\overline{\Omega})^3$ i $p \in C^2(\overline{\Omega})$ koje zadovoljavaju:

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad \text{u } \Omega, \quad (1.46)$$

$$p = P \quad \text{na } \Gamma_D, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = F \quad \text{na } \Gamma_N. \quad (1.47)$$

k i μ su kao i do sada pozitivne konstante.

Zadaću (1.46), (1.47) možemo preformulirati na sljedeći način: Uočimo prvo da vrijedi

$$-\operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu}\nabla p\right) = 0$$

pa pomnožimo tu jednadžbu s proizvoljnom glatkom funkcijom φ i prointegrirajmo po Ω . Nakon parcijalne integracije dobivamo

$$\int_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \mathbf{n} \varphi \, dS.$$

Da bismo uvažili rubne uvjete odaberimo funkciju φ koja zadovoljava $\varphi = 0$ na Γ_D . Time dobivamo sljedeću zadaću: Naći funkciju p koja zadovoljava

$$p \in V_P = \{r \in C^1(\overline{\Omega}) : r|_{\Gamma_D} = P\} \quad (1.48)$$

$$\int_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma_N} F \varphi \, dS, \quad \forall \varphi \in V_0. \quad (1.49)$$

Ovdje je s V_0 označen prostor V_P za $P = 0$.

Napomena 5. Promatramo li zadaću (1.48), (1.49) vidimo da u njoj više ne tražimo da je rješenje klase $C^2(\overline{\Omega})$ već samo $C^1(\overline{\Omega})$. Štoviše, zadaća (1.48), (1.49) je dobro postavljena i za funkcije manje glatkoće. Na primjer, dovoljno je zahtijevati da funkcije iz V_P i V_0 imaju ograničene i neprekidne prve derivacije svugdje osim na konačnom broju ploha, na kojima prve parcijalne derivacije imaju jednostrane limese.

Zadaća (1.48), (1.49) je u osnovi ekvivalentna sa zadaćom (1.46), (1.47). Da bismo to dokazali potrebna nam je *osnovna lema varijacijskog računa* u dvije verzije, za volumni i plošni integral. Lema kaže sljedeće: ako je $f \in C(\Omega)$ funkcija sa svojstvom

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega),$$

gdje je $C_c^1(\Omega)$ skup neprekidno derivabilnih funkcija s kompaktnim nosačem u Ω , onda je $f \equiv 0$ na Ω . Analogno, ako je

$$\int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, dS = 0 \quad \forall \varphi \in C(\partial\Omega),$$

onda je $f \equiv 0$ na $\partial\Omega$.

Lema 1. 1. Svako rješenje zadaće (1.46), (1.47) je ujedno i rješenje zadaće (1.48), (1.49).
2. Ako je $p \in C^2(\overline{\Omega})$ rješenje zadaće (1.48), (1.49) tada je ono ujedno i rješenje zadaće (1.46), (1.47).

Dokaz. Prvu tvrdnju smo dokazali u samom izvodu zadaće (1.48), (1.49). Druga tvrdnja. Parcijalnom integracijom iz (1.49) dobivamo

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu} \nabla p \varphi\right) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu} \nabla p\right) \varphi d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma_N} F \varphi dS, \quad \forall \varphi \in V_0$$

odnosno

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu} \nabla p\right) \varphi d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma_N} F \varphi dS - \int_{\partial\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \mathbf{n} \varphi dS, \quad \forall \varphi \in V_0. \quad (1.50)$$

Uzimajući test funkciju φ koja se poništava na $\partial\Omega$ (takva je dozvoljiva) dobivamo

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu} \nabla p\right) \varphi d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega),$$

i stoga po osnovnoj lemi varijacijskog računa imamo

$$\operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu} \nabla p\right) = 0 \quad \text{u } \Omega.$$

Sada se (1.50) svodi na

$$0 = - \int_{\Gamma_N} F \varphi dS - \int_{\partial\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \mathbf{n} \varphi dS, \quad \forall \varphi \in V_0,$$

što zbog poništavanja funkcije φ na Γ_D vodi na

$$\int_{\Gamma_N} \left(F + \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \mathbf{n}\right) \varphi dS = 0 \quad \forall \varphi \in V_0.$$

