Poglavlje 1

Jednadžbe mehanike fluida

U ovom poglavlju izvodimo jednadžbe mehanike fluida slijedeći [3]. Metoda se oslanja na geometrijsku i mehaničku intuiciju i stoga je pogodnija za prikaz mehaničkog značenja pojedinih članova u diferencijalnim jednadžbama gibanja. Matematički stroži izvod može se naći u [2].

1.1 Zakon sačuvanja mase

Na makroskopskoj razini masu tijela zadajemo pomoću gustoće mase koju obično označavamo s ρ. Ako je Ω dio kontinuuma, onda je njegova masa dana izrazom

$$m(\Omega) = \int_\Omega \rho \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Vidimo da ρ predstavlja masu po jedinici volumena te ima jedinicu $[\mathrm{M}/\mathrm{L}^3]$. Općenito je gustoća mase funkcija prostorne varijable i vremena: $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$.

U izvođenju jednadžbi mehanike kontinuuma služit ćemo se pojmom *kontrolnog volumena* koji ćemo nadalje označavati s Ω. Kontrolni volumen je dio prostora koji je stalno, ili u nekom vremenskom intervalu, ispunjen kontinuumom: fluidom čije gibanje promatramo. Ako kontinuum ne ispunjava u potpunosti cijelo vrijeme kontrolni volumen, onda uzimamo konvenciju da kontrolni volumen promatramo samo u onom vremenskom intervalu u kojem je u potpunosti ispunjen kontinuumom. Takva nam pretpostavka treba jer ćemo po kontrolnom volumenu integrirati različite karakteristike kontinuuma.

Pored gustoće mase za opis kontinuuma treba nam i njegova brzina gibanja. Brzina kontinuuma u točki $\mathbf{x}$, u trenutku t, bit će označena s $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Ako u inicijalnom trenutku neka točka fluida ima položaj X, onda je njen položaj u trenutku t jednak $\mathbf{x}(t)$, gdje je

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t).$$

Krivulju $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ nazivamo materijalnom krivuljom ili trajektorijom materijalne točke X. Pored trajektorija ponekad se promatraju i *strujnice*, krivulje $\sigma \mapsto \mathbf{x}(\sigma)$ određene diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d}{d\sigma}\mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\sigma), t).$$

Strujnica u danom trenutku t je krivulja sa svojstvom da njena tangenta u svakoj njenoj točki ima smjer brzine. U slučaju stacionarnog toka kada $\mathbf{v}$ ne ovisi eksplicitno o vremenu ($\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$) strujnice i trajektorije se podudaraju.

Zakon sačuvanja mase možemo izraziti na sljedeći način: za svaki kontrolni volumen Ω mora vrijediti:

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina}\\ \text{promjene}\\ \text{mase u } \Omega\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{brzina}\\ \text{ulaska}\\ \text{mase u } \Omega\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{brzina}\\ \text{izlaska}\\ \text{mase iz } \Omega\end{matrix}\right\} \tag{1.1}$$

Uočimo prvo da je jednostavno izraziti brzinu promjene mase u kontrolnom volumenu.

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina}\\ \text{promjene}\\ \text{mase u } \Omega\end{matrix}\right\} = \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

Da bismo izrazili brzinu ulaska i izlaska mase iz kontrolnog volumena uvedimo sljedeće oznake: Neka je $\mathbf{n}$ jedinična vanjska normala na granicu kontrolnog volumena koju označavamo s $\partial\Omega$. Granicu $\partial\Omega$ možemo rastaviti na uniju $\partial\Omega = \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-$ gdje je $\partial\Omega^+$ izlazni dio granice (onaj kroz koji masa napušta volumen), a $\partial\Omega^-$ ulazni dio granice (onaj kroz koji masa ulazi u volumen). Ta dva skupa možemo karakterizirati na ovaj način:

$$\partial\Omega^+ = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \colon \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0\}, \quad \partial\Omega^- = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \colon \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \leq 0\}.$$

Naravno, ako se brzina vremenski mijenja različiti dijelovi granice će biti ulazni (izlazni) u različitim vremenskim trenucima.

Promotrimo li komad ravne plohe orijentirane vektorom normale $\mathbf{n}$ i površine S u fluidu koji se giba konstantnom brzino $\mathbf{v}$, lako ćemo se uvjeriti da je brzina kojom masa prolazi kroz plohu jednaka $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}S$. Generalizacijom tog zaključka na proizvljnu plohu dobivamo:

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina}\\ \text{ulaska}\\ \text{mase u } \Omega\end{matrix}\right\} = -\int_{\partial\Omega^-} \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{dS}, \quad \left\{\begin{matrix}\text{brzina}\\ \text{izlaska}\\ \text{mase iz } \Omega\end{matrix}\right\} = \int_{\partial\Omega^+} \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{dS}.$$

Ovdje smo morali paziti na predznake koji su određeni time što je $\mathbf{n}$ vanjska normala na rub od Ω i što obje ove brzine moraju biti pozitivne. Time dobivamo:

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina}\\ \text{ulaska}\\ \text{mase u } \Omega\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{brzina}\\ \text{izlaska}\\ \text{mase iz } \Omega\end{matrix}\right\} = -\int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{dS}.$$

Jednadžba (1.1) dobiva oblik

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{dS} = 0.$$

Nakon primjene teorema o divergenciji dolazimo do zaključka

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Ta jednakost mora vrijediti za svaki kontrolni volumen Ω i stoga zaključujemo da podintegralna funkcija mora biti jednaka nuli u svakoj točki promatrane domene (teorem o lokalizaciji). Time smo dobili diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{1.2}$$

koja se naziva **jednadžba kontinuiteta** i predstavlja diferencijalni zapis zakona sačuvanja mase.

Sada možemo dati sljedeću interpretaciju članovima (1.2): $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ predstavlja brzinu promjene mase po jedinici volumena; $-\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ predstavlja brzinu povećanja mase uslijed konvekcije mase.

1.2 Zakon sačuvanja impulsa

Zakon sačuvanja impulsa predstavlja generalizaciju drugog Newtonovog aksima na mehaniku kontinuuma. Zakon u mehanici materijalnih točaka kaže da je brzina promjen impulsa $m\mathbf{v}$ jednaka sili koja djeluje na tijelo:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

u oznakama tipičnim za mehaniku materijalnih točaka.

