Poglavlje 1

Dvofazni nemješivi tok

U ovom poglavlju promatramo poroznu sredinu u kojoj dva različita fluida ispunjavaju čitav porni prostor. Pretpostavljamo da na granici između fluida djeluje sila površinske napetosti koja ne dozvoljava miješanje fluida. Unutar svake pore tada postoji dobro definirana granica koja separira fluide pa za takve fluide kažemo da su *nemješivi* (eng. *immiscible*), odnosno govorimo da je tok fluida nemješiv. Fluide koji su međusobno separirani granicom nazivamo *fazama*. Tipični primjeri nemješivih sustava su sustavi nafta-voda i voda-zrak.

Kada između dva fluida nema površinske napetosti, tada među njima neće postojati niti dobro definirana granica. Ako u inicijalnom trenutku takva granica i postoji, molekule fluida će se početi miješati pod utjecajem molekularne difuzije i u konačnom vremenu granica između fluida će nestati. Za takve fluida kažemo da su *mješivi*, odnosno govorimo o mješivom toku. Njima smo se bavili u prethodnom poglavlju.

U ovom se poglavlju bavimo dvofaznim nemješivim tokom što znači da ćemo broj faza reducirati na samo dvije. Na analogan se način može tretirati i tok s više od dvije faze, na primjer, trofazni tok vode, nafte i plina. Poteškoće koje se javljaju u modeliranju trofaznog (i višefaznog) toka vezane su uz definiciju svojstava fluida, kao što su relativne propusnosti i kapilarni tlakovi, dok se diferencijalne jednadžbe formiraju lako na osnovi zakona sačuvanja mase i Darcyjevog zakona. Model trofaznog toka ćemo obraditi u sljedećem poglavlju.

Između različitih faza u dvofaznom i višefaznom toku može dolaziti izmjene mase, odnosno neka komponenta može prelaziti iz jedne u drugu fazu. Na primjer, u sustavu vode i zraka, zrak se otapa u vodi, a voda isparava. Plinovita se faza tada sastoji od smjese zraka i vodenih para, a tekuća od vode i otopljenog zraka. Svaka od dviju faza ponaša se kao smjesa fluida pri čemu difuzija može igrati značajnu ulogu, a prijelaz iz tekućeg u plinovito stanje, i obratno, reguliran je zakonima termodinamike. U ovom poglavlju ćemo takve izmjene mase među fazama zanemariti, što je u mnogim praktičnim situacijama korektno, i promatrat ćemo samo one aspekte sustava koji nisu vezani uz izmjene mase među fazama.

1.1 Zasićenja

U makroskopskom modelu porozne sredine svaka točka predstavlja konačan volumen porozne sredine. Stoga su u svakoj točki *makroskopskog* modela istovremeno prisutni različiti fluidi.

Označimo privremeno dvije faze indeksima 1 i 2. Da bismo opisali količinu pojedine faze u nekoj točki makroskopskog modela uvedimo sljedeće oznake. Prostorna domena koja predstavlja kontrolni volumen u nekoj točki $\mathbf{x}$ neka je označena s $\mathcal{V}$, a njen volumen s V. Dio domene $\mathcal{V}$ koji čini porni prostor neka je $\mathcal{V}_p$, a njen volumen V_p. S $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2$, označavamo podskup od $\mathcal{V}_p$, koji zauzima i-ta faza, dok je V_i pripadni volumen. Imamo

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2, \quad V_p = V_1 + V_2.$$

Zasićenja (eng. *saturations*) faza 1 i 2 su varijable S_1 i S_2, definirane formulama

$$S_1 = \frac{V_1}{V_p}, \quad S_2 = \frac{V_2}{V_p}.$$

Očito se radi o makroskopskim veličinama koje su dobro definirane na prostornoj skali znatno većoj od karakteristične dimenzije pora (kao i Darcyjev zakon). Imamo

$$S_1 + S_2 = 1 \quad \text{i} \quad S_i \geq 0 \quad \text{za} \quad i = 1, 2. \tag{1.1}$$

Napomena 1. *U hidrologij se za mjerenje količine pojedine faze češće upotrebljavaju varijable*

$$\theta_1 = \frac{V_1}{V}, \quad \theta_2 = \frac{V_2}{V}. \tag{1.2}$$

Evidentno je $\theta_i = \Phi S_i$; ako je prva faza voda, onda se θ_1 naziva vlažnost *(ili sadržaj vode, eng.* water content*).*

1.2 Kapilarni tlak

Obratimo sada pažnju na mikroskopsku sliku porozne sredine. Dva fluida u dodiru separirani su zakrivljenom plohom čiji je oblik određen silom površinske napetosti odnosno Young-Laplaceovim zakonom. Pokazuje se da uspostavljena granica ima minimalnu površinu. U točki u kojoj ploha separacije dodiruje čvrstu fazu definira se *kut vlaženja* θ, kao kut između plohe čvrste faze i plohe separacije fluida. Kada je za jedan fluid taj kut $< 90^o$ onda kažemo da je taj fluid *vlažeći* (*wetting fluid*); u suprotnom fluid je *nevlažeći* (*nonwetting*). Vlažeći fluid ima više afiniteta prema stijenki porozne sredine što bitno karakterizira sustav. U sustavima voda-zrak, voda-nafta ili voda-plin, voda je obično vlažeća faza. U sustavu nafta-plin to je obično nafta.