Ponovna primjena osnovne leme varijacijskog računa daje

$$-\frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \mathbf{n} = F \quad \text{na } \Gamma_N.$$

Time je lema dokazana. □

Napomena 6. *Rješenje zadaće (1.48), (1.49) može i ne imati glatkoću koju traži Lema 1 da bi bilo klasično rješenje zadaće (1.46), (1.47). Glatkoća može biti manja ako koeficijenti diferencijalne jednadžbe nisu glatke funkcije (kao npr. po dijelovima konstantna propusnost) ili ako domena nije dovoljno glatka. Prema rezultatu Leme 1 opravdano je rješenje zadaće (1.48), (1.49) nazivati generaliziranim rješenjem zadaće (1.46), (1.47).*

Struktura zadaće (1.48), (1.49). Neka je $V = C^1(\bar{\Omega})$. To je linearan normiran prostor s uobičajenom sup-normom. Skup $V_P \subset V$ za $P \neq 0$ nema strukturu linearnog prostora već je to jedna afina ravnina i posebno konveksan skup. Afina ravnina V_P može se zapisati u obliku

$$V_P = F + V_0 = \{v = P + v_0 : v_0 \in V_0\}, \quad \text{gdje je } V_0 \subset V \text{ linearan potprostor, } P \in V.$$

Štoviše, ako je V_0 zatvoren potprostor od V , onda je V_P zatvorena afina mnogostrukost. Uvedimo preslikavanje

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx \quad (1.51)$$

$$\mathcal{F}(u) = - \int_{\Gamma_N} F \varphi \, dS, \quad (1.52)$$

pri čemu je $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, i $\mathcal{F}: V \rightarrow \mathbb{R}$. Evidentno je \mathcal{F} linearan funkcional na prostoru V . Bitno je pokazati da je \mathcal{F} neprekidan linearan funkcional, tj. da postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$|\mathcal{F}(u)| \leq C \|u\|_V, \quad \forall u \in V.$$

Linearan prostor svih linearnih i neprekidnih funkcionala se označava s V' i u njega se uvodi norma

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{\mathcal{F}(u)}{\|u\|_V}.$$

Funkcija a , s druge strane, je bilinearna forma:

Definicija 1. Preslikavanje $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilinearna forma (ili bilinearni funkcional) ako je linearan funkcional u svakoj varijabli zasebno. Preciznije,

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V, \quad a(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w), \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V, \quad a(u, \alpha v + \beta w) &= \alpha a(u, v) + \beta a(u, w). \end{aligned}$$

Bilinearna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je ograničena ako postoji konstanta M , takva da vrijedi

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V. \quad (1.53)$$

Bilinearna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je koercitivna ako postoji konstanta $\alpha > 0$ takva da je

$$\forall v \in V, \quad \alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v). \quad (1.54)$$

Bilinearna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je simetrična ako vrijedi

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = a(v, u). \quad (1.55)$$

Napomena 7. Ako je V normiran prostor (s normom $\|\cdot\|$), onda svaka simetrična bilinearna, ograničena i koercitivna forma $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ predstavlja jedan skalarni produkt na V i formulom

$$\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$$

je dobro definirana norma ekvivalentna s $\|\cdot\|$. Tu normu nazivamo energetska norma.

Sada vidimo da varijacijsku zadaću (1.48), (1.49) možemo zapisati u sljedećoj apstraktnoj formi:

$$\begin{cases} \text{naći } p \in V_P \\ a(p, \varphi) = \mathcal{F}(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_0. \end{cases} \quad (1.56)$$

Funkciju φ iz varijacijske jednadžbe nazivamo **test funkcija**.

Sljedeća lema pokazuje da zadaći (1.56) možemo pridružiti jedan problem minimizacije kome je ona ekvivalentna. Pokazuje se da je (1.56) Eulerova jednadžba za pripadni problem minimizacije. Takva karakterizacija je vrlo korisna jer je jednostavno pokazati da problem minimizacije ima jedinstveno rješenje.