U mehanici kontinuuma impuls je zadan gustoćom impulsa $\rho\mathbf{v}$. Impuls nekog komada tijela Ω je jednak

$$\int_\Omega \rho \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Nadalje, prilikom računa promjene količine impulsa u nekom komadu Ω dužni smo uzeti u obzir da se impuls, kao i masa i energija, transportira s kontinuumom koji se giba. Stoga imamo ovu generalizaciju drugog Newtonovog zakona:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{brzina} \\ \text{povećanja} \\ \text{impulsa u } \Omega \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{brzina} \\ \text{ulaska} \\ \text{impulsa u } \Omega \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \text{brzina} \\ \text{izlaska} \\ \text{impulsa iz } \Omega \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \text{djelovanje} \\ \text{vanjske sile} \\ \text{na fluid u } \Omega \end{matrix} \right\} \tag{1.3}$$

U ovoj jednadžbi jednostavno je odrediti samo prvi član:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{brzina} \\ \text{povećanja} \\ \text{impulsa u } \Omega \end{matrix} \right\} = \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Impuls se transportira pomoću dva mehanizma: *konvektivnim transportom* i *molekularnim transportom*. Konvektivni transport je posljedica makroskopske brzine fluida, dok molekularni transport dolazi od interakcija na molekularnoj razini i u mehanici kontinuuma se modelira tzv. *kontaknom silom*.

Vidjeli smo kod zakona sačuvanja mase da se brzina transporta mase izražava integralom

$$-\int_{\partial\Omega^-} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dS} - \int_{\partial\Omega^+} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dS} - \int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dS}.$$

To zaključivanje može se prenijeti na bilo koju veličinu zadanu svojom volumnom gustoćom $\mathbf{E}$ koja se transportira s kontinuumom: Brzina transporta mase kroz volumen Ω je

$$-\int_{\partial\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{dS} \tag{1.4}$$

Napomena 1. *U diferencijalnoj formulaciji integralu (1.4) odgovara član* $-\operatorname{div}(E\mathbf{v})$ *ako je* E *skalarno polje, ili član* $-\operatorname{div}(\mathbf{E}\otimes\mathbf{v})$ *ako je* $\mathbf{E}$ *vektorsko polje.*

Primjenom na gustoću impulsa dobivamo:

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina ulaska}\\ \text{impulsa konvektivnim}\\ \text{transportom}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{brzina izlaska}\\ \text{impulsa konvektivnim}\\ \text{transportom}\end{matrix}\right\} = -\int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\;\mathrm{dS}.$$

Molekularni transport proizlazi iz međudjelovanja molekula koje dovodi do prijenosa impulsa s jednog mjesta na drugo. Ako sa $\boldsymbol{\phi}$ označimo brzinu izlaska impulsa kroz jediničnu površinu okomitu na jedinični vektor vanjske normale $\mathbf{n}$ na $\partial\Omega$, onda je

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina ulaska}\\ \text{impulsa molekularnim}\\ \text{transportom}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{brzina izlaska}\\ \text{impulsa molekularnim}\\ \text{transportom}\end{matrix}\right\} = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\phi}\;\mathrm{dS}.$$

Veličina $-\boldsymbol{\phi}$ ima dimenziju sile po jedinici površine i naziva se *kontaktna sila*. U mehanici kontinuuma se pokazuje da kontaktna sila nužno linearno ovisi o vektoru jedinične normale $\mathbf{n}$ (Cauchyjev teorem) te je stoga oblika

$$-\boldsymbol{\phi} = \mathbb{T}\mathbf{n}, \tag{1.5}$$

pri čemu tenzor $\mathbb{T}$ nazivamo *tenzor naprezanja*. Prema odabranom predznaku kontaktna sila $-\boldsymbol{\phi}$ predstavlja silu kojom materijal izvan Ω djeluje na materijal unutar Ω.

Oblik tenzora naprezanja i njegova veza s kinematičkim veličinama spada u konstitutivne zakone kojim se opisuju svojstva materijala koji se promatra. Konstitutivni zakoni po svojoj su prirodi uvijek aproksimativnog karaktera.

Tenzor naprezanja u (Newtonovom) fluidu uzima se u obliku

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \hat{\mathbb{T}}. \tag{1.6}$$

Prvi dio $-p\mathbb{I}$ dolazi od kaotičnog gibanja molekula i predstavlja silu kojom fluid djeluje u svim smjerovima: tlak. Drugi dio ovisi o gradijentu brzine gibanja i predstavlja efekt kohezionih sila među molekulama. Općenito se uzima u obliku

$$\hat{\mathbb{T}} = \mu(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^\tau) + (\kappa - \frac{2}{3}\mu)\,\mathrm{div}(\mathbf{v})\mathbb{I}. \tag{1.7}$$

Koeficijenti μ i κ se nazivaju *dinamička i dilatacijska viskoznost* i predstavljaju pozitivne veličine ($\mu \geq 0$ i $\kappa \geq 0$).

Napomena 2. *Ukupni tok impulsa jednak je*

$$\boldsymbol{\phi} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = -p\mathbf{n} + \hat{\mathbb{T}}\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}).$$

Označimo li silu po jedinici mase koja djeluje na fluid (volumna sila) s $\mathbf{f}$, onda je ukupna sila koja djeluje na kontrolni volumen jednaka

$$\left\{\begin{matrix}\text{djelovanje}\\ \text{vanjske sile}\\ \text{na fluid}\end{matrix}\right\} = \int_\Omega \rho\mathbf{f}\ \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Sada jednakost (1.3) možemo zapisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\mathbf{v}\ \mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_{\partial\Omega}\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\ \mathrm{dS} - \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\phi}\ \mathrm{dS} + \int_\Omega \rho\mathbf{f}\ \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Uzmimo u obzir (1.5) i (1.6) te primijenimo teorem o divergenciji. Izlazi

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\mathbf{v}\ \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})\ \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega}(p\mathbf{n} - \hat{\mathbb{T}}\mathbf{n})\ \mathrm{dS} = \int_\Omega \rho\mathbf{f}\ \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\mathbf{v}\ \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})\ \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \nabla p\ \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega \mathrm{div}(\hat{\mathbb{T}})\ \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \rho\mathbf{f}\ \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Pomoću teorema o lokalizaciji dolazimo do *diferencijalne jednadžbe gibanja* fluida:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) + \nabla p = \mathrm{div}(\hat{\mathbb{T}}) + \rho\mathbf{f}. \tag{1.8}$$