Uobičajeno je faze u dvofaznom sustavu označavati indeksima w (=wetting) i n (=nonwetting) umjesto 1 i 2, kako bi se razlikovala vlažeća i nevlažeća faza. Tu ćemo konvenciju i mi nadalje koristiti.

Pri prolazu kroz plohu separaciju dviju faza tlak trpi skok koji je određen *Laplaceovim zakonom* (vidi sekciju ,. . .):

$$p_n - p_w = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \tag{1.3}$$

gdje su p_n i p_w tlakovi na granici separacije, s nevlažeće i vlažeće strane, σ je površinska napetost, dok su R_1 i R_2 glavni radijusi zakrivljenosti plohe separacije.

U makroskopskom modelu nema granice između dviju faza. U svakoj točki prostora imamo tlakove vlažeće i nevlažeće faze, p_w i p_n, koji predstavljaju srednje vrijednosti tih tlakova po elementarnom reprezentativnom volumenu koji sadrži obje faze. Makroskopski kapilarni tlak p_c je razlika makroskopskih tlakova $p_n - p_w$ i predstavlja srednju vrijednost mikroskopskog kapilarnog tlaka.

U makroskopskim modelima makroskopski kapilarni tlak se zadaje kao funkcija zasićenja jednom fazom, na primjer vlažećom:

$$p_c(S_w) = p_n - p_w, \tag{1.4}$$

Da bismo pojasnili tu zavisnost razmotrimo poroznu sredinu inicijalno zasićenu vodom (vlažeća faza), u koju prodire zrak (nevlažeća faza). Zrak će prvo ući u najveće pore jer tamo treba svladati najmanji kapilarni tlak. Kako se količina zraka u poroznoj sredini povećava, on će ulaziti u sve manje i manje pore u kojima je kapilarni tlak veći. Stoga pri većoj koncentraciji nevlažeće faze srednji kapilarni tlak mora biti veći. Na taj način dobivamo funkcionalnu zavisnost između (makroskopskog) kapilarnog tlaka i zasićenja koja karakterizira "distribuciju pora u odnosu na njihovu veličinu".

Makroskopski kapilarni tlak će ovisiti i o nekim drugim varijablama kao što je temperatura i kemijski sastav faza, no u najvećem broju promjena se uzima da je funkcija jedino od zasićenja. Ta se funkcija može eksperimentalno mjeriti tako da se na uzorku porozne sredine provede proces *ocjeđivanja* (istiskivanja vlažeće faze nevlažećom), kao u našem zamišljenom eksperimentu, ili da se izvede obrnuti proces *vlaženja* odn. istiskivanja nevlažeće faze pomoću vlažeće. Dva procesa će općenito dati različite krivulje kapilarnog tlaka, odnosno krivulja kapilarnog tlaka pokazuje *histerezu*.

Kapilarni tlak mora biti pozitivan, jer je tlak u nevlažećem fluidu uvijek veći nego u vlažećem, a ako ga promatramo kao funkciju zasićenja vlažećom fazom, onda mora biti monotona padajuća funkcija. Kada je zasićenje vlažećom fazom vrlo malo ona zauzima samo najmanje pore i kapilarni tlak je vrlo velik. U krajnjem slučaju vlažeća faza neće biti potpuno istisnuta nevlažećom fazom već će jedan dio te faze ostati prisutan u obliku tankog sloja fluida oko zrnaca porozne sredine i slobodnih kapljica. To krajnje zasićenje nazivamo *rezidualnim zasićenjem* vlažeće faze S_{wr}. Nikakvo povećanje tlaka nevlažeće faze neće istisnuti rezidualnu količinu vlažećeg fluida. Kada se S_w približava rezidualnoj vrijednosti S_{wr} velika povećanja kapilarnog tlaka imaju za posljedicu neznatno smanjenje zasićenja S_w. Funkcija kapilarnog tlaka $p_c(S_w)$ ima u stoga S_{wr} vertikalnu asimptotu.

Jednako tako, moguća je situacija u kojoj proces vlaženja neće moći istisnuti u potpunosti nevlažeću fazu iz porozne sredine. Na primjer, voda koja se utiskuje u naftna ležišta ne može nikada u potpunosti istisnuti naftu. To znači da postoji određeno rezidualno zasićenje nevlažećom fazom S_{nr} ispod kojeg se S_n ne može spustiti. To znači da je funkcija kapilarnog tlaka prirodno definirana na intervalu $(S_{wr}, 1 - S_{nr}]$. Uobičajeno je stoga uvesti *reducirana zasićenja*:

$$\overline{S}_w = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{nr}}, \quad \overline{S}_n = \frac{S_n - S_{nr}}{1 - S_{wr} - S_{nr}}, \tag{1.5}$$

koja se uvijek nalaze između 0 i 1 i zadaovoljavaju $\overline{S}_w + \overline{S}_n = 1$. Kapilarni tlak se često definira kao funkciju reduciranog zasićenja.

