Poglavlje 1

Uvod

U ovom uvodu donosimo neke elemente diferencijalnog računa koje koristimo kasnije. Većinu ovdje iznesenog sadržaja može se naći u [3], a ostale korisne reference su [1] i [2].

1.1 Pojam derivacije

Ovdje ćemo uvesti pojam derivacije funkcije u širem kontekstu koji će nam omogućiti deriviranje vektorskih i matričnih funkcija. Pri tome ćemo, radi jednostavnosti, promatrati samo realne prostore.

Neka su X i Y normirani vektorski prostori te $\Omega \subset X$ otvoren skup. Za funkciju $f\colon \Omega \subseteq X \to Y$ derivaciju u točki definiramo na sljedeći način:

Definicija 1. Za funkciju $f\colon \Omega \subseteq X \to Y$ kažemo da je Gâteaux derivabilna u točki $x \in \Omega$ ako postoji linearan i neprekidan funkcional iz X u Y, koji označavamo s $Df(x)$, takav da je za svako $h \in X$ vrijedi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x+th) - f(x)) = Df(x)[h], \tag{1.1}$$

pri čemu smo djelovanje linearnog operatora $Df(x)$ na vektor h označili s $Df(x)[h]$. Izraz $Df(x)[h]$ nazivamo usmjerenom derivacijom funkcije f u točki x (u smjeru vektora h).

Sama definicija zavrijeđuje nekoliko napomena.

1) Prije svega, konvergencija u jednadžbi (1.1) je konvergencija u normi prostora Y. Da bismo razlikovali norme u prostorima X i Y uvest ćemo za njih oznake $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Y$. Sada (1.1) znači:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\|f(x+th) - f(x) - tDf(x)[h]\|_Y = 0,$$

za svako $h \in X$.

2) Derivacija mora biti linearan operator, odnosno za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te $h, k \in X$ vrijedi

$$Df(x)[\alpha h + \beta k] = \alpha Df(x)[h] + \beta Df(x)[k].$$

3) Neprekidnost linearnog operatora ekvivalentna je njegovoj ograničenosti. To znači da postoji konstanta C takva da je za svako $h \in X$, $\|Df(x)[h]\|_Y \leq C\|h\|_X$. Minimalna se takva konstanta označava s $\|Df(x)\|$ i predstavlja (operatorsku) normu derivacije u točki x. Ako su X i Y konačnodimenzionalni prostori, onda je svaki linearni operator na njima ujedno i ograničen (neprekidan), pa uvjet neprekidnosti ne figurira u definiciji derivacije. Ako je X beskonačnodimenzionalan prostor, onda ograničenost derivacije treba posebno zahtijevati te je stoga i uvrštena u definiciju.

4) Gâteaux-ova derivacija se ponekad naziva i slaba derivacija. Funkcija je Gâteaux derivabilna na Ω ako je Gâteaux derivabilna u svakj točki $x \in \Omega$.

5) Uočimo da derivaciju u smjeru računamo po formuli

$$\frac{d}{dt} f(x+th)\Big|_{t=0} = Df(x)[h].$$

Nadalje, birajući za h vektore kanonske baze dobivamo parcijalne derivacije. Na primjer, za $X = \mathbb{R}^d$ u standardnim oznakama imamo

$$\frac{d}{dt} f(x+te_i)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Zadatak 1. Pokažite da funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

ima usmjerenu derivaciju u točki $(0,0)$ u svakom smjeru $h = (h_1, h_2)$ i ta je derivacija zadana formulom:

$$Df(0,0)[h] = \begin{cases} \frac{h_1^2}{h_2} & \text{za } h_2 \neq 0, \\ 0 & \text{za } h_2 = 0. \end{cases}$$

Ta funkcija ipak nije Gâteaux derivabilna u $(0,0)$. Zašto?

Zadatak 2. Pokažite da funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

ima Gâteauxovu derivaciju u točki $(0,0)$ koja je jednaka nuli. Ta funkcija ipak nije neprekidna u $(0,0)$. Dokažite?

Gâteauxova derivabilnost u točki ne povlači neprekidnost u točki, što je korisno svojstvo na koje smo navikli kod realnih funkcija realne varijable. Stoga moramo uvesti jači pojam derivabilnosti.

Brzina konvergencije u (1.1) može ovisiti o vektoru h. Ukoliko u definiciji derivacije zahtjevamo određenu uniformnost obzirom na h dolazimo da jačeg pojma derivacije, tzv. Fréchetove derivacije:

Definicija 2. Za funkciju $f\colon \Omega \subseteq X \to Y$ kažemo da je Fréchet derivabilna u točki $x \in \Omega$ ako postoji linearan i neprekidan operator iz X u Y, koji označavamo s $Df(x)$, takav da vrijedi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in X, \|h\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x+h) - f(x) - Df(x)[h]\|_Y < \varepsilon \|h\|_X. \quad (1.2)$$

Za funkciju koja je Fréchet derivabilna u točki kažemo jednostavno da je derivabilna u točki.