Napomena 3. *U mehanici materijalne točke iz zakona sačuvanja impulsa slijedi zakon sačuvanja momenta impulsa:*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F},$$

gdje je $\mathbf{r}$ *radij-vektor položaja materijalne točke, a* $\mathbf{F}$ *sila koja na nju djeluje. U mehanici kontunuuma zakon sačuvanja momenta impulsa nije u potpunosti posljedica zakona sačuvanja impulsa. Kada vrijedi zakon sačuvanja impulsa, zakon sačuvanja momenta impulsa ekvivalentan je simetriji tenzora naprezanja* $\mathbb{T}$ *(vidi [2]). Za Newtonov fluid simetrija je evidentno zadovoljena.*

Zadatak 1. *Dokažite da vrijedi*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) = \rho(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}).$$

1.3 Navier-Stokesove jednadžbe

Pogledajmo jednadžbe koje smo do sada uveli:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \mathrm{div}(\hat{\mathbb{T}}) + \rho \mathbf{f},$$
$$\mathbb{T} = \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^{\tau}) + (\kappa - \frac{2}{3}\mu)\,\mathrm{div}(\mathbf{v})\mathbb{I}.$$

Iz tog sustava ćemo eliminirati tenzot $\mathbb{T}$ uz pretpostavku da su vidkoznosti μ i κ konstantne što daje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{1.9}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + (\kappa + \frac{1}{3}\mu)\nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + \rho \mathbf{f}. \tag{1.10}$$

Jednadžbe (1.9)–(1.10) predstavljaju sustav od 4 parcijalne diferencijalne jednadžbe za 5 nepoznanica ρ, p i $\mathbf{v}$ (tri komponente). Imamo stoga jednu nepoznanicu suviše pa bi trebali ili naći dodatnu jednadžbu ili izraziti jednu od nepoznanica pomoću drugih.

Vezu između tlaka p i gustoće fluida dobivamo iz termodinamičkih relacija koje uključuju i treću varijablu: temperaturu (θ). Uključivanje temperature u sustav zahtijeva da uključimo još jednu diferencijalnu jednadžbu koja dolazi od zakona sačuvanja energije, te da uvažimo drugi zakon termodinamike. Budući da se time sustav znatno komplicira ovdje ćemo obratiti pažnju na jednostavniji *izotermni sustav* u kojem je temperatura fluida konstantan ($\theta = const$ u čitavoj domeni i za sva vremena). Takva je situacija česta u poroznoj sredini gdje temperaturu fluida konstantnom održava okružujuća stijena.

U izotermalnom slučaju temperatura je konstantna i termodinamičke relacije izražavaju gustoću fluida kao funkciju tlaka:

$$\rho = \rho(p). \tag{1.11}$$

To je dodatna jednadžba uz koju možemo "zatvoriti" sustav (1.9)–(1.9). Jednadžbama treba sada dodati rubne i početne uvjete kako bi imale jedinstveno rješenje.

Prije no što uvedemo rubne i početne uvjete uvest ćemo još jednu simplifikaciju koja je često moguća. Naime, pretpostavit ćemo da je fluid *nestlačiv* što znači da mu je gustoća mase neovisna o tlaku. Takva je pretpostavka realistična za mnoge tekućine čija je stlačivost vrlo mala (naročito za vodu) ukoliko tlak pod kojim se fluid nalazi nema ekstremnih varijacija. S druge strane, takva pretpostavka nije primijenjiva na plinove.

Ukoliko je fluid nestlačiv to još ne znači da je njegova gustoća nužno konstantna, budući da može postojati neka inicijalna nehomogenost gustoće mase koja se potom transportira s tokom. Mi ćemo takvu mogućnost ovdje zanemariti i pretpostaviti da je ρ konstantna. Time dolazimo do Navier-Stokesovih jednadžbi koje opisuju izotermno gibanje nestlačivog

Newtonovog fluida:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}. \tag{1.13}$$

Napomena 4. *Jednadžba (1.13) je zapisana u "konzervativnoj formi" koja je dobra za, npr. numeričku diskretizaciju konačnih volumena. Češće se koristi zapis*

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}. \tag{1.14}$$

Napomena 5. *Jednadžbe (1.9), (1.10) nazivamo kompresibilne Navier-Stokesove jednadžbe.*

Rubni uvjeti koji se postavljaju uz Navier-Stokesove jednadžbe su sljedeći:

- Na krutoj stijenci: $\mathbf{v} = 0$. Zbog viskoznosti dolazi do ljepljenja fluida za stijenku. Ako se stijenka giba, fluid ima brzinu stijenke. Ako je fluid neviskozan, onda treba uzeti slabiji rubni uvjet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, gdje je $\mathbf{n}$ normala na krutu stijenku.
- Na ulazni/izlaznoj granici se zadaje brzina: $\mathbf{v}$= zadano. Pri tome na ulaznoj granici treba još zadati i gustoću ulaznog fluida (ili njegov tlak).

Rezultati egzistencije, jedinstvenosti i korektnosti različitih zadaća za Navier-Stokesov sustav mogu se naći u [1].

Napomena 6. *Često nas zanima kako se neka veličina mijenja na trajektoriji čestice. Na primjer, neka je $c(\mathbf{x}, t)$ neko skalarno polje; tada je*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(\mathbf{x}(t), t) &= \frac{\partial c}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial c}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t), t) \frac{dx_i}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial c}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \cdot \nabla c(\mathbf{x}(t), t). \end{aligned}$$

Posve analogno se dobiva za svaku vektorsku funkciju $\mathbf{u}$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t).$$

Ovdje se vidi važnost diferencijalnih operatora

$$c \mapsto \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c, \quad \mathbf{u} \mapsto \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{v},$$

koji se nazivaju substancijalnom ili materijalnom derivacijom skalarne, odnosno vektorske, funkcije. One deriviraju polje duž trajektorije materijalne točke. U mehanici se tradicionalno označavaju s točkom ili s D/Dt:

$$\dot{c} = \frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c, \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{v},$$

Posebno nam materijalna derivacija brzine

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v},$$

dozvoljava pisanje Navier-Stokesove jednadžbe u obliku:

$$\rho\dot{\mathbf{v}} + \nabla p = \mu\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{f}.$$