Još jedna važna karakteristika kapilarne krivulje je postojanje tzv. *ulaznog tlaka* (eng. *bubbling pressure*). Naime, kada je sredina posve zasićena vlažećom fazom potrebno je da nevlažeća faza ima dovoljano veliki tlak kako bi mogla ući u poroznu sredinu. Taj je tlak određen veličinom pora, koje određuju radijuse zakrivljenosti plohe dodira fluida, i njihovom distribucijom. Ta se činjenica odražava na kapilarnu krivulju u obliku određenog skoka kapilarnog tlaka pri $S_w = 1$. Da bi nemočiva faza ušla u sredinu u iole značajnijoj količini potrebno je da kapilarni tlak poraste do veličine koja dozvoljava ulazak u najveće pore.

Kapilarni tlak se može dobiti laboratorijskim mjerenjima. Budući da su mjerenja skupa i dugotrajna u praksi se koriste razne teorijski izvedene formule, koje sadrže nekoliko parametara za prilagođavanje eksperimentalnim podacima. Za sustav vode i plina koristi se često *Van Genuchtenova* model kapilarnog tlaka

$$p_c(S_w) = \frac{1}{\alpha}\left(\overline{S}_w^{-1/m} - 1\right)^{1/n}, \tag{1.6}$$

gdje je $n = 2, \ldots, 5$ i $m = 1 - 1/n$. Primer za $\alpha = 0.4$ dan je na Slici 1.1.

Drugi model koji se često koristi u hidrologiji je Brooks-Coreyev model u kome je kapilarni tlak dan formulom

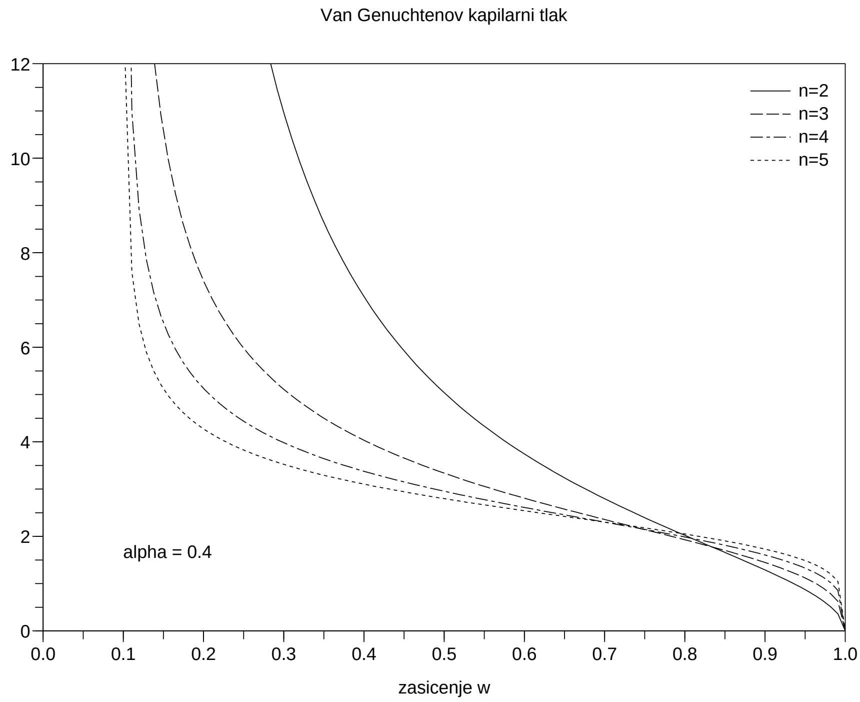
$$p_c(S_w) = P_e(\overline{S}_w)^{-1/l}, \tag{1.7}$$

koja ponovo ima dva parametra P_e (ulazni tlak) i eksponent $l > 0$. Primjer je dan na slici 1.2.

1.3 Relativne propusnosti

Eksperimentalno je potvrđeno da Darcyjev zakon ostaje vrijediti i u slučaju toka više različitih fluida kroz poroznu sredinu. Budući da prisutnost drugih fluida sprječava u toku prvi fluid, propusnost sredine za prvi fluid se smanjuje u ovisnosti o prisutnosti ostalih fluida (što je veća količina drugih fluida propusnost je manja). Stoga generalizirani Darcyjev zakon ili Darcy–Muskatov zakon, za dvofazni sustav, dobiva sljedeću formu:

$$\mathbf{q}_w = -\mathbb{K}\frac{kr_w}{\mu_w}\left(\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g}\right), \tag{1.8}$$



Slika 1.1: Primjer četiri Van Genuchtenove krivulje kapilarnog tlaka

$$\mathbf{q}_n = -\mathbb{K}\frac{kr_n}{\mu_n}\left(\nabla p_n - \rho_n \mathbf{g}\right), \tag{1.9}$$

gdje su:

- $\mathbf{q}_w, \mathbf{q}_n$, Darcyjeve brzine vlažeće i nevlažeće faze;
- μ_w, μ_n viskoznosti faza;
- ρ_w, ρ_n gustoće faza;
- kr_w, kr_n **relativne propusnosti** faza.