Lema 2. Neka je V linearan prostor i $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simetrična, pozitivna bilinearna forma, tj. $a(v, v) > 0$ za svako $0 \neq v \in V$. Zadan je još linearan funkcional $\mathcal{F}: V \rightarrow \mathbb{R}$ i neprazana zatvorena afina mnogostrukost $V_P = P + V_0 \subset V$. Tada funkcional

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \mathcal{F}(v)$$

dostiže svoj minimum na V_P u točki $p \in V_P$ ako i samo ako vrijedi

$$\forall \varphi \in V_0, \quad a(p, \varphi) = \mathcal{F}(\varphi). \quad (1.57)$$

Štoviše, (1.57) ima najviše jedno rješenje.

Dokaz. Za $p, v \in V_P$ i $t \in [0, 1]$ znamo da je $tv + (1 - t)p = p + t(v - p) \in V_P$ te vrijedi

$$J(tv + (1 - t)p) = J(p) + t[a(p, v - p) - \mathcal{F}(v - p)] + \frac{1}{2}t^2a(v - p, v - p). \quad (1.58)$$

1. Ako $p \in V_P$ zadovoljava (1.57), onda iz (1.58), zbog $v - p \in V_0$ slijedi

$$J(tv + (1 - t)p) > J(p), \quad \forall v \in V_P, v \neq p, \quad \forall t \in (0, 1],$$

što pokazuje da je p točka strogog minimuma funkcionala. Budući da je minimum strogi, on je i jedinstven, a onda i zadaća (1.57) može imati najviše jedno rješenje.

2. Neka J ima minimum na V_P u točki $p \in V_P$. Tada je za proizvoljno $v \in V_P$ i $t \in [0, 1]$, $J(tv + (1 - t)p) \geq J(p)$ i prema (1.58) za svako $t \in (0, 1]$ vrijedi

$$[a(p, v - p) - \mathcal{F}(v - p)] + \frac{t}{2}a(v - p, v - p) \geq 0.$$

Prijelazom na limes kada $t \rightarrow 0+$ dobivamo

$$\forall v \in V_P, \quad a(p, v - p) - \mathcal{F}(v - p) \geq 0.$$

Budući da za proizvoljno $\varphi \in V_0$ možemo staviti $v = p \pm \varphi$, slijedi (1.57). \square

Ako stavimo jače pretpostake na prostor V i bilinearnu formu a možemo pokazati da problem minimizacije iz Leme 2 ima rješenje. Taj se rezultat zove Lax-Milgramova lema.

Teorem 1. (Lax-Milgramova lema za konveksan skup). Neka je $K \subset V$ neprazan zatvoren i konveksan podskup Hilbertovog prostora V te neka je $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simetrična bilinearna, ograničena i koercitivna forma. Tada za svako $\mathcal{F} \in V'$ minimizacijska zadaća

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v), \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \mathcal{F}(v), \quad (1.59)$$

ima jedinstveno rješenje $u \in K$,

Dokaz. 1) Funkcional J je ograničen odozdo:

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1}{2}\alpha\|v\|^2 - \|F\|\|v\| \\ &= \frac{1}{2\alpha}(\alpha\|v\| - \|F\|)^2 - \frac{1}{2\alpha}\|F\|^2 \geq -\frac{1}{2\alpha}\|F\|^2. \end{aligned}$$

2) Neka je $c_1 = \inf\{J(v): v \in K\}$. Po definiciji infimuma možemo naći niz (v_n) (tzv. minimizirajući niz) takav $J(v_n) \rightarrow c_1$ kada $n \rightarrow \infty$. Koristeći bilinearne forme dobivamo

$$\begin{aligned} \alpha\|v_n - v_m\|^2 &\leq a(v_n - v_m, v_n - v_m) \\ &= 2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) - a(v_n + v_m, v_n + v_m) \\ &= 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \\ &\leq 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8c_1. \end{aligned}$$

U zadnjoj ocjeni smo koristili konveksnost skupa K koja daje $(v_n + v_m)/2 \in V$. Sada evidentno desna strana teži u nulu kada $n, m \rightarrow \infty$ pa izlazi da je (v_n) Cauchyjev niz. Zbog potpunosti prostora, postoji $v \in V$ takav da je $u = \lim v_n$. Zatvorenost skupa K povlači da je $u \in K$, a neprekidnost funkcionala J daje

$$J(u) = \lim J(v_n) = \inf_{v \in K} J(v).$$

3) Jedinstvenost. Pretpostavimo da su u_1 i u_2 rješenja problema minimizacije. Niz $u_1, u_2, u_1, u_2, \dots$ je evidentno minimizirajući niz. Prema dokazanom, on je Cauchyjev, što je moguće jedino ako je $u_1 = u_2$. \square