Zadatak 2. *Pokažite da je materijalna derivacija linearan operator koji na skalarnim funkcijama ϕ i ψ, te na vektorskim funkcijama $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ zadovoljava:*

$$\frac{D}{Dt}(\phi\psi) = \dot{\phi}\psi + \phi\dot{\psi}, \quad \frac{D}{Dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) = \dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{w}}.$$

Napomena 7. *Neka je fluid u ravnoteži u polju sile teže. Tada je $\mathbf{v} = 0$ u čitavoj domeni fluida. Kako je $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ imamo jednadžbu $\nabla p = \rho\mathbf{g}$. Pretpostavimo prvo da je gustoća fluida konstantna. Tada dobivamo rješenje $p = \rho g z + const$, gdje smo os z orijentirali vertikalno prema gore. To je izraz za hidrostatski tlak. Možemo ga pisati u obliku*

$$\frac{p}{\rho g} + z = const,$$

u kome sve veličine imaju dimenziju duljine. Pri tome se u hidrologiji $p/\rho g$ naziva tlačna visina *(eng. pressure head), a izraz $p/\rho g + z$* piezometarska razina *(eng. piezometric head). U mirovanju je, dakle, piezometarska razina konstantna u čitavoj domeni fluida.*

U slučaju barotropnog fluida, kod koga je $\rho = \rho(p)$, treba definirati tlačnu visinu kao

$$H(p) = \int \frac{1}{g\rho(p)} dp,$$

a piezometarsku razinu kao $H(p) + z$. Zaključak je isti: piezometarska razina je konstantna u čitavoj domeni fluida.

Zadatak 3. *Promatramo stacionarni tok Newtonovog fluida s konstantnom gustoćom ρ. Neka je brzina fluida dovoljno mala da možemo zanemariti član $(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}$. Pokažite da je tada tlak harmonijska funkcija, tj. zadovoljava $\Delta p = 0$.*

Zadatak 4. *Promatramo stacionarni tok neviskoznog Newtonovog fluida ($\mu = 0$) s konstantnom gustoćom ρ. Pokažite da je tada zadovoljen* Bernoullijeva jednadžba

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = const.$$

Os z ovdje gleda vertikalno prema gore. Kako jednadžba glasi ako je $\rho = \rho(p)$?

Zadatak 5. *Odredite ravninski tok nestlačivog Newtonovog fluida u horizontalnoj pruzi* $\mathbb{R} \times (0, a)$. *Pretpostaviti da je brzina oblika* $\mathbf{v} = v_1(x_2)\mathbf{e}_1$ *i da je zadano* $Q = \int_0^a v_1(y)dy$. Rj.

$$v_1(x_2) = \frac{6Q}{a^3}(a - x_2)x_2, \quad p = -12\mu\frac{Q}{a^3}x_1 + const.$$

Riješite isti zadatak ako je pruga nagnuta pod kutem α *prema horizontali.*

Zadatak 6. *(*Hagen-Poiseuilleov tok*) Odredite ravninski tok nestlačivog Newtonovog fluida u ravnoj cjevčici kružnog presjeka radijusa* R, *u polju sile teže, pri čemu os cjevčice, označena sa* z, *gleda u smjeru ubrzanja sile teže* $\mathbf{g}$. *Izrazite brzinu i srednju brzinu po presjeku cjevčice kao funkcije gradijenta piezometarske visine. Uputa: brzinu tražiti u cilindričnom sustavu u obliku* $\mathbf{v} = v_z(r)\mathbf{k}$. Rj.

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial \phi}{\partial z}(R^2 - r^2), \quad \langle v_z \rangle = -\frac{R^2}{8\mu}\frac{\partial h}{\partial z}, \quad h = p - \rho g z.$$

Tlak je linearna funkcija od z.

Zadatak 7. *U prethodnom zadatku odredite silu po jedinici duljine cjevi kojom cijev djeluje na fluid.* Rj.

$$F = \pi R^2 \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Smjer je suprotan od smjera gibanja.

1.4 Zakon promjene mehaničke energije

Kao i u mehanici materijalne točke iz zakona sačuvanja impulsa (drugi Newtonov zakon) slijedi zakon sačuvanja energije. U mehanici kontinuuma pored kinetičke i potencijalne energije moramo uzeti u obzir i unutarnju energiju tijela koja dolazi od titranja molekula i mjeri se temperaturom tijela. Budući da zakon sačuvanja impulsa ne uključuje unutarnju energiju tijela, iz njega možemo izvesti samo zakon sačuvanja mehaničke energije tijela.

Množeći (1.8) brzinom $\mathbf{v}$ dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div}(\hat{\mathbb{T}}) \cdot \mathbf{v} + \rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

Uočimo da je primjenom jednadžbe kontinuiteta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho|\mathbf{v}|^2) + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2\frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho|\mathbf{v}|^2) - \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Jednostavnim računom dobivamo

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})|\mathbf{v}|^2 + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}).$$

Zbrajanjem slijedi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho|\mathbf{v}|^2)+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}+\rho\mathbf{v}\cdot\nabla(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2})\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho|\mathbf{v}|^2)+\operatorname{div}(\rho\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\mathbf{v}).
\end{aligned}
$$

Uz evidentne transformacije dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho|\mathbf{v}|^2)+\operatorname{div}(\rho\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\mathbf{v})+\operatorname{div}(p\mathbf{v})-\operatorname{div}(\hat{\mathbb{T}}\mathbf{v})\\
&\qquad\qquad = p\operatorname{div}\mathbf{v}-\hat{\mathbb{T}}\cdot\nabla\mathbf{v}+\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Član $p\operatorname{div}\mathbf{v}$ može biti pozitivan ili negativan, ovisno o tome radi li se o ekspanziji ili kompresiji fluida. Drugi član na desnoj strani je uvijek pozitivan:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbb{T}}\cdot\nabla\mathbf{v} &= \mu(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^\tau)\cdot\nabla\mathbf{v}+(\kappa-\frac{2}{3}\mu)\operatorname{div}(\mathbf{v})\mathbb{I}\cdot\nabla\mathbf{v}\\
&= \frac{1}{2}\mu(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^\tau)\cdot(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^\tau)+(\kappa-\frac{2}{3}\mu)(\operatorname{div}(\mathbf{v}))^2\\
&= \frac{1}{2}\mu|\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^\tau-\frac{2}{3}\operatorname{div}(\mathbf{v})\mathbb{I}|^2+\kappa(\operatorname{div}(\mathbf{v}))^2.
\end{aligned}
$$