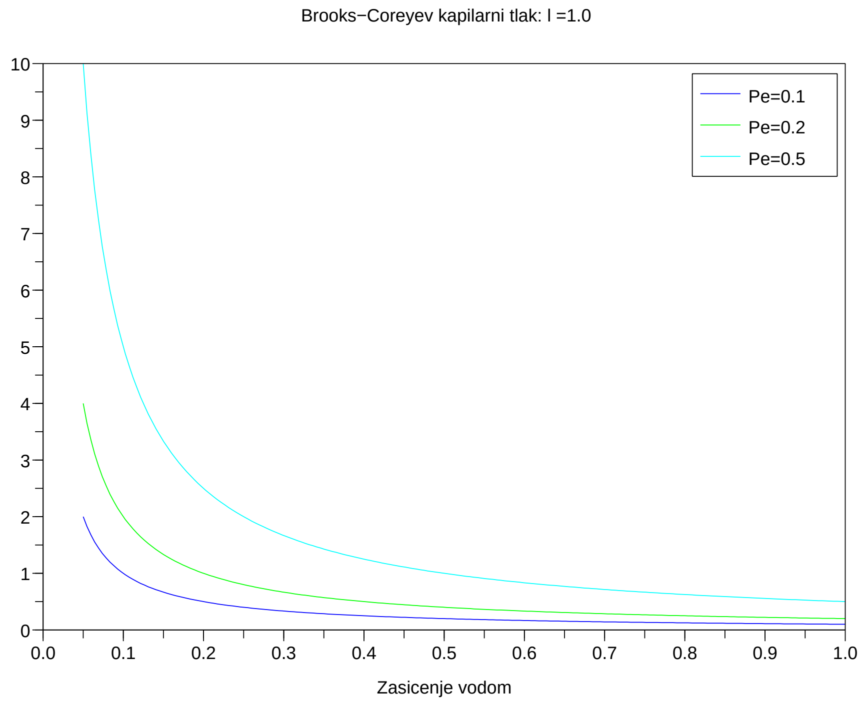
Relativne propusnosti su funkcije koje karakteriziraju poroznu sredinu i fluide te imaju sljedeća svojstva:

$$kr_w = kr_w(S_w), \quad kr_n = kr_n(S_n),$$

$$0 \leq kr_w \leq 1, \quad 0 \leq kr_n \leq 1.$$

Obje funkcije su rastuće u svom zasićenju, što modelira činjenicu da je faza to mobilnija što je prisutnija u poroznoj sredini.

Kao i funkcija kapilarnog tlaka, tako se i relativne propusnosti najčešće zadaju kao funkcije reduciranog zasićenja. Na primjer, van Genuchtenove relativne propusnosti su



Slika 1.2: Primjer tri Brooks-Coreyeve krivulje kapilarnog tlaka

zadane formulama:

$$kr_w(S) = \sqrt{\overline{S}_w}\left[1 - \left(1 - \overline{S}_w^{1/m}\right)^m\right]^2, \tag{1.10}$$

$$kr_g(S) = \sqrt{1 - \overline{S}_w}\left[1 - \overline{S}_w^{1/m}\right]^{2m}. \tag{1.11}$$

Parametri m i n isti su kao u izrazu za tlak.

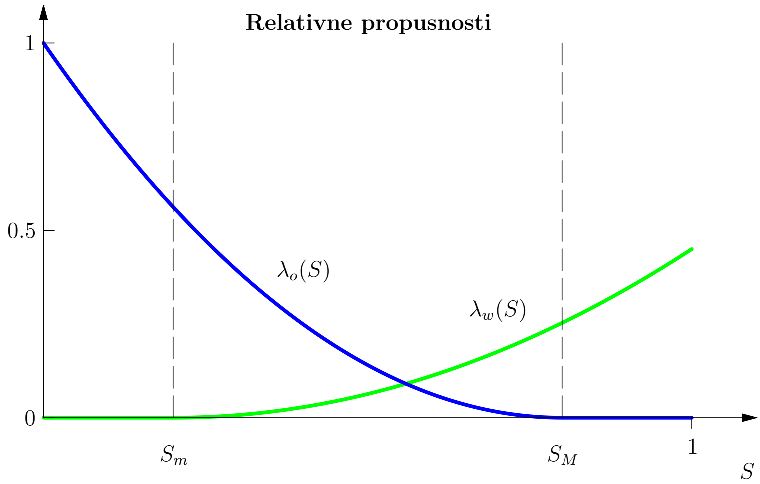
Uz Brooks-Coreyev tlak postoje i Brooks-Coreyeve relativne propusnosti koje su dane sljedećim formulama:

$$kr_w(S) = \overline{S}_w^{\frac{2+3l}{l}}, \tag{1.12}$$

$$kr_g(S) = (1 - \overline{S}_w)^2(1 - \overline{S}_w^{\frac{2+l}{l}}). \tag{1.13}$$

Parametar l je isti kao u izrazu za tlak.

Primjer relativnih propusnosti dan je na Slici 1.3.



Slika 1.3: Relativne propusnosti u zavisnosti o zasićenju vlažeće faze

1.4 Zakoni sačuvanja

Zakon sačuvanja mase treba zapisati za svaku fazu posebno budući da ovdje ne pretpostavljamo da se faze sastoje od različitih komponenti. Napišimo dva zakona sačuvanja u generalnoj formi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi S_w \rho_w) + \mathrm{div}(\rho_w \mathbf{q}_w) + f_{w->n} = \mathcal{F}_w \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi S_n \rho_n) + \mathrm{div}(\rho_n \mathbf{q}_n) + f_{n->w} = \mathcal{F}_n. \tag{1.15}$$

Ovdje je $f_{w->n}$ masa vlažećeg fluida koja u jedinici vremena prijeđe iz faze w u fazu n. Analogno, $f_{n->w}$ je masa nevlažećeg fluida koja u jedinici vremena prijeđe iz faze n u fazu w. Očito mora vrijediti

$$f_{w->n} = -f_{n->w}. \tag{1.16}$$

U slučaju bez izmjene mase između faza, koji ovdje promatramo, imamo

$$f_{w->n} = f_{n->w} = 0.$$

Na desnoj strani u jednadžbi (1.14) i (1.15) imamo sumu izvora i ponora pojedinih faza.