U ovoj definiciji h mora biti dovoljno mali da $x+h$ ostane u Ω. Ova definicija predstavlja generalizaciju uobičajene derivacije realne funkcije realne varijable. Notaciju možemo pojednostaviti ako uočimo da (1.2) ustvari tvrdi da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Df(x)[h]\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Stoga ćemo uvesti "malo-o oznaku": Za funkciju F, definirani u okolini nule normiranog prostora X (i s vrijednostima u normiranom prostoru Y) kažemo da je $o(h)$ kada $h \to 0$ i pišemo $\mathcal{F} = o(h)$, ako vrijedi

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\mathcal{F}(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Očito je za funkciju derivabilnu u točki x funkcija $h \mapsto f(x+h) - f(x) - Df(x)[h] = o(h)$. Stoga možemo (1.2) ekvivalentno zapisati u obliku:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)[h] + o(h).$$

Napomena. Iz definicije (Fréchetove) derivacije u točki je vidljivo da je funkcija derivabilna u točki ujedno i neprekidna u točki.

Napomena. Pored malo-o notacije korisna je i veliko-O notacija: Kažemo da je funkciju F $O(h)$ kada $h \to 0$ i pišemo $\mathcal{F} = O(h)$, ako je izraz

$$\frac{\|\mathcal{F}(h)\|_Y}{\|h\|_X}$$

ograničen kada h teži u nulu.

Zadatak 3. *Dokažite da je derivacija u točki jedinstvena, tj. da funkcija ne može imati više od jedne derivacije u točki.*

Uvedimo u d-dimenzionalni vektorski prostor X jednu ortonormiranu bazu koju ćemo označavati s $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ i njoj pridruženi koordinatni sustav $(x_1, \dots, x_d)$. Tada uvodimo pojam parcijalne derivacije funkcije $f\colon \Omega \subseteq X \to Y$ na sljedeći način: za $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = Df(\mathbf{x})[\mathbf{e}_i] = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Uočimo da je parcijalna derivacija vektor ukoliko funkcija f nije skalarna.

Ako je $X = \mathbb{R}$, odnosno imamo funkciju realne varijable f (ali s vrijednostima općenito u nekom vektorskom prostoru Y), onda je derivacije derivacija linearan operator s $\mathbb{R}$ u Y.

Lako se vidi da su svi takvi linearni operatori $A\colon \mathbb{R} \to X$ oblika $A\alpha = \alpha a$, gdje je $a \in Y$ fiksan vektor (dokažite!). To nam omogućava da derivaciju po jednoj varijabli tradicionalno (u mehanici) označavamo s točkom, koristeći sljedeći odnos:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad Df(t)[\alpha] = \alpha \dot{f}(t).$$

Ovdje je $\dot{f}(t) \in Y$ vektor u Y koji reprezentira derivaciju (koja je linearan operator).

Neka je V konačnodimenzionalni realni vektorski prostor, odnosno $V = \mathbb{R}^d$ za neki $d \geq 1$. Prostor linearnih (i neprekidnih) operatora sa V u V ćemo označavati s $\mathcal{L}(V)$. U paru baza svakom takvom operatoru odgovara kvadratna matrica.

Zadatak 4. *Neka je $\phi\colon V \to \mathbb{R}$ dano formulom $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Pokažite da je $D\phi(\mathbf{v})[\mathbf{h}] = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}$.*

Zadatak 5. *Neka je $\phi\colon \mathcal{L}(V) \to \mathbb{R}$ dano formulom $\phi(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A})$. Izračunajte derivaciju.*

Iz ovog primjera se lako vidi da za svaki linearan operator $L\colon X \to Y$ vrijedi $DL(x)[h] = L(h)$, odnosno, $DL(x) = L$. Derivacija linearnog opratora (funkcionala) u bilo kojoj točkiu je sam taj operator (funkcional).

Zadatak 6. *Neka je $G\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(V)$ zadana derivabilna funkcija. Pokažite da je $\dot{G^\tau}(t) = \dot{G}(t)^\tau = \dot{G}^\tau(t)$. Derivacije deriviranja i transponiranja komutiraju pa je zadnja oznaka korektna.*

Zadatak 7. *Neka je $G\colon \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$ dano formulom $G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$. Pokažite da je $DG(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = \mathbf{AH} + \mathbf{HA}$.*

Zadatak 8. *Neka je $G\colon \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$ dano formulom $G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3$. Pokažite da je $DG(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = \mathbf{A}^2\mathbf{H} + \mathbf{AHA} + \mathbf{HA}^2$.*

Ako su X i Y normirani vektorski prostori, onda je i linearan prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ svih linearnih operatora sa X u Y normiran na prirodan način pomoću operatorske norme

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\mathbf{x} \in X} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X}.$$

Prema tome, ako postoji derivacija funkcije $f\colon \Omega \subseteq X \to Y$ u svakoj točki skupa Ω (ili nekog njegovog otvorenog podskupa) onda možemo promatrati preslikavanje $x \mapsto Df(x)$ koje ide iz $\Omega \subseteq X$ u normirani prostor $\mathcal{L}(X, Y)$. To preslikavanje možemo ponovo derivirati i tako dolazimo do pojma druge derivacije, i iterativno, treće i viših derivacija. Druga derivacija je linearan operator s X u $\mathcal{L}(X, Y)$ pa može biti predstavljen kao bilinearan operator. Nadalje se nećemo služiti višim derivacijama osim u nekim posebnim slučajevima.