Konačno, ako je vanjska sila potencijalna, $\mathbf{f}=-\nabla U$, $U=U(\mathbf{x})$ (potencijal ne ovisi o vremenu) onda primjenom jednadžbe kontinuiteta dobivamo

$$
\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}=-\frac{\partial}{\partial t}(\rho U)-\operatorname{div}(\rho U\mathbf{v}).
$$

Time dolazimo do jednadžbe:

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}+U))+\operatorname{div}(\rho(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}+U)\mathbf{v})+\operatorname{div}(p\mathbf{v})-\operatorname{div}(\hat{\mathbb{T}}\mathbf{v})=p\operatorname{div}\mathbf{v}-\hat{\mathbb{T}}\cdot\nabla\mathbf{v}. \tag{1.16}
$$

Ovdje se pojavljuje gustoća ukupne mehaničke energije $E_m=|\mathbf{v}|^2/2+U$. Interpretacija članova je sljedeća:

- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}+U))$ = brzina povećanja ukupne mehaničke energije po jedinici volumena;
- $-\operatorname{div}(\rho(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}+U)\mathbf{v})$ = brzina dodavanja ukupne mehaničke energije konvektivnim transportom po jedinici volumena;
- $-\operatorname{div}(p\mathbf{v})$ = brzina kojom okolina vrši rad nad fluidom kroz tlak;
- $\operatorname{div}(\hat{\mathbb{T}}\mathbf{v})$ = brzina kojom viskozne sile vrše rad nad fluidom;
- $p\operatorname{div}\mathbf{v}$ = brzina reverzibilne konverzije kinetičke energije u unutarnju energiju;

- $-\hat{\mathbb{T}} \cdot \nabla \mathbf{v}$ = brzina ireverzibilne konverzije kinetičke energije u unutarnju.

Uočimo da član $p \,\mathrm{div}\, \mathbf{v}$ može biti pozitivan i negativan, tj. može dodavati ukupnoj mehaničkoj energiji ili od nje oduzimati. Član $-\hat{\mathbb{T}} \cdot \nabla \mathbf{v}$, s druge strane, uvijek je negativan tj. on on umanjuje mehaničku energiju, konvertirajući ju u unutarnju energiju tijela.

Zadatak 8. *Veličina $\nu = 1/\rho$ naziva se specifični volumen (volumen po jedinici mase). Pokažite da je*

$$\dot{\nu} = \mathrm{div}\, \mathbf{v}.$$

1.5 Zakon sačuvanja energije

Ukupna energija tijela je zbroj kinetičke, potencijalne i unutarnje energije tijela. Pod unutarnjom energijom (ili toplinskom energijom) razumijevamo makroskopsku veličinu koja reprezentira kinetičku energiju molekula tijela računatu u koordinatnom sustavu koji se giba brzinom $\mathbf{v}$. Kako makroskopska brzina $\mathbf{v}$ predstavlja srednju vrijednost brzina molekula unutarnjoj energiji doprinose vibracije molekula oko te srednje vrijednosti. Unutarnja energija se zadaje svojom volumnom gustoćom e i pretpostavlja se da je ona funkcija tlaka i temperature tijela, $e = e(\rho, \theta)$.

U sljedećem ćemo računu ukupnom energijom zvati sumu unutarnje i kinetičke energije, a rad vanjskih sila ćemo ostaviti na desnoj strani jednadžbe, što dozvoljava i nekonzervativne sile.

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina}\\ \text{povećanja}\\ \text{ukupne}\\ \text{energije}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{brzina povećanja}\\ \text{ukupne energije}\\ \text{konvektivnim}\\ \text{transportom}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{brzina povećanja}\\ \text{unutarnje energije}\\ \text{molekularnim}\\ \text{transportom}\end{matrix}\right\}$$
$$+ \left\{\begin{matrix}\text{brzina vršenja}\\ \text{rada na sustavu}\\ \text{molekularnim}\\ \text{mehanizmima}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{brzina vršenja}\\ \text{rada na sustavu}\\ \text{vanjskim}\\ \text{silama}\end{matrix}\right\}. \tag{1.17}$$

Ukupna energija kontrolnog volumena je

$$\int_\Omega (\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e)\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

gdje smo s e označili gustoću unutarnje energije (po jedinici mase). Transport ukupne energije računamo kako je objašnjeno ranije:

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina povećanja}\\ \text{ukupne energije}\\ \text{konvektivnim}\\ \text{transportom}\end{matrix}\right\} = -\int_{\partial\Omega} (\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e)\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{dS}.$$

Molekularni transport toplinske energije modeliramo na ovaj način:

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina povećanja}\\ \text{unutarnje energije}\\ \text{molekularnim}\\ \text{transportom}\end{matrix}\right\} = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dS}$$

gdje je $\mathbf{q}$ *toplinski fluks*. Toplinski fluks je nova veličina koju moramo uvesti, slično kao što smo uveli kontaktno polje, kako bi opisali molekularni transport unutarnje energije.

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina vršenja}\\ \text{rada na sustavu}\\ \text{molekularnim}\\ \text{mehanizmima}\end{matrix}\right\} = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{dS} = \int_{\partial\Omega} \mathbb{T}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{dS}.$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{brzina vršenja}\\ \text{rada na sustavu}\\ \text{vanjskim}\\ \text{silama}\end{matrix}\right\} = \int_{\Omega} \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Time dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e)\ \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dS}&\\ + \int_{\partial\Omega}(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dS} - \int_{\partial\Omega}\mathbb{T}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{dS} &= \int_\Omega \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Lokalizacijom dolazimo dao jednadžbe za energiju:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e) + \mathrm{div}\left((\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e)\mathbf{v}\right) + \mathrm{div}(\mathbf{q}) - \mathrm{div}(\mathbb{T}\mathbf{v}) = \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v},$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e) + \mathrm{div}\left((\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e)\mathbf{v}\right) + \mathrm{div}(\mathbf{q}) + \mathrm{div}(p\mathbf{v}) \tag{1.18}$$

$$= \mathrm{div}(\hat{\mathbb{T}}\mathbf{v}) + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}. \tag{1.19}$$

Oduzimanjem zakona sačuvanja mehaničke energije (1.15) dobivamo jednadžbu za unutarnju energiju:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \mathrm{div}\,(\rho e\mathbf{v}) + \mathrm{div}(\mathbf{q}) = -p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \hat{\mathbb{T}}\cdot\nabla\mathbf{v}. \tag{1.20}$$

Vidimo da su disipativni članovi ponovo na desnoj strani, kao i u jednadžbi (1.16), ali sa suprotnim predznakom.