1.5 Nestlačivi tok i reformulacija pomoću globalnog tlaka

Posebno je jednostavna situacija kada je porozna sredina kruta, $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$, i kada su gustoće i viskoznosti fluida konstantne. Tada možemo djelomično eliminirati gustoće iz zakona sačuvanja i napisati jednadžbe u ovom obliku:

$$\Phi\frac{\partial S_w}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{q}_w) = \mathcal{F}_w/\rho_w \tag{1.17}$$

$$\Phi\frac{\partial S_n}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{q}_n) = \mathcal{F}_n/\rho_n \tag{1.18}$$

$$\mathbf{q}_w = -\mathbb{K}\frac{kr_w(S_w)}{\mu_w}(\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g}) \tag{1.19}$$

$$\mathbf{q}_n = -\mathbb{K}\frac{kr_n(S_w)}{\mu_n}(\nabla p_n - \rho_n \mathbf{g}) \tag{1.20}$$

$$p_c(S_w) = p_n - p_w \tag{1.21}$$

$$S_w + S_n = 1 \tag{1.22}$$

Uočimo da uvođenjem potencijala $\Phi_w = p_w - \rho_w gz$ i $\Phi_n = p_n - \rho_n gz$ (z je *dubina*) možemo eliminirati gravitacijski član iz (1.19) i (1.20), no u tome slučaju zakon kapilarnosti ovisi eksplicitno o dubini z.

Za totalnu brzinu

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_w + \mathbf{q}_n \tag{1.23}$$

imamo jednadžbu bez vremenske derivacije:

$$\mathrm{div}(\mathbf{q}_t) = \mathcal{F}_w/\rho_w + \mathcal{F}_n/\rho_n, \tag{1.24}$$

koju dobivamo zbog $S_w + S_n = 1$. Koristeći (1.21) i (1.22) možemo eliminirati jedno zasićenje i jedan tlak i time dobiti sustav od dvije diferencijalne jednadžbe drugog reda za dvije nepoznanice: jedno zasićenje i jedan tlak; obično se uzima zasićenje vlažeće faze i tlak nevlažeće.

Formulacija jednadžbi gibanja u obliku zakona sačuvanja za svaku pojedinu fazu ima dva nedostatka. Prvo, nije jasan tip jednadžbi koje ulaze u sustav. Drugo, kada se zasićenje jedne faze smanji do rezidualnog (onog pri kome relativna propusnost postaje jednaka nuli) pripadna diferencijalna jednadžba nestaje. Ako se radi o fazi čiji je tlak odabran za varijablu, onda postaje upitna njegova definicija.

Uvedimo određena pojednostavljenja u notaciji. Mobilnosti fluida su funkcije

$$\lambda_w(S_w) = \frac{kr_w(S_w)}{\mu_w}, \quad \lambda_n(S_w) = \frac{kr_n(S_w)}{\mu_n}; \tag{1.25}$$

ukupna mobilnost je

$$\lambda(S_w) = \lambda_w(S_w) + \lambda_n(S_w), \tag{1.26}$$

a funkcije djelomičnog toka (*fractional flow* funkcije) su

$$f_w(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda(S_w)}, \quad f_n(S_w) = \frac{\lambda_n(S_w)}{\lambda(S_w)}. \tag{1.27}$$

Iz činjenice da je $\lambda_w(S_w)$ rastuća, a $\lambda_n(S_w)$ padajuća funkcija, lako se pokazuje da je $f_w(S_w)$ rastuća funkcija, a zbog $f_w + f_n = 1$ slijedi da je $f_n(S_w)$ padajuća.

Ta totalnu brzinu (1.23) imamo izraz:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_w + \mathbf{q}_n &= -\mathbb{K}\lambda_w(S_w)(\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g}) - \mathbb{K}\lambda_n(S_w)(\nabla p_n - \rho_n \mathbf{g}) \\ &= -\mathbb{K}(\lambda_w(S_w)\nabla p_w + \lambda_n(S_w)\nabla p_n) + \mathbb{K}\mathbf{g}(\lambda_w(S_w)\rho_w + \lambda_n(S_w)\rho_n).\end{aligned}$$

Želja nam je brzinu $\mathbf{q}_t$ izraziti kao Darcyjevu brzinu nekog *srednjeg tlaka* p. Tlakovi faza bi tada trebali zadovoljavati sljedeći sustav jednadžbi:

$$\lambda_w(S_w)\nabla p_w + \lambda_n(S_w)\nabla p_n = \alpha(S_w)\nabla p \tag{1.28}$$

$$\nabla p_n - \nabla p_w = p_c'(S_w)\nabla S_w \tag{1.29}$$

u kojem je $\alpha(S_w)$ neka (proizvoljna) skalarna funkcija. Pomnožimo li jednadžbu (1.29) s $\lambda_w(S_w)$ i zbrojimo je s (1.28), dobivamo:

$$(\lambda_n(S_w) + \lambda_w(S_w))\nabla p_n = \alpha(S_w)\nabla p + \lambda_w(S_w)p_c'(S_w)\nabla S_w. \tag{1.30}$$