Zadatak 9. *Pokažite da su podskupovi simetričnih odnosno antisimetričnih operatora u $\mathcal{L}(V)$, gdje je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, zatvoreni u normi prostora $\mathcal{L}(V)$.*

Napomena. *Na konačnodimenzionalnom prostoru sve su norme ekvivalentne, pa je stoga konvergencija matrica i vektora u svakoj normi jednaka konvergenciji "po komponentama".*

U računanju s determinantom matrice od velike je koristi karakteristični polinom matrice. Radi jednostavnosti zapisa pogledajmo samo slučaj $d = 3$. Imamo:

$$\det(\mathbf{A} - \omega\mathbf{I}) = -\omega^3 + i_1(\mathbf{A})\omega^2 - i_2(\mathbf{A})\omega + i_3(\mathbf{A}),$$

pri čemu su koeficijenti polinoma tzv. glavne invarijante linearnog operatora:

$$i_1(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}), \quad i_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)], \quad i_3(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}).$$

Zadatak 10. *Koristeći karakteristični polinom pokažite da je skup regularnih operatora u $\mathcal{L}(V)$, gdje je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, otvoren u normi prostora $\mathcal{L}(V)$.*

Zadatak 11. *Koristeći karakteristični polinom pokažite da je derivacija preslikavanja* $\mathbf{A} \mapsto \det(\mathbf{A})$ *na skupu regularnih operatora u $\mathcal{L}(V)$ dana formulom:*

$$D\det(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = \det(\mathbf{A})\mathit{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}).$$

Kofaktor matrica. Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda d kofaktor matricu definiramo na sljedeći način: $\mathrm{Cof}(\mathbf{A}) = (d_{i,j})$, gdje je $d_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}'_{i,j})$ i gdje je $\mathbf{A}'_{i,j}$ matrica reda $d-1$ koja se dobiva brisanjem i-tog retka i j-tog stupca matrice $\mathbf{A}$. Za kofaktor matricu vrijedi

$$\mathrm{Cof}(\mathbf{A})^\tau\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathrm{Cof}(\mathbf{A})^\tau = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}.$$

Ako je matrica $\mathbf{A}$ regularna, onda je

$$\mathrm{Cof}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-\tau},$$

gdje je $\mathbf{A}^{-\tau} = (\mathbf{A}^{-1})^\tau$. Derivaciju determinante možemo stoga izraziti kao

$$D\det(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = \mathrm{tr}(\mathrm{Cof}(\mathbf{A})^\tau\mathbf{H}) = \mathrm{Cof}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{H};$$

(vidi (1.3) za definiciju skalarnog produkta linearnih operatora).

Pretpostavimo da imamo dvije funkcije

$$f\colon X \to Y, \quad g\colon X \to Z,$$

te da je definirana neprekidna bilinearna forma $\pi\colon Y \times Z \to W$, gdje su X, Y i W normirani vektorski prostori. Tada možemo formirati funkciju $h(x) = \pi(f(x), g(x))$ koja je definirana u X i ima vrijednosti u W.

Bilinearna forma $\pi\colon Y \times Z \to W$ je svako preslikavanje sa svojstvom da su za svako fiksirano $y_0 \in Y$ i $z_0 \in Z$ preslikavanja

$$y \mapsto \pi(y, z_0), \quad w \mapsto \pi(y_0, z)$$

linearna. Neprekidnost znači da postoji konstanta C, takva da je

$$\forall y \in Y, z \in Z, \quad \|\pi(y,w)\|_W \leq C\|y\|_Y\|z\|_Z.$$

Kao i kod linearnih operatora vidimo da je neprekidnost ustvari ograničenost i u slučaju konačnodimenzionalnih prostora ona je posljedica bilinearnosti.

Uz gornje oznake i pretpostavke imamo sljedeći zaključak:

Lema 1. Neka su funkcije f i g derivabilne u točki $x \in X$. Tada je i funkcija h derivabilna u točki x i vrijedi:

$$Dh(x)[u] = \pi(Df(x)[u], g(x)) + \pi(f(x), Dg(x)[u]).$$

Zadatak 12. *Dokažite Lemu 1.*

Zadatak 13. *Koristeću Lemu 1 dokažite da je funkcija $G\colon \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$ definirana formulom $G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$ derivabilna na skupu regularnih operatora te da vrijedi*

$$DG(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}.$$

Pogledajmo sada neke primjere različitih produkata. Imat ćemo sljedeće oznake: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (skalari); $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V(\mathbb{R}^d)$ vektori; $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{L}(V)$ operatori (odn. matrice u nekoj bazi, $\mathbb{R}^{d\times d}$. Neki primjeri produkata su sljedeći:

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha, \mathbf{u}) &= \alpha\mathbf{u}, \quad \pi(\alpha, \mathbf{A}) = \alpha\mathbf{A} \\
\pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \ \text{(skalarni produkt)} \\
\pi(\mathbf{A}, \mathbf{u}) &= \mathbf{A}\mathbf{u}, \ \text{(primjena operatora na vektor)} \\
\pi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \mathbf{A}\mathbf{B}, \ \text{(kompozicija operatora)} \\
\pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}, \ \text{(tenzorski produkt vektora)} \\
\pi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \ \text{(skalarni produkt operatora).}
\end{aligned}$$

Tenzorski produkt vektora je linearan operator definiran formulom:

$$\forall \mathbf{a} \in V, \quad (\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{u}.$$

Nadalje, lako se pokazuje da zadovoljava

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})^\tau = \mathbf{v}\otimes\mathbf{u}, \quad (\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})(\mathbf{w}\otimes\mathbf{z}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{u}\otimes\mathbf{z}), \quad \mathrm{tr}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

Ako je $\mathbf{e}_i$ ortonormirana baza u $V = \mathbb{R}^d$ i $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V)$ operator, onda definiramo $\mathbf{A}_{i,j} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j$ i imamo prikaz

$$\mathbf{A} = \sum_{i,j=1}^{d} \mathbf{A}_{i,j}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j.$$

Pored toga $(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})_{i,j} = \mathbf{u}_i\mathbf{v}_j$ i $\mathrm{tr}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

Zadatak 14.