Dobivenu jednadžbu potrebno je upotpuniti konstitutivnim jednakostima koje određuju ponašanje matreija. Te jednakosti vežu unutarnju energiju s tri varijablama p, ρ i θ (tempe-ratira) i daju izraz za toplinski fluks. Sve one moraju biti odabrane tako da zadovoljavaju zakon entropije.

Za toplinski fluks se koristi Fourierov zakon:

$$\mathbf{q} = -k\nabla\theta, \tag{1.21}$$

gdje je koeficijent toplinske vodljivosti $k > 0$ jer toplina prijelazi s mjesta više na mjesto niže temperature. Kao najjednostavniji promjer ostalih konstitutivnih jednakosti je primjer idealnog plina u kojem se uzima da je

$$e = e(\theta) = c_v\theta, \quad \rho = C\frac{p}{\theta}.$$

U tom slučaju jednadžba (1.20) postaje

$$\rho c_v(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta) - k\Delta\theta = -p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \hat{\mathbb{T}}\cdot\nabla\mathbf{v},$$

gdje su koeficijenti c_v i k uzeti kao konstante. Ako zanemarimo viskoznost i kompresibilnost dolazimo do jednadžbe za temperaturu

$$\rho c_v(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta) - k\Delta\theta = 0,$$

koja nije vezana s ostatkom sustava.

1.6 Površinska napetost i Young-Laplaceov zakon

Kada se dva dovoljno različita fluida (kao npr. voda i zrak) nalaze u dodiru na provršini koja ih razdvaja dolazi do pojave *površinske napetosti*. Razlog za novu pojavu vezanu uz plohu razvajanja fluida nalazi se u različitim stanjima u kojima se nalaze molekule unutar fluida i na njegovoj površini. Rezultirajuća je sila koja dolazi od sila međumolekularnog djelovanja na molekulu u unutrašnjosti fluida jednaka nuli, budući da je svaka molekula ravnomjerno okružena drugim molekulama fluida. Na površini fluida ta je ravnoteža na-rušena i te dolazi do dvije pojave: 1) ploha razdvajanja nije ravna već dobiva određenu zakrivljenost; 2) ploha razdvajanja djeluje kao napeta membrana.

Posljedice površinske napetosti su brojne (kao npr. sposobnost nekih kukaca da hodaju po vodi) i imaju veliku važnost u brojnim fizikalnim pojavama, a posebno u gibanju fluida kroz poroznu sredinu.

Površinska napetost je rezultat molekularnog djelovanja i stoga ju na makroskopskoj razini modeliramo kontaktnom silom. Budući da kontaktna sila djeluje između molekula na površini razdvajanja fluida, površinska kontaktna sila se definira kao sila po jedinici duljine kojom materijal je jedne strane zamišljene krivulje na plohi razdvajanja djeluje na materijal s druge strane te krivulje. Kao i kod kontakne sile koja djeluje unutar tijela (kao sila po jedinici površine) zaključujemo da kontakta sila na plohi razdvajanja ovisi samo o normali na krivulju na kojoj ju promatramo.

Označimo sa $\mathcal{S}$ plohu razdvajanja dvaju fluida (fluidi 1 i 2) i $\mathbf{n}$ normalu na tu plohu koja gleda iz fluida 1 u fluid 2. Neka je $\gamma \subset \mathcal{S}$ bilo koja zatvorena krivulja na plohi $\mathcal{S}$ koja omeđuje dio plohe $\mathcal{S}_\gamma \subset \mathcal{S}$. Kontaktna sila na krivulji γ je oblika $\sigma \mathbf{n}_{\gamma,\mathcal{S}}$, gdje je $\mathbf{n}_{\gamma,\mathcal{S}}$ (vanjska) normala na krivulju γ koja leži u tangencijalnoj ravnini plohe $\mathcal{S}$; σ je *konstanta* koja predstavlja površinsku napetost i mjeri se u sili po jedinici duljine. Ukupna je sila površinske napetosti na komad plohe $\mathcal{S}_\gamma \subset \mathcal{S}$ jednaka

$$\int_\gamma \sigma \mathbf{n}_{\gamma,\mathcal{S}}\, ds = \sigma \int_\gamma \mathbf{n}_{\gamma,\mathcal{S}}\, ds.$$

Evidentno je da rezultantna sila površinskog naprezanja ima komponentu normalnu na plohu razdvajanja ukoliko ona nije ravna. Kako u smjeru normale na na plohu separacije djeluju tlakovi fluida dolazimo do zaključka da tlakovi fluida u dodiru, u ravnoteži, moraju biti ekvilibrirani sa silom površinske napetosti. To ima sljedeći posljedicu:

- Ako je ploha razdvajanja dvaju fluida zakrivljena, onda tlakovi u fluidima, s dvije strane plohe razdvajanja nisu jednaki. Razlika tih tlakova uravnotežuje silu površinske napetosti na plohi razdvajanja. Drugim riječima, tlak je diskontinuiran pri prijelazu iz jednog fluida u drugi.

Razlika tlakova u fluidima u kontaktu ovisit će o zakrivljenosti separacijske plohe. Izvest ćemo tu zavisnost u pojednostavljenom slučaju kada je ploha razdvajanja sfere.

Odaberimo proizvoljnu točku na $P \in \mathcal{S}$ na sferi $\mathcal{S}$ koja razdvaja fluide 1 i 2, i pretpostavimo da je radijus sfere jednak R. Koordinatnu os z stavimo s ishdištem u centru sfere, tako da prolazi kroz točku P (vidi Sliku 1.1). Odaberimo na sferi $\mathcal{S}$ kružnicu $\gamma_r \subset \mathcal{S}$, radijusa r, koja leži u ravnini okomitoj na os z, tj. na spojnicu centra sfere i točke P, i ima centar na osi z. Ta kružnica omeđuje sfernu kapicu centriranu u točki P koju ćemo označiti sa $\mathcal{S}_r$.