Sada vidimo da je zgodno uzeti $\alpha(S_w) = \lambda(S_w)$ jer tada dijeleći (1.30) s $\lambda(S_w)$, dobivamo

$$\nabla p_n = \nabla p + f_w(S_w)p_c'(S_w)\nabla S_w \tag{1.31}$$

Jednadžba (1.31) će biti zadovoljena ako uzmemo

$$p = p_n - \int_{S_*}^{S_w} f_w(s)p_c'(s)\,ds \tag{1.32}$$

gdje je $S_* \in [0,1]$ proizvoljna točka. Jednakost (1.32) definira novi tlak za koji bismo htjeli da predstavlja određenu srednju vrijednost između p_n i p_w. Na raspolaganju nam stoji konstanta S_* pomoću koje p možemo mijenjati. Koristeći kapilarni tlak i uzimanjem $S_* = S_c$, gdje je S_c zasićenje pri kojem je $p_c(S_c) = 0$, dobivamo

$$\begin{aligned}p &= (p_n - \frac{1}{2}p_c(S_w)) + \frac{1}{2}p_c(S_w) - \int_{S_c}^{S_w} f_w(s)p_c'(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}(p_n + p_w) + \frac{1}{2}\int_{S_c}^{S_w} p_c'(s)\,ds - \int_{S_c}^{S_w} f_w(s)p_c'(s)\,ds,\end{aligned}$$

što nam daje konačnu definiciju *globalnog tlaka*:

$$p = \frac{1}{2}(p_n + p_w) - \int_{S_c}^{S_w} (f_w(s) - \frac{1}{2})p_c'(s)\,ds. \tag{1.33}$$

Uočimo da su formule (1.33) i (1.32) ekvivalentne uz uvjet $S_* = S_c$, gdje je $p_c(S_c) = 0$. Zbog invertibilnosti funkcije $p_c(S)$ možemo globalnom tlaku (1.32) dati oblik

$$p = p_n - \int_0^{p_c(S_w)} f_w(p_c^{-1}(u))\,du. \tag{1.34}$$

Lema 1. *Za globalni tlak imamo ocjenu*

$$\min(p_n, p_w) \leq p \leq \max(p_n, p_w). \tag{1.35}$$

Dokaz. Koristimo činjenicu da je $p_c'(S) \leq 0$ te da je $0 \leq f_w(S) \leq 1$. Za $S_w \leq S_c$ (područje pozitivnog kapilarnog tlaka) imamo ocjenu

$$-\frac{1}{2}(p_n - p_w) = -\frac{1}{2}p_c(S_w) \leq -\int_{S_c}^{S_w} (f_w(s) - \frac{1}{2})p_c'(s)\, ds \leq \frac{1}{2}p_c(S_w) = \frac{1}{2}(p_n - p_w),$$

što prema (1.33) daje

$$p_w \leq p \leq p_n.$$

Ako je $S_w > S_c$ (eventualno područje negativnog kapilarnog tlaka), onda izlazi

$$-\frac{1}{2}(p_w - p_n) \leq -\int_{S_c}^{S_w} (f_w(s) - \frac{1}{2})p_c'(s)\, ds \leq \frac{1}{2}(p_w - p_n),$$

što prema (1.33) daje

$$p_n \leq p \leq p_w.$$

Time je ocjena (1.35) dokazana. □

Vratimo se sada u (1.28). Kako je $\alpha(S_w) = \lambda(S_w)$, imamo

$$\lambda_w(S_w)\nabla p_w + \lambda_n(S_w)\nabla p_n = \lambda(S_w)\nabla p,$$

pa zaključujemo da je

$$\mathbf{q}_t = -\mathbb{K}\lambda(S_w)\nabla p + \mathbb{K}\mathbf{g}G(S_w), \tag{1.36}$$

gdje je

$$G(S_w) = \lambda_w(S_w)\rho_w + \lambda_n(S_w)\rho_n. \tag{1.37}$$

Time jednadžba za ukupnu brzinu (1.24) postaje eliptička jednažba za globalni tlak:

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K}\lambda(S_w)\nabla p - \mathbb{K}\mathbf{g}G(S_w)) = \mathcal{F}_w/\rho_w + \mathcal{F}_n/\rho_n. \tag{1.38}$$

Sada nije teško izraziti fazne brzine pomoću ukupne brzine. Uvedimo najprije funkcije

$$a(S) = -\frac{\lambda_w(S)\lambda_n(S)}{\lambda(S)}p_c'(S), \tag{1.39}$$

$$b_g(S) = \frac{\lambda_w(S)\lambda_n(S)}{\lambda(S)}(\rho_w - \rho_n). \tag{1.40}$$

Neposrednim se računom dobiva:

$$\mathbf{q}_w = f_w(S_w)\mathbf{q}_t - \mathbb{K}a(S_w)\nabla S_w + \mathbb{K}\mathbf{g}b_g(S_w), \tag{1.41}$$

$$\mathbf{q}_n = f_n(S_w)\mathbf{q}_t + \mathbb{K}a(S_w)\nabla S_w - \mathbb{K}\mathbf{g}b_g(S_w). \tag{1.42}$$

Napomena 2. *Iz formula (1.41) i (1.42) vidimo zašto se funkcije f_w i f_n nazvaju* fractional flow *funkcije. U slučaju zanemarenog kapilarnog tlaka i gravitacije one daju dio ukupnog toka faze:* $\mathbf{q}_w = f_w(S_w)\mathbf{q}_t$ *i* $\mathbf{q}_n = f_n(S_w)\mathbf{q}_t$.