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v}), \quad (\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{A} = \mathbf{u}\otimes(\mathbf{A}^{\tau}\mathbf{v}).$$

Skalarni produkt dva linearna operatora $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{L}(V)$ definiramo sljedećom formulom:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\tau}\mathbf{B}). \tag{1.3}$$

Zadatak 15. *Dokažite da skalarni produkt linearnih operatora (1.3) ima sva svojstva skalarnog produkta te da u ortonormiranoj (kanonskoj) bazi ima sljedeći zapis po komponentama:*

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^{d}\mathbf{A}_{i,j}\mathbf{B}_{i,j}.$$

Zadatak 16. *Dokažite da su simetrični i antisimetrični operatori međusobno ortogonalni u gornjem skalarnom produktu. Nadalje, svaki operator koji je ortogonalan na sve simetrične operatore nužno je antisimetričan. Vrijedi i suprotna tvrdnja: operator ortogonalan na sve antisimetrične operatore nužno je simetričan.*

Za $d = 3$ imamo još i vektorski produkt vektora $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, definiran na uobičajeni način. Taj je produkt vezan uz antisimetrične matrice na sljedeći način: Svaka se antisimetrična matrica $W\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^{3\times3}$ može na jedinstven način prikazati pomoću nekog vektora $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ formulom

$$\forall\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3, \quad W\mathbf{u} = \mathbf{w}\times\mathbf{u}.$$

Matrica operatora W ima oblik

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 17. *Neka su ϕ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ te $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ glatke funkcije s $\mathbb{R}$ u skalare, vektore i linearne operatore, respektivno. Tada vrijedi:*

$$\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{u}) = \dot{\phi}\mathbf{u} + \phi\dot{\mathbf{u}}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{B}}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{u}) = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}$$

Teorem 1. Neka su X, Y i Z linearni normirani prostori i $\Omega \subset X$, $\Omega_1 \subset Y$ otvoreni skupovi. Zadana su preslikavanja $f\colon \Omega \subset X \to Y$ i $g\colon \Omega_1 \subset Y \to Z$, pri čemu je slika of f sadržana u domeni of g, tako da je kompozicija $h = g \circ f$ dobro definirana. Ako je f derivabilno u x, a g derivabilno u $y = f(x)$, onda je h derivabilno u x i vrijedi:

$$Dh(x) = Dg(y) \circ Df(x). \tag{1.4}$$

Formulu (1.4) možemo zapisati u obliku

$$Dh(x)[u] = Dg(f(x))[Df(x)[u]].$$

Na primjer, ako je f realna funkcija, onda imamo

$$\frac{d}{dt}g(f(t)) = Dg(f(t))[\dot{f}(t)].$$

Zadatak 18. *Neka je $t \mapsto \mathbf{A}(t)$ glatka realna funkcija s vrijednostima u $\mathcal{L}(V)$. Tada je*

$$\frac{d}{dt}\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\,tr(\mathbf{A}^{-1}\dot{\mathbf{A}}).$$

1.2 Gradijent, divergencija, rotacija

Neka je ϕ skalarna funkcija, derivabilna u točki $\mathbf{x} \in V$, konačnodimenzionalnog normiranog prostora V. Tada je njena derivacija $D\phi(\mathbf{x})$ linearan funkcional na V i prema Rieszovom teoremu o reprezentaciji linearnog funkcionala postoji jedinstveni vektor iz V koji dozvoljava da se taj funkcional prikaže kao skalarni umnožak s tim vektorom. Taj ćemo vektor označavati s $\nabla\phi(\mathbf{x})$ i zvati gradijenom funkcije ϕ u točki $\mathbf{x}$. Drugim riječima, gradijent je definiran relacijom:

$$\forall \mathbf{h} \in V, \quad D\phi(\mathbf{x})[\mathbf{h}] = \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h},$$

ili

$$\forall \mathbf{h} \in V, \quad \phi(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = \phi(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(\mathbf{h}).$$

Posve se analogno definira gradijent vektorske funkcije $\mathbf{u}\colon X \to Y$, relacijom

$$\forall \mathbf{h} \in X, \quad D\mathbf{u}(\mathbf{x})[\mathbf{h}] = \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{h},$$

s time da je sada gradijent naprosto sinonim za derivaciju. Nas će posebno zanimati funkcije $\mathbf{u}\colon \Omega \subseteq V \to V$ za koje je $\nabla\mathbf{u} \in \mathcal{L}(V)$. Tada definiramo divergenciju kao skalarni polje

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{u}). \tag{1.5}$$

Ta je definicija neovisna o koordinatnim sustavima jer je trag invarijanta linearnog operatora. Zbog invarijantnosti oparatora traga u svakoj ortonormiranoj bazi $\{\mathbf{e}_i\}$ imamo

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{d} D\mathbf{u}(\mathbf{x})[\mathbf{e}_i] \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Zadatak 19. *Zadano je "tenzorskog polja"* $\mathbf{A}\colon \Omega \subseteq V \to \mathcal{L}(V)$. *Pokažite da vrijedi:*

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \quad (D\mathbf{A}(\mathbf{x})[\mathbf{b}])[\mathbf{a}] = D(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a})[\mathbf{b}],$$
$$\forall \mathbf{a} \in V, \quad (D\mathbf{A}(\mathbf{x})[\mathbf{a}])^\tau = D(\mathbf{A}(\mathbf{x})^\tau)[\mathbf{a}].$$

Divergenciju glatkog tenzorskog polja $\mathbf{A}\colon \Omega \subseteq V \to \mathcal{L}(V)$ definiramo na sljedeći način:

$$\forall \mathbf{a} \in V, \quad \operatorname{div}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div}(\mathbf{A}^\tau \mathbf{a}). \tag{1.6}$$

Uočite da (1.6) definira jedinstveni vektor $\operatorname{div}(\mathbf{A})$.