Kombiniranjem prethodnih rezultata dobivamo:

Teorem 2. (Lax-Milgramova lema. Simetričan slučaj) Neka je V Hilbertov prostor i $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna, ograničena, simetrična i koercitivna forma. Neka je $F \in V$, $V_0 \subset V$ zatvoren potprostor te $V_P = P + V_0$. Tada za svako $\mathcal{F} \in V'$ problem

$$\begin{cases} \text{Naći } p \in V_P \\ \forall \varphi \in V, \quad a(p, \varphi) = \mathcal{F}(\varphi) \end{cases} \quad (1.60)$$

ima jedinstveno rješenje $p \in V_P$ koje je ujedno rješenje minimizacijske zadaće (1.59) uz $K = V_P$.

Osnovne poteškoće u primjeni Teorema 2 na našu zadaću su sljedeće

1. Prostor $V = C^1(\overline{\Omega})$ nije Hilbertov prostor;
2. U normi prostora $C^1(\overline{\Omega})$ nije moguće dokazati koercitivnost bilinearne forme.

Te se poteškoće rješavaju tako da se prostor $C^1(\overline{\Omega})$ zamijeni sa širim prostorom, tzv. prostorom Soboljeva. Naime, nužno je oslabiti normu u prostoru derivabilnih funkcija kako bismo postigli koercitivnost varijacijske zadaće. Pri tome se prostor neprekidnih funkcija zamjenjuje prostorom kvadratno-integrabilnih funkcija $L^2(\Omega)$:

$$L^2(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty\}.$$

u kome je dobro definiran skalarni produkt

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

i pripadna norma

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right]^{1/2}.$$

Prostor $C^1(\overline{\Omega})$ zamjenjujemo prostorom Soboljeva $H^1(\Omega)$ koji je definiran na sljedeći način:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega): \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d\}.$$

U njemu imamo skalarni produkt

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

koji generira normu

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Nakon ovakve zamjene prostora, odnosno zamjene sup-normi s integralnim normama može se pokazati da su ispunjeni svi uvjeti Lax-Milgramove leme. Time dolazimo do teorema egzistencije i jedinstvenosti rješenja. Tekškoća u ovom pristupu leži u definiciji prostora koji su sada složeniji od prostora neprekidnih funkcija sa sup-normama. Posebno je nužno dobro definirati pojam derivacije (u smislu distribucija) jer sada više nemamo posla s neprekidnim funkcijama.

Princip maksimuma

Zadaća (1.48), (1.49) ima svojstvo da njeno rješenje ne može imati lokalnih minimuma i maksimuma. Posebno, ono postiže minimalnu i maksimalnu vrijednost na granici domene. Ovdje ćemo pokazati posljednju tvrdnju polazeći od varijacijske jednadžbe.

Lema 3. *Neka je $p \in C^1(\overline{\Omega})$ rješenje zadatke (1.48), (1.49). Tada je za svako $\mathbf{x} \in \Omega$*

$$\inf_{\partial\Omega} p \leq p(\mathbf{x}) \leq \sup_{\partial\Omega} p.$$

Dokaz. 1. Pokažimo da je $p \geq p_{min} = \inf_{\partial\Omega} p$, pri čemu možemo pretpostaviti da je p_{min} konačno. Konstruirajmo test funkciju

$$\phi = \min(0, p - p_{min}) = \begin{cases} 0 & \text{za } p \geq p_{min} \\ p - p_{min} & \text{za } p < p_{min} \end{cases}$$

Prema konstrukciji je $\phi = 0$ na $\partial\Omega$ pa je stoga $\phi \in V_0$, tj. ϕ je dobra test funkcija. Nadalje,

$$\nabla\phi = \begin{cases} 0 & \text{za } p \geq p_{min} \\ \nabla p & \text{za } p < p_{min} \end{cases}$$