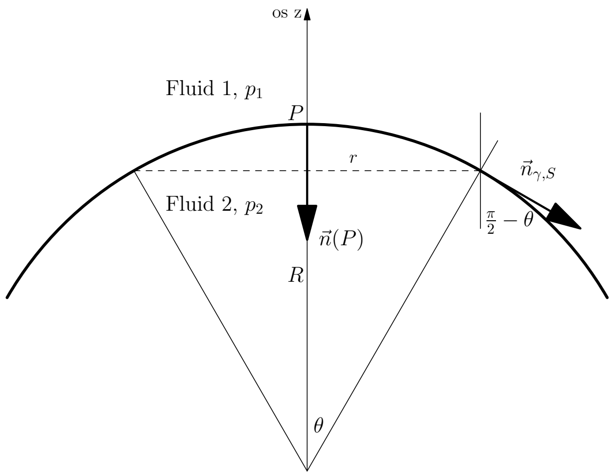
Neka je $\mathbf{n}$ normala na sferu. Tada se ravnoteža sila na sfernoj kapici $\mathcal{S}_r$ može zapisati u obliku:

$$\int_{\mathcal{S}_r} (p_2 - p_1)\mathbf{n}\, \mathrm{dS} = \int_{\gamma_r} \sigma \mathbf{n}_{\gamma,\mathcal{S}} ds. \tag{1.22}$$

Prema definiciji kontaktne sile (kao sile koja djeluje s pozitivne strane plohe - one na koju pokazuje jedinična normala - na materijal na negativnoj strani) ako je p_1 tlak izvan kugle, a p_2 tlak unutar kugle, onda treba uzeti normalu koja gleda prema središtu kugle.

Prijelazom na limes u (1.22), kada $r \to 0$, dobivamo traženi odnos tlakova i površinske npetosti u točki P. Stoga prvo aproksimirajmo integral na lijevoj strani,

$$\mathbf{n}(P) \cdot \int_{\mathcal{S}_r} (p_1 - p_2)\mathbf{n}\, \mathrm{dS} \approx (p_1(P) - p_2(P))|\mathcal{S}_r| = (p_2(P) - p_1(P))\pi r^2 + O(r^3),$$



Slika 1.1: Pojednostavljeni dolaz Laplace-Youngova zakona.

dok desni integral možemo izračunati:

$$\mathbf{n}(P)\cdot\int_{\gamma_r}\sigma\mathbf{n}_{\gamma,\mathcal{S}}ds = 2r\pi\sigma\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = 2r\pi\sigma\sin\theta,$$

gdje je $\mathbf{n}(P)\cdot\mathbf{n}_{\gamma,\mathcal{S}} = \sin\theta$ i θ je kut iz odnosa $\sin\theta = r/R$. Time smo dobili

$$(p_2(P)-p_1(P))\pi r^2 + O(r^3) = 2r\pi\sigma\sin\theta,$$

ili

$$(p_2(P)-p_1(P))\pi + O(r) = 2\pi\sigma\frac{\sin\theta}{r} = 2\pi\frac{\sigma}{R}.$$

Prijelazom na limes kada $r\to 0$ dobivamo

$$p_2 - p_1 = \frac{2\sigma}{R}.$$

To je specijalan slučaj Young-Laplaceovog zakona. Uočimo da je $1/R$ *zakrivljenost* sfere radijusa R. Kako je izraz na desnoj strani pozitivan vidimo da je tlak p_2 veći od tlaka p_1, što je u skladu s geometrijskom konfiguracijom.

Da bi se ovaj zakon generalizirao na proizvoljnu plohu razdvajanja između dva fluida porebno je upotrijebiti alat diferencijalne geometrije. Sam generalizacija je vrlo prirodna: Za proizvoljnu plohu Young-Laplaceovog zakon glasi

$$p_2 - p_1 = 2\sigma H, \tag{1.23}$$

gdje je σ površinska napetost, a H je srednja zakrivljenost plohe. Jednakost vrijedi u svakoj točki separacije dva fluida.

Ostaje nam još objasniti pojam srednje zakrivljenosti plohe u nekoj točki. Uzmimo da se ploha $\mathcal{S}$ može lokalno, u okolini točke P, u nekom pravokutnom koordinatnom sustavu prikazati parametrizacijom $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$. Tako nešto je moguće za svaku glatku plohu, te neka je $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ za neki par (u_0, v_0). Uzimajući u (u, v) ravnini pravce oblika $(v - v_0) = \alpha(u - u_0)$, koji prolaze kroz (u_0, v_0), dobivamo krivulje na plohi $\mathcal{S}$ koje prolaze kroz točku P. Svaka takva krivulja γ_α ima svoju zakrivljenost κ_α i glavnu normalu $\mathbf{n}_\alpha$ koje su definirane kao

$$\mathbf{n}_\alpha = \rho_\alpha \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \quad \kappa_\alpha = |\frac{d\mathbf{t}}{ds}|, \quad \rho_\alpha = 1/\kappa_\alpha,$$

gdje je $\mathbf{t}$ vektor jedinične tangente na krivulju, parametriziran duljinom luka krivulje s (tzv. prirodna parametrizacija krivulje). Glavna normala na krivulju $\mathbf{n}_\alpha$ ne mora nužno ležati u tangencijalnoj ravnini plohe na kojoj se krivulja nalazi (osim ako krivulja nije ravninska) pa stoga ima komponentu u smjeru normale na plohu. Stoga definiramo normalnu zakrivljenost krivulje γ_α

$$\kappa_{\alpha,\mathcal{S}} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{n} = \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n} = \kappa_\alpha \cos\phi_\alpha,$$

gdje je ϕ_α kut između normale na plohu $\mathcal{S}$ i glavne normale na krivulju $\mathbf{n}_\alpha$. Recipročna vrijednost normalne zakrivljenosti je radijus normalne zakrivljenosti.