Zadatak 20. *Za tenzorsko polje* $\mathbf{A}\colon \Omega \subseteq V \to \mathcal{L}(V)$ *možemo divergenciju definirati kao trag derivacije, na sljedeći način:*

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{d} (D\mathbf{A}(\mathbf{x})[\mathbf{e}_i])[\mathbf{e}_i] \tag{1.7}$$

gdje je $\{\mathbf{e}_i\}$ *proizvoljna ortonormirana baza. Pokažite da su definicije (1.6) i (1.7) međusobno ekvivalentne.*

Za skalarnu funkciju definiramo Laplaceov operator:

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\nabla\phi).$$

Posve ista definicija $\Delta\mathbf{u} = \operatorname{div}(\nabla\mathbf{u})$ koristi se i za vektorsku funkciju i tada daje vektor. Skalarna i vektorska polja koja zadovoljavaju $\Delta\mathbf{u} = 0$ nazivaju se harmonijskim.

Zadatak 21. *Neka su* ϕ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *i* $\mathbf{A}$ *respektivno glatka skalarna, vektorska i tenzorska polja. Dokažite da vrijedi:*

$$\nabla(\phi\mathbf{u}) = \phi\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla\phi \tag{1.8}$$
$$\operatorname{div}(\phi\mathbf{u}) = \phi \operatorname{div}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi \tag{1.9}$$
$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u})^\tau \mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^\tau \mathbf{u} \tag{1.10}$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \operatorname{div}(\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{v} \tag{1.11}$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{A}^\tau \mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div}(\mathbf{A}) \tag{1.12}$$
$$\operatorname{div}(\phi\mathbf{A}) = \phi \operatorname{div}(\mathbf{A}) + \mathbf{A}\nabla\phi. \tag{1.13}$$

Zadatak 22. *Dokažite* $\operatorname{div}((\nabla\mathbf{u})^\tau) = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{u})$.

Rotacija vektorskog polja $\mathbf{u}$ se definira relacijom:

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \quad (\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^\tau)\mathbf{a} = \operatorname{rot}(\mathbf{u}) \times \mathbf{a}.$$

To je dakle aksijalni vektor za tenzor $\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^\tau$.

Zadatak 23. *Ako je* $\mathbf{u}$ *glatko vektorsko polje koje zadovoljava* $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ *i* $\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0$, *onda je* $\Delta\mathbf{u} = 0$.

Zadatak 24. *Nađite koordinatni prikaz svih operatora u kanonskoj bazi u* $\mathbb{R}^d$ *($d = 3$ za rotaciju).*

1.3 Teorem o divergenciji

Teorem o divergenciji vrijedi za ograničena glatka područja. Glatkoću, pri tome nećemo precizirati budući da su ti zahtjevi dosta tehnički. Recimo samo da granica područja mora biri orijentabilna, tj. na njoj se na jedinstven način može definirati polje jedinične vanjske normale i lokalno se mora moći dati prikazana kao graf dovoljno glatke funkcije, nakon eventualno krutog pomaka grafa. Takvo ćemo područje Ω zvati regularnom domenom.

Teorem 2. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ regularna ograničena domena i $\phi\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Tada vrijedi:

$$\int_{\partial\Omega} \phi\, \mathbf{n}\, \mathrm{dS} = \int_{\Omega} \nabla\phi\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

gdje je $\mathbf{n}$ polje jedinične vanjske normale na $\partial\Omega$.

Zadatak 25. *Dokažite sljedeća dva teorema o divergenciji za glatko vektorsko polje* $\mathbf{u}$ *i glatko tenzorsko polje* $\mathbf{A}$*:*

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{u}\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{A}\mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{A}\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

Zadatak 26. *Dokažite sljedeća dva teorema o divergenciji za glatko vektorska polja* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *i glatko tenzorsko polje* $\mathbf{A}$*:*

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\otimes\mathbf{n}\, \mathrm{dS} = \int_{\Omega} \nabla\mathbf{u}\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{A}\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}\, \mathrm{dS} = \int_{\Omega} [(\operatorname{div}\mathbf{A})\otimes\mathbf{u} + \mathbf{A}\nabla\mathbf{u}^{\tau}]\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{A}\mathbf{n}\, \mathrm{dS} = \int_{\Omega} [\mathbf{u}\cdot\operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{u}]\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\, \mathrm{dS} = \int_{\Omega} [\mathbf{v}\ \operatorname{div}\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{u}]\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Zadatak 27. *Dokažite teorem o lokalizaciji: Ako je* ϕ *neprekidno skalarno polje na domeni* Ω *i* $x_0 \in \Omega$*, onda je*

$$\phi(\mathbf{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|K(\mathbf{x}_0, r)|} \int_{K(\mathbf{x}_0,r)} \phi\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

gdje je $K(\mathbf{x}_0, r)$ *kugla oko* $\mathbf{x}_0$ *radijusa* r*, a* $|K(\mathbf{x}_0, r)|$ *njen volumen. Pokažite zatim da za glatko vektorska polja* $\mathbf{u}$ *i glatko tenzorsko polje* $\mathbf{A}$ *imamo:*

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|K(\mathbf{x}_0, r)|} \int_{\partial K(\mathbf{x}_0,r)} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, \mathrm{dS},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|K(\mathbf{x}_0, r)|} \int_{\partial K(\mathbf{x}_0,r)} \mathbf{A}\mathbf{n}\, \mathrm{dS}.$$

Koja mehanička interpretacija divergencije slijedi iz tih formula?