(Vidi Napomenu 5.) Uvrštavanjem u (1.49) dobivamo

$$\int_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} = 0.$$

Kako je

$$\nabla p(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{na } \{\mathbf{x} \in \Omega : p(\mathbf{x}) \geq p_{min}\} \\ |\nabla p(\mathbf{x})|^2 & \text{na } \{\mathbf{x} \in \Omega : p(\mathbf{x}) < p_{min}\}, \end{cases} = |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2$$

vrijedi

$$\int_{\Omega} \frac{k}{\mu} |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = 0 \implies \nabla \phi(\mathbf{x}) = 0 \text{ za svaki } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Stoga je funkcija konstanta i kako je nula na rubu domene imamo $\phi = 0$ na Ω . Prema konstrukciji to povlači $p(\mathbf{x}) \geq p_{min}$ za svako $\mathbf{x} \in \Omega$.

2. Da bismo pokazali da je $p \leq p_{max} = \sup_{\partial\Omega} p < +\infty$ odabiremo test funkciju $\phi = \max(0, p - p_{max})$ i zaključivanjem kao u prethodnom slučaju nalazimo da je $\phi = 0$ i odatle $p \leq p_{max}$. \square

Metoda konačnih elemenata

Važna posljedica definicije poopćenog rješenja je vrlo generalan način konstrukcije aproksimacije za poopćeno rješenje. Prisjetimo se definicije poopćenog rješenja – ono je

definirano varijacijskom jednađbom:

$$p \in V_P = \{r \in C^1(\bar{\Omega}) : r|_{\Gamma_D} = P\}$$

$$\int_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma_N} F \varphi \, dS, \quad \forall \varphi \in V_0.$$

Linearan prostor V_0 je beskonačnodimenzionalan. Ideja je aproksimirati ga s konačnodimenzionalnim potprostorom kako bi se dobila konačnodimenzionalna zadaća. Uzmimo da je $V_{0,M} \subset V_0$ jedan takav prostor dimenzije M i pretpostavimo da $V_{0,M} \rightarrow V_0$ kada $M \rightarrow \infty$ u nekom smislu koji ovdje nećemo razraditi. Tada možemo očekivati da ćemo biranjem sve većeg M dobivati sve bolju aproksimaciju beskonačnodimenzionalne zadaće.

Ako smo skup test funkcija suzili na konačnodimenzionalan prostor, onda i afinu mnogostrukost moramo zamijeniti s odgovarajućom konačnodimenzionalnom mnogostrukosti. Kako ćemo to učiniti ovisi o načinu konstrukcije prostora $V_{0,M}$. U najjednostavnijem slučaju homogenog Dirichletovog rubnog uvjeta kada je $P = 0$ imamo $V_P = V_0$ pa ćemo uzeti aproksimativno rješenje $p_M \in V_{0,M}$. Time dolazimo do zadaće:

$$p_M \in V_{0,M}$$

$$\int_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla p_M \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma_N} F \varphi \, dS, \quad \forall \varphi \in V_{0,M}.$$

Kako je prostor $V_{0,M}$ konanodimenzionalan možemo odabrati u njemu jednu bazu. Uzmimo da je $V_{0,M} = \mathcal{L}(\phi_0, \dots, \phi_M)$ i potražimo rješenje u obliku

$$p_M = \sum_{j=1}^M p_j \phi_j. \tag{1.61}$$

Time dolazimo do zadaće: za $i = 1, 2, \dots, M$,

$$\sum_{j=1}^M p_j \int_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_i \, d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma_N} F \phi_i \, dS.$$

Uvedemo li brojeve

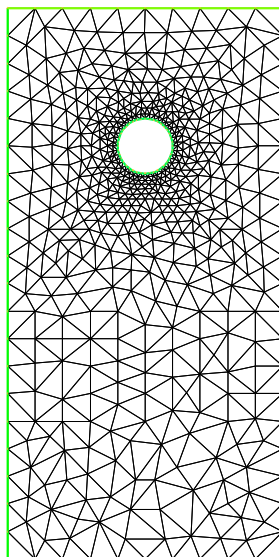
$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \frac{k}{\mu} \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_i \, d\mathbf{x}, \quad F_i = - \int_{\Gamma_N} F \phi_i \, dS,$$

dolazimo do linearnog sustava

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{F}.$$

gdje je $\mathbf{A} = (A_{i,j}) \in \mathbb{R}^{M \times M}$, $\mathbf{p} = (p_i) \in \mathbb{R}^M$ i $\mathbf{F} = (F_i) \in \mathbb{R}^M$. Rješenje sustava je vektor koeficijenata \mathbf{p} koji generira funkciju p_M po formuli (1.61).