Napomena 3. *Fazne brzine možemo izraziti koristeći neposredno tlak* p*, umjesto ukupne brzine* $\mathbf{q}_t$*, na sljedeći način:*

$$\mathbf{q}_w = -\lambda_w(S_w)\mathbb{K}(\nabla p - \rho_w \mathbf{g}) - \mathbb{K}\nabla\alpha(S_w), \tag{1.43}$$

$$\mathbf{q}_n = -\lambda_n(S_w)\mathbb{K}(\nabla p - \rho_n \mathbf{g}) + \mathbb{K}\nabla\alpha(S_w), \tag{1.44}$$

gdje smo uveli funkciju

$$\alpha(u) = \int_0^u a(\xi)\, d\xi. \tag{1.45}$$

Jednadžba za vlažeću fazu dobiva oblik:

$$\Phi\frac{\partial S_w}{\partial t} + \mathrm{div}(f_w(S_w)\mathbf{q}_t + \mathbb{K}\mathbf{g}b_g(S_w)) = \mathrm{div}(\mathbb{K}a(S_w)\nabla S_w) + \mathcal{F}_w/\rho_w; \tag{1.46}$$

Za nevlažeću fazu imamo (eliminacijom zasićenja S_n):

$$\Phi\frac{\partial S_w}{\partial t} - \mathrm{div}(f_n(S_w)\mathbf{q}_t - \mathbb{K}\mathbf{g}b_g(S_w)) = \mathrm{div}(\mathbb{K}a(S_w)\nabla S_w) - \mathcal{F}_n/\rho_n; \tag{1.47}$$

Prednost ovog modela je u tome što za globalni tlak imamo eliptičku jednadžbu (1.38) koja je dobro definirana i u slučaju nestanka jedne od dviju faza ($\lambda(S_w) > 0$ za sve S_w), a za drugu jednadžbu možemo uzeti (1.46) ili (1.47). Obje jednadžbe su paraboličke tipa no *degenerirane*. Radi se o tome da u kritičnim zasičenjima imamo $a(S_w) = 0$ i tada jednadžba postaje hiperbolička (skalarni zakon sačuvanja prvog reda).

Napomena 4. *Moguća je situacija u kojoj je kapilarni tlak strogo pozitivan i točka* S_c *ne postoji. U tom slučaju ćemo* S_c *definirati kao maksimalno zasićenje vlažeće faze* $S_c = S_M$*, u kojem je* $p_c(S_c) = p_{c,min}$.

Globalni tlak definiramo formulama:

$$p = p_n - \frac{1}{2}p_c(S_c) - \int_{S_c}^{S_w} f_w(s)p_c'(s)\, ds \tag{1.48}$$

$$= \frac{1}{2}(p_n + p_w) - \int_{S_c}^{S_w} (f_w(s) - \frac{1}{2})p_c'(s)\, ds. \tag{1.49}$$

Evidentno za taj tlak ponovo imamo (1.36); ostaje samo provjeriti (1.35). Imamo:

$$-\frac{1}{2}(p_c(S_w) - p_{c,min}) \leq -\int_{S_c}^{S_w} (f_w(s) - \frac{1}{2})p_c'(s)\, ds \leq \frac{1}{2}(p_c(S_w) - p_{c,min}).$$

Iz definicije (1.49) slijedi ocjena

$$p_w + \frac{1}{2}p_{c,min} \leq p \leq p_n - \frac{1}{2}p_{c,min}.$$

1.6 Nehomogena porozna sredina

Za poroznu sredinu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ kažemo da je kompleksna ako je sastavljena od više različitih poroznih materijala. Drugim riječima, domena Ω se može rastaviti na uniju konačno mnogo disjunktnih poddomena Ω_i, $(i = 1, \dots, K)$,

$$\Omega = \cup_{i=1}^{K} \Omega_i,$$

kojima odgovaraju različiti porozni materijali, odnosno tipovi stijena. Svaki je porozni materijal u dvofaznom modelu karakteriziran s tri funkcije zasićenja: kapilarnim tlakom i dvije relativne propusnosti. Stoga imamo K trojki funkcija

$$kr_w^i(S), \quad kr_n^i(S), \quad p_c^i(S), \quad i = 1, \dots, K.$$

Globalno su te funkcije definirane formulama ($\xi \in \{w, n\}$)

$$kr_\xi(\mathbf{x}, S) = \sum_{i=1}^{K} kr_\xi^i(S)\chi_{\Omega_i}(\mathbf{x}), \quad p_c(\mathbf{x}, S) = \sum_{i=1}^{K} p_c^i(S)\chi_{\Omega_i}(\mathbf{x}),$$

gdje je χ_{Ω_i} karakteristična funkcija skupa Ω_i.[1]

Na granici između dva susjedna područja $\Gamma_{i,j} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ moramo imati:

1. Neprekidnost flukseva obje faze:

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_{\Omega_i}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}_w(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) = 0, \tag{1.50}$$
$$\mathbf{q}_n(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_{\Omega_i}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}_n(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) = 0 \tag{1.51}$$

   za sve $\mathbf{x} \in \Gamma_{i,j}$, gdje je $\mathbf{n}_{\Omega_i}$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega_i$.