1.4 Ortogonalni krivolinijski koordinatni sustavi

Neka je u trodimenzionalni normiran vektorski prostor V uvedena ortonormirana baza $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ i pripadni (pravokutni) koordinatni sustav (x_1, x_2, x_3). Tada svaku točku $\mathbf{x} \in V$ možemo identificirati s trojkom koordinata (x_1, x_2, x_3) koje joj pripadaju.

Neka su $\Omega_1 \subseteq \mathbf{R}^3$ i $\Omega \subseteq V$ otvoreni skupovi i neka je $\hat{\mathbf{x}} \colon \Omega_1 \to \Omega$ glatka bijekcija sa svojstvom da je $\hat{\mathbf{x}}^{-1} = \hat{\mathbf{q}}$ također glatka funkcija (*difeomorfizam*). Neka preslikavanje $\hat{x}$ ima koordinatni zapis

$$x_1 = \hat{x}_1(q_1, q_2, q_3), \quad x_2 = \hat{x}_2(q_1, q_2, q_3), \quad x_3 = \hat{x}_3(q_1, q_2, q_3), \tag{1.14}$$

gdje je s (q_1, q_2, q_3) označena točka iz skupa Ω_1. Pomoću gornje formule svakoj točki $\mathbf{x} \in \Omega$ možemo na jedinstven način pridružiti trojku koordinata (q_1, q_2, q_3). Stoga kažemo da je pomoću formula (1.14) u skup Ω uveden *krivolinijski* ili *generalizirani* koordinatni sustav, a koordinate q_1, q_2 i q_3 nazivamo krivolinijskim ili generaliziranim koordinatama.

Svaka funkcija ϕ definirana na skupu $\Omega \subseteq V$ može se promatrati kao funkcija tri varijable tako da se stavi da je $\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi(\mathbf{x})$ gdje su (x_1, x_2, x_3) Kartezijeve koordinate točke $\mathbf{x}$. Koristeći formule (1.14) možemo ϕ promatrati kao funkciju generaliziranih koordinata uzimajući da je

$$\tilde{\phi}(q_1, q_2, q_3) = \phi(\hat{x}_1(q_1, q_2, q_3), \hat{x}_2(q_1, q_2, q_3), \hat{x}_3(q_1, q_2, q_3)) = \phi \circ \hat{\mathbf{x}}(q_1, q_2, q_3);$$

odnosno $\tilde{\phi} = \phi \circ \hat{\mathbf{x}}$.

Neka je $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ neka točka i neka su (q_1^0, q_2^0, q_3^0) njene generalizirane koordinate. Preslikavanje (1.14),

$$\hat{\mathbf{x}}(q_1, q_2, q_3) = \hat{x}_1(q_1, q_2, q_3)\boldsymbol{e_1} + \hat{x}_2(q_1, q_2, q_3)\boldsymbol{e_2} + \hat{x}_3(q_1, q_2, q_3)\boldsymbol{e_3}.$$

(ovdje zapisano vektorski) definira tri koordinatne linije kroje prolaze kroz točku $\mathbf{x}_0$ i dane su parametrizacijama:

$$q_1 \mapsto \hat{\mathbf{x}}(q_1, q_2^0, q_3^0), \quad q_2 \mapsto \hat{\mathbf{x}}(q_1^0, q_2, q_3^0), \quad q_3 \mapsto \hat{\mathbf{x}}(q_1^0, q_2^0, q_3), \tag{1.15}$$

gdje se q_i, $(i = 1, 2, 3)$, kreće u nekom intervalu oko q_i^0.

U slučaju da je $x_i(q_1, q_2, q_3) = q_i$ za $i = 1, 2, 3$ krivolinijski sustav je ponovo Kartezijev i koordinatne linije kroz točku $\mathbf{x}_0$ su pravci paralelni s koordinatnim osima x_1, x_2 i x_3. U općenitom slučaju koordinatne linije nisu pravci i zato govorimo o krivolinijskim koordinatama.

Tangencijalni vektori u točki $\mathbf{x}_0$ na krivulje (1.15) dani su formulama

$$\mathbf{r_1} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial q_1}(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{r_2} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial q_2}(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{r_3} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial q_3}(\mathbf{x}_0).$$

Ova tri vektora čine bazu u pripadnom vektorskom prostoru budući da je

$$\boldsymbol{r_1}\cdot[\boldsymbol{r_2},\boldsymbol{r_3}] = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(q_1,q_2,q_3)} = \det(D\hat{\mathbf{x}}(q_1,q_2,q_3)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_2} & \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q_2} & \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.16}$$

zbog difeomorfnosti funkcije $\hat{\mathbf{x}}$. Prema tome, uvođenjem krivolinijskih koordinata u skup Ω u svakoj točki $\mathbf{x}\in\Omega$ dobivamo bazu vektorskog prostora. Jedinične vektore te baze označavamo s

$$\boldsymbol{q_1^0} = \frac{1}{h_1}\boldsymbol{r_1},\quad \boldsymbol{q_2^0} = \frac{1}{h_2}\boldsymbol{r_2},\quad \boldsymbol{q_3^0} = \frac{1}{h_3}\boldsymbol{r_3},$$

gdje su

$$h_1 = |\boldsymbol{r_1}|,\quad h_2 = |\boldsymbol{r_2}|,\quad h_3 = |\boldsymbol{r_3}|,$$

tzv. Laméovi parametri. Važno je uočiti da su vektori $\boldsymbol{q_i^0}$ funkcije koordinata (q_1,q_2,q_3) i da se općenito mijenjaju od točke do točke.