Zadatak 5. Koristeći linearnu nezavisnost baznih funkcija i svojstvo da se poništavaju na rubu da biste dokazali da je za svako $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^M$, $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, $\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} > 0$. To dokazuje da je matrica \mathbf{A} pozitivno definitna, dakle i regularna.



Slika 1.4: Triangulacija dvodimenzionalne domene.

Princip konstrukcije aproksimativnog prostora opisat ćemo u njegovom najjednostavnijem obliku. Domena u kojoj riješavamo rubnu zadaću razbije se na uniju disjunktne podskupova jednostavne geometrije koji posve prekrivaju domenu. U dvije prostorne dimenzije u tu se svrhu najčešće koriste trokuti i četverokuti, dok se u tri dimenzije koriste tetraedri, paralelogrami i prizme. Skupovi koje koristimo u subdiviziji domene nazivaju se (konačni) elementi, a sama subdivizija se naziva triangulacija ili mreža.

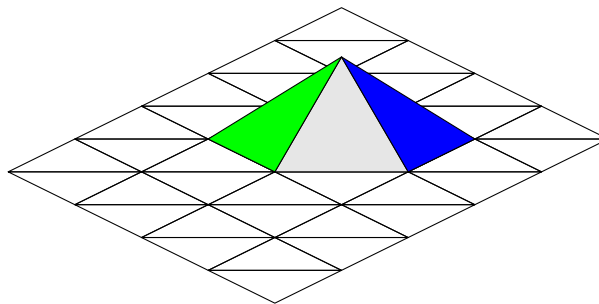
Funkcije koje koristimo u aproksimaciji definirane su tako da su 1) polinomi stupnja k na svakom elementu subdivizije, gdje je k unaprijed zadan; 2) globalno moraju biti neprekidne. Takve funkcije imaju parcijalne derivacije svugdje osim na dodirnim plohama između susjednih elemenata gdje derivacije imaju konačne jednostrane limese. Prema tome, radi se o funkcijama koje možemo koristiti u varijacijskoj jednadžbi (1.49).

Primjer triangulacije dvodimenzionalne domene dan je na Slici 1.4. Konačnodimenzionalni prostor V_M definiramo kao linearni prostor funkcija koje su polinomi prvog stupnja na svakom trokutu triangulacije, a globalno su neprekidne ($k = 1$ u ovom primjeru).

Globalnu neprekidnost postizemo tako da zadamo vrijednosti funkcije u svim vrhovima triangulacije. Funkcija je tada na jedinstven način definirana na svakom trokutu i neprekidna je na stranicama u kojima se susjedni trokuti dodiruju (dokažite). Evidentno je dimenzija tog prostora M jednaka broju vrhova u triangulaciji. Vrijednosti funkcije u vrhovima nazivamo stupnjevima slobode.

Konačno svakom vrhu možemo pridružiti baznu funkciju ϕ definiranu time što je jednaka jedan u promatranom vrhu i nuli u svim ostalim vrhovima. Primjer takve funkcije dan je na Slici 1.5.

Ovakav izbor baznih funkcija vodi na dobro uvjetovanu matricu sustava \mathbf{A} , koja je simetrična i pozitivno definitna. Linearan sustav se može riješavati direktnim metodama,



Slika 1.5: Primjer jedne Lagrangeove bazne funkcije.

no kod problema veće dimenzije uobičajene su iterativne metode kao npr. prekondicionirana metoda konjugiranih gradijenata.