Kada se promatra u točki P zakrivljenost $\kappa_{\alpha,\mathcal{S}}$ kao funkciju smjera α onda se pokazuje da postoje dva smjera u kojima zakrivljenost postiže minimalnu, odnosno maksimalnu vrijednost. Pripadni smjerovi se nazivaju glavnim smjerovima, a pripadni radijusi zakrivljenosti se označavaju obično s R_1 i R_2 i nazivaju glavnim radijusima zakrivljenosti plohe u danoj točki. Srednja zakrivljenost plohe se tada definira kao

$$H = \frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}),$$

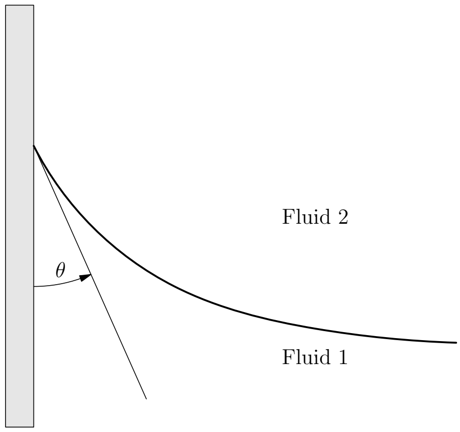
i Young-Laplaceov zakon se najčešće zapisuje u obliku

$$p_2 - p_1 = \sigma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}). \tag{1.24}$$

Napomena 8. *Srednja zakrivljenost plohe je invarijanta plohe. Ona ne ovisi o načinu uvođenja lokalnog koordinatnog sustava kojim se parametrizira ploha. Nadalje, pokazuje se da su glavni smjerovi međusobno okomiti i da je suma zakrivljenosti u proizvoljna dva ortogonalan smjera jednaka sumi zakrivljenosti u glavnim smjerovima, tj.* $2H$.

Napomena 9. *Kontaktna sila ima jedinicu sila/duljina, što je isto kao energija/površina. Pokazuje se da plohi razdvajanja fluida možemo pridružiti energiju koja je proporcionalna površini plohe, a* σ *je konstantna proporcionalnosti. U ravnoteži tada kontaktna ploha zauzima položaj minimalne energije, a to je položaj minimalne površine. Kapljica vode u zraku je stoga uvijek sferična (ako zanemarimo uthecaj sile teže). Young-Laplaceov zakon se, jednako tako, može izvesti polazeći od principa minimizacije energije.*

Neka se dva fluida razdvojena kontaktnom plohom nalaze u zatvorenoj posudi i neka se kontaktna ploha proteže sve do stijenke posude. U svakoj točki dodira dva fluida i krute stijenke sve sile površinskih naprezanja moraju biti uravnotežene. Pri tome moramo



Slika 1.2: Kut vlaženja između krute stijenke i fluida 1.

računati sa silama površinskog naprezanja između fluida 1 i 2, između fluida 1 i krute stijenke te između fluida 2 i krute stijenke. Bitna veličina koja određuje ravnotežnu konfiguraciju je **kut vlaženja** (ili kut močenja) θ. Radi se o kutu koji zatvara razdijelna ploha fluida s krutom stijenkom, a mjeri se kroz fluid veće gustoće mase (vidi Sliku 1.2).

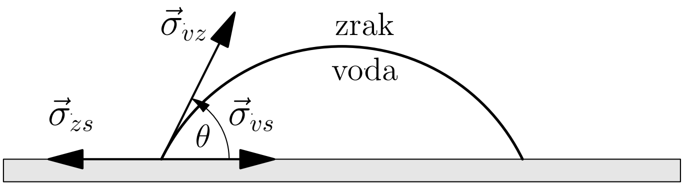
Uzmimo primjer kontakta vode, zraka i krute stijenke. Označimo pripadne površinske napetosti sa σ_{vz}, σ_{zs} i σ_{vs} (v=voda, z=zrak, s=stijenka). Kut vlaženja θ mjerimo kroz vodu. U ravnoteži mora vrijediti:

$$\sigma_{vz}\cos\theta = \sigma_{zs} - \sigma_{vs},$$

pa vidimo da je kut vlaženja posve određen površinskim napetostima. Ako je $\theta < \pi/2$, onda kažemo da fluid kroz koji mjerimo kut (voda u ovom primjeru) **vlaži stijenku**. U suprotnom ju ne vlaži, već je drugi fluid (plin) vlažeći. (U sustavu plin-voda, voda je redovito vlažeći fluid.)

Ravnotežna konfiguracija nije moguća ako je $|\sigma_{zs} - \sigma_{vs}|/\sigma_{vz} > 1$. Takva je situacija npr. u slučaju kontakta vode, nafte i zraka. Ovdje imamo tri fluida od kojih je voda najveće gustoće, zatim nafta te onda zrak. Kapljice nafte se ne mogu formirati na vodi zbog odnosa površinskih napetosti koji je takav da je $|\sigma_{zv} - \sigma_{vn}|/\sigma_{zn} > 1$. U tom slučaju se nafta prostire po površini vode sve dok ne stvori mikroskopski mali sloj nafte na površini vode.

Stvaranje jasne plohe razgraničenja između dva fluida ovisi o svojstvima tih fluida. Generalno govorimo o **nemješivim fluidima** ako je površinska napetost među njima dovoljno



Slika 1.3: Ravnoteža sila u točki dodira triju faza.

velika da formira jasnu granicu koja ih separira. U suprotnom govorimo o mješivim fluidima. Voda i zrak, voda i nafta, nafta i plin su parovi nemješivih fluida. S druge strane, postoje parovi kao što su voda i alkohol koji su potpuno mješivi i između njih ne dolazi do formiranja plohe razdvajanja. Među plinovima također ne dolazi do pojave površinske napetosti već se oni mješaju u svim omjerima.

Kada imamo par nemješivih fluida, ond aje redovito jedan od njih vlažeći, a drugu nevlažeći. Vlažeći je onaj fluid koji ima kut močenja manji od $\pi/2$ (mjeren kroz taj fluid). Ta su svojstva važna za ponašanje smjese fluida u poroznoj sredini. Konačno, skok tlaka pri prijelazu kroz granicu dvaju nemješivih fluida dan je Young-Laplaceovim zakonom (1.24) u kome se razlika tlakova $p_2 - p_1$ naziva kapilarni tlak.

Zadatak 9. *Otvorena tanka cjevčica dijametra a uronjena je u bazen vode gustoće ρ. Voda se u cjevčici izdigla za visinu h i primijećuje se kut vlaženja $\theta < \pi/2$ vode na stijenki cjevčice. Izračunajte površinsku napetost vode.* Rj. $\sigma = \rho g h a/(4\sin\theta)$.

Bibliografija

[1] I. Straškraba A. Novotný. *Introduction ti the Mathematical Theory of Compressible Flow.* Oxford, University Press, Oxford, 2004.

[2] Ibrahim Aganović. *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma.* Element, Zagreb, 2003.

[3] Edwin N. Lightfoot R. Byron Bird, Warren E. Stewart. *Transport Phenomena.* John Wiley & Sons, New York, 2002.