Kažemo da je koordinatni sustav u skupu Ω ortogonalan ako su vektori $\mathbf{q_i^0}$, $i=1,2,3$ međusobno ortogonalni u svakoj točki skupa Ω. U tom slučaju je matrica operatora T koji preslikava bazu $(\boldsymbol{e_i})$ u bazu $(\boldsymbol{q_i^0})$ ortogonalna. Budući da je $T\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{q_i^0}$ za $i=1,2,3$ imamo da je matrica tog operatora u bazi $(\boldsymbol{e_i})$:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1}\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Zbog ortogonalnosti matrica (1.17) "može se čitati" i po stupcima i po recima: tako je npr.

$$\boldsymbol{q_j^0} = \frac{1}{h_j}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\boldsymbol{e_i},\quad \boldsymbol{e_i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{h_j}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\boldsymbol{q_j^0}. \tag{1.18}$$

Radi lakšeg pamćenja zapisat ćemo (1.17) u slijedećem obliku:

$$\begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{q_1^0} & \boldsymbol{q_2^0} & \boldsymbol{q_3^0} \\ \hline \boldsymbol{e_1} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_3} \\ \boldsymbol{e_2} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial q_3} \\ \boldsymbol{e_3} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial \hat{x}_3}{\partial q_3} \end{array} \tag{1.19}$$

Zadatak 28. *U ortogonalnom koordinatnom sustavu je* $|\det(\nabla\hat{x})| = h_1 h_2 h_3$.

Uočimo sada da definiciju baznih vektora možemo zapisati u sljedećem kompaktnom obliku: za $i = 1, 2, 3$ vrijedi:

$$(D\hat{\mathbf{x}})\mathbf{e_i} = h_i \mathbf{q_i^0}. \tag{1.20}$$

Koristeći teorem o inverznoj funkciji koji kaže da je $(D\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{q}))^{-1} = D\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ za $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{q})$, dobivamo:

$$\mathbf{e_i} = h_i D\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x})\mathbf{q_i^0}. \tag{1.21}$$

Odatle pak slijedi:

$$\begin{aligned}(D\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))^\tau \mathbf{e_i} &= \sum_{j=1}^{3} \mathbf{q_j^0}(\mathbf{q_j^0} \cdot (D\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))^\tau \mathbf{e_i}) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{q_j^0}(D\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x})\mathbf{q_j^0} \cdot \mathbf{e_i}) \\ &= \sum_{j=1}^{3} \mathbf{q_j^0}(\frac{1}{h_j}\mathbf{e_j} \cdot \mathbf{e_i}) = \mathbf{q_i^0}\frac{1}{h_i}.\end{aligned}$$

Time smo dobili:

$$(D\hat{\mathbf{q}})^\tau \mathbf{e_i} = \frac{1}{h_i}\mathbf{q_i^0}. \tag{1.22}$$

Sada možemo izračunati gradijent skalarne funkcije u krivolinijskim koordinatama. Neka nam je zadana funkcija $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ te označimo $\tilde{\phi} = \phi \circ \hat{\mathbf{x}}$ U primjenama krivolinijskih koordinata mi redovito znamo funkciju $\tilde{\phi}$ i htjeli bismo gradijent funkcije ϕ izraziti preko parcijalnih derivacija funkcije $\tilde{\phi}$ i krivolinijskih baznih vektora $\mathbf{q_i^0}$. Za $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{q})$ imamo:

$$D\phi(\mathbf{x})[\mathbf{h}] = D(\tilde{\phi} \circ \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))[\mathbf{h}] = D(\tilde{\phi}(\mathbf{q}))[D\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))[\mathbf{h}]]$$

odnosno

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \nabla_{\mathbf{q}}\tilde{\phi}(\mathbf{q}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))\mathbf{h} = (\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))^\tau \nabla_{\mathbf{q}}\tilde{\phi}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{h}.$$

Time smo dobili $\nabla\phi(\mathbf{x}) = (\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))^\tau \nabla_{\mathbf{q}}\tilde{\phi}(\mathbf{q})$. Raspišimo sada $\nabla_{\mathbf{q}}\tilde{\phi}(\mathbf{q})$ kao

$$\nabla_{\mathbf{q}}\tilde{\phi}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\tilde{\phi}(\mathbf{q})}{\partial q_i}\mathbf{e_i}$$

i iskoristimo (1.22) da bismo dobili za $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{q})$:

$$\boxed{\nabla\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i}\frac{\partial\tilde{\phi}(\mathbf{q})}{\partial q_i}\mathbf{q_i^0}.} \tag{1.23}$$

Zadana je vektorska funkcija $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Imamo $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{v}} \circ \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ i stoga za $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{q})$,

$$\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\nabla_{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{q}))(\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))$$