1.6.3 Slabo kompresibilan fluid u elastičnoj poroznoj sredini

Ovdje ćemo radi jednostavnosti zanemariti utjecaj sile teže. Poazimo stoga od jednadžbi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(p)\rho(p)) + \operatorname{div}(\rho(p)\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} = -\frac{k}{\mu}\nabla p. \quad (1.62)$$

Kao i u prethodnoj točki permeabilnost je konstantni skalar i viskoznost ne ovisi o tlaku. Za poroznost i gustoću mase ćemo pretpostaviti:

$$\frac{\Phi'(p)}{\Phi(p)} = \beta_R, \quad \frac{\rho'(p)}{\rho(p)} = \beta_F,$$

gdje su β_R i β_F konstante. Pretpostavka male kompresibilnosti znači da su veličine $\beta_R(p - p_0)$ i $\beta_F(p - p_0)$ male za tipične varijacije tlakova, odnosno

$$\beta_R(p - p_0) \ll 1 \quad \beta_F(p - p_0) \ll 1. \quad (1.63)$$

Zanemarivanjem veličina višeg reda dobivamo

$$\Phi(p) = \Phi_0(1 + \beta_R(p - p_0)), \quad \rho(p) = \rho_0(1 + \beta_F(p - p_0)),$$

gdje je $\Phi_0 = \Phi(p_0)$ i $\rho_0 = \rho(p_0)$. Uvrštavanjem u (1.62) dobivamo

$$(\Phi_0\beta_R\rho(p) + \Phi(p)\rho_0\beta_F)\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho(p)\frac{k}{\mu}\nabla p) = 0.$$

Raspisano,

$$\Phi_0\rho_0(\beta_R + \beta_F)\frac{\partial p}{\partial t} + 2\Phi_0\rho_0\beta_R\beta_F(p - p_0)\frac{\partial p}{\partial t} - \rho_0\frac{k}{\mu}(1 + \beta_F(p - p_0))\Delta p - \rho_0\beta_F\frac{k}{\mu}|\nabla p|^2 = 0.$$

Zbog pretpostavke (1.63) možemo zanemariti član $\beta_F(p-p_0)$ u odnosu na 1 te $2\beta_R\beta_F(p-p_0)$ u odnosu na $\beta_R + \beta_F$. Time dobivamo

$$\Phi_0\rho_0(\beta_R + \beta_F)\frac{\partial p}{\partial t} - \rho_0\frac{k}{\mu}\Delta p - \rho_0\beta_F\frac{k}{\mu}|\nabla p|^2 = 0.$$

Nadalje, usporedimo zadnja dva člana. Neka je δp karakteristična varijacija tlaka, a L karakteristična prostorna skala. Tada je zadnji član reda

$$\rho_0\beta_F\frac{k}{\mu}\frac{(\delta p)^2}{L^2},$$

dok je prethodni veličine

$$\rho_0\frac{k}{\mu}\frac{\delta p}{L^2}.$$

Sada vidimo da je

$$\rho_0\beta_F\frac{k}{\mu}\frac{(\delta p)^2}{L^2} \ll \rho_0\frac{k}{\mu}\frac{\delta p}{L^2}$$

zbog pretpostavke

$$\beta_F\delta p \ll 1.$$

Time dolazimo do jednadžbe slabokompresibilnog toka

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \kappa\Delta p = 0. \quad (1.64)$$

gdje je

$$\kappa = \frac{k}{\mu\Phi_0(\beta_R + \beta_F)}. \quad (1.65)$$

Dobivena je klasična jednažba provođenja (1.64) koja predstavlja modelnu jednadžbu parabolikog tipa.

Bibliografija

- [1] Jacob Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [2] Gedeon Dagan. *Flow and Transport in Porous Formations*. Springer-Verlag, 1989.
- [3] Ghislain de Marsily. *Quantitative Hydrology. Groundwater Hydrology for Engineers*. Academic Press, Inc., Orlando, 1986.
- [4] Clyton V. Deutsch. *Geostatistical Reservoir Modeling*. Oxford University Press, 2002.

- [5] V.M.Ryzhik G.I. Barenblatt, V.M. Entov. *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*. Kluwer, 1990.
- [6] Marija Heinrich-Miletić Pavao Miletić. *Uvod u kvantitvnu hidrogeologiju*. RGN-Sveučilište u Zagrebu - OOUR Studij geotehnike Varaždin & NIŠRO Varaždin, Varaždin, 1981.
- [7] Kosta Urumović. *Fizikalne osnove dinamike podzemnih voda*. Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Zagreb, 2003.