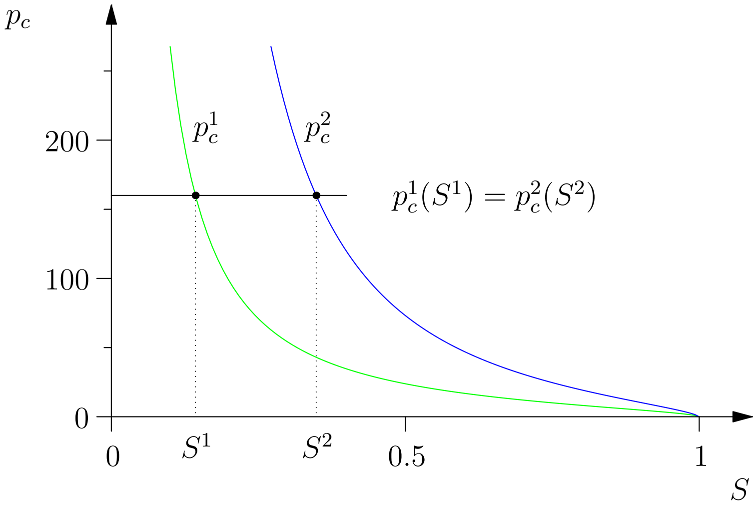
2. Neprekidnost tlakova obje faze, pa stoga i kapilarnog tlaka, pr prijelazu granice $\Gamma_{i,j}$.

Prvi zahtjev je nužan radi zakona sačuvanja mase, odnosno da bi divergencija fazne brzine bila dobro definirana. Drugi zahtjev je uvjetonog karaktera i znači sljedeće: ako je promatrana faza u obje poddomene mobilna, to znači da je povezana i da može prenositi promjene tlaka, onda tlak na granici domena mora biti neprekidan. Tlak može biti diskontinuiran ukoliko je faza u jednoj poddomeni mobilna, a u drugoj nije. Takva situacija je moguća jedino kada krivulje kapilarnog tlaka nemaju iste granične vrijednosti, tj. vrijednosti u S_{wirr} i $1 - S_{nirr}$. Ako su granične vrijednosti u svim poddomenama iste, onda mora vrijediti neprekidnost svih tlakova.

Posljedica neprekidnosti kapilarnog tlaka vidi se na Slici 1.4. Kako se pri prijelazu iz jednog poroznog materijala u drugi kapilarna krivulja mijenja, neprekidnost se kapilarnog tlaka može osigurati jedino skokom zasićenja pri prolazu kroz granicu dvaju materijala.

Zbog diskontinuiranosti zasićenja diferencijalne jednadžbe (1.17)–(1.22) ne možemo postaviti u čitavoj domeni Ω, već imamo pred sobom *problem transmisije.* Jednadžbe

[1] $\chi_{\Omega_i}(\mathbf{x}) = 1$ za $\mathbf{x} \in \Omega_i$, i $\chi_{\Omega_i}(\mathbf{x}) = 0$ za $\mathbf{x} \notin \Omega_i$.



Slika 1.4: Skok zasićenja

(1.17)–(1.22) vrijede u svakoj poddomeni Ω_i, $i = 1, \dots, K$, a na granicam poddomena imamo neprekidnost faznih flukseva (1.59) i (1.60) te neprekidnost faznih tlakova p_w i p_n. U domeni Ω_i imamo:

$$\Phi \frac{\partial S_w^i}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{q}_w^i) = \mathcal{F}_w/\rho_w, \quad \Phi \frac{\partial S_n^i}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{q}_n^i) = \mathcal{F}_n/\rho_n$$

$$\mathbf{q}_w^i = -\mathbb{K} \frac{kr_w^i(S_w^i)}{\mu_w}(\nabla p_w^i - \rho_w \mathbf{g}), \quad \mathbf{q}_n^i = -\mathbb{K} \frac{kr_n^i(S_w^i)}{\mu_n}(\nabla p_n^i - \rho_n \mathbf{g})$$

$$p_c^i(S_w^i) = p_n^i - p_w^i, \quad S_w^i + S_n^i = 1.$$

Na granici poddomena $\Gamma_{i,j}$ imamo:

$$\mathbf{q}_w^i \cdot \mathbf{n}_{i,j} + \mathbf{q}_w^j \cdot \mathbf{n}_{j,i}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{q}_w^i \cdot \mathbf{n}_{i,j} + \mathbf{q}_w^j \cdot \mathbf{n}_{j,i}(\mathbf{x}) = 0,$$

$$p_w^1 = p_w^2, \quad p_n^1 = p_n^2,$$

gdje smo s $\mathbf{n}_{i,j}$ označili jediničnu vanjsku normalu na $\Gamma_{i,j}$ koja pokazuje iz Ω_i u Ω_j.

Bibliografija

[1] Guy Chavent and Jérôme Jaffré. *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, volume 17 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland, Amsterdam, 1986.