Uzmimo $\tilde{\mathbf{v}}$ u obliku

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{3} v_i(\mathbf{q})\mathbf{q_i^0}.$$

Tada je prema formuli (1.8)

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) &= \sum_{k=1}^{3} v_k(\mathbf{q})\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{q_k^0} + \sum_{i=1}^{3} \mathbf{q_i^0} \otimes \nabla_{\mathbf{q}} v_i(\mathbf{q}) \\
&= \sum_{i=1}^{3} v_k(\mathbf{q})\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{q_k^0} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v_i(\mathbf{q})}{\partial q_j}\mathbf{q_i^0} \otimes \mathbf{e_j}
\end{aligned}$$

stoga korištenjem (1.22) slijedi

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^{3} v_k(\mathbf{q})(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{q_k^0})(\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x})) + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i(\mathbf{q})}{\partial q_j}\mathbf{q_i^0} \otimes (\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))^{\tau}\mathbf{e_j} \\
&= \sum_{k=1}^{3} v_k(\mathbf{q})(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{q_k^0})(\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x})) + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j}\frac{\partial v_i(\mathbf{q})}{\partial q_j}\mathbf{q_i^0} \otimes \mathbf{q_j^0}
\end{aligned}$$

Raspisujemo koristeći (1.21),

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{q_k^0})(\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x})) &= \sum_{i,j=1}^{3} [(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{q_k^0})(\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))\mathbf{q_j^0} \cdot \mathbf{q_i^0}](\mathbf{q_i^0} \otimes \mathbf{q_j^0}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{h_j}[(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{q_k^0})\mathbf{e_j} \cdot \mathbf{q_i^0}](\mathbf{q_i^0} \otimes \mathbf{q_j^0}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{h_j}[\frac{\partial \mathbf{q_k^0}}{\partial q_j} \cdot \mathbf{q_i^0}](\mathbf{q_i^0} \otimes \mathbf{q_j^0}) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{h_j}\Gamma_{j,k}^{i}(\mathbf{q_i^0} \otimes \mathbf{q_j^0}),
\end{aligned}$$

gdje smo uveli Christoffelove simbole:

$$\boxed{\Gamma_{j,k}^{i} = \mathbf{q_i^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{q_k^0}}{\partial q_j}} \tag{1.24}$$

Sada je

$$\boxed{\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{h_j}\left[\sum_{k=1}^{3} \Gamma_{j,k}^{i} v_k(\mathbf{q}) + \frac{\partial v_i(\mathbf{q})}{\partial q_j}\right](\mathbf{q_i^0} \otimes \mathbf{q_j^0}).} \tag{1.25}$$

Uočimo da Christoffelovi simboli čine koeficijente u rastavu derivacija vektora baze:

$$\frac{\partial \mathbf{q_k^0}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3} \Gamma_{j,k}^{i}\mathbf{q_i^0} \tag{1.26}$$

Zadatak 29. *Pokažite sljedeća svojstva Christoffelovih simbola:*

1. $\Gamma^i_{j,k} = -\Gamma^k_{j,i}$ *za* $k \neq i$ *i za sve* j*;*
2. $\Gamma^i_{j,i} = 0$ *za sve* i, j*;*
3. *Za sve* $i \neq j$ *vrijedi*
$$\Gamma^i_{i,j} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial q_j};$$
4. *Za sve* i, j, k *za koje* $i \notin \{j, k\}$ *vrijedi*
$$h_k \Gamma^i_{j,k} = h_j \Gamma^i_{k,j};$$
5. $\Gamma^i_{j,k} = 0$ *ako su* i, j *i* k *međusobno različiti.*

Zadatak 30. *Na osnovu prethodnog zadatka pokažite da su matrice* $\Gamma^i = (\Gamma^i_{j,k})$ *dane sljedećim izrazima:*

$$\Gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} \\ 0 & -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q_1} \end{bmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} & 0 & \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial q_2} \end{bmatrix}, \quad \Gamma^3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3} & 0 \\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial q_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Uputa: Točku 1 iz prošlog zadatka treba iskoristiti za $k = j$*, što daje dijagonalne članove:*

$$\Gamma^i_{j,j} = -\Gamma^j_{j,i} = -\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial q_i}.$$

Izračunajmo divergenciju vektorskog polja. Iz formule (1.25) slijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\nabla \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i}\left[\sum_{k=1}^3 \Gamma^i_{i,k} v_k(\mathbf{q}) + \frac{\partial v_i(\mathbf{q})}{\partial q_i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^3 \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial q_k} v_k(\mathbf{q}) + \frac{\partial v_i(\mathbf{q})}{\partial q_i}\right] \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{h_k}\Big(\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^3 \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial q_k}\Big) v_k(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i}\frac{\partial v_i(\mathbf{q})}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Za prvi član na desnoj strani imamo:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^3 \frac{1}{h_k}\Big(\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^3 \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial q_k}\Big) v_k(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{h_1}\Big(\sum_{\substack{i=1\\i\neq 1}}^3 \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial q_1}\Big) v_1(\mathbf{q}) + \frac{1}{h_2}\Big(\sum_{\substack{i=1\\i\neq 2}}^3 \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial q_2}\Big) v_2(\mathbf{q}) + \frac{1}{h_3}\Big(\sum_{\substack{i=1\\i\neq 3}}^3 \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial q_3}\Big) v_3(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{h_1}\Big(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial q_1}\Big) v_1(\mathbf{q}) + \frac{1}{h_2}\Big(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial q_2}\Big) v_2(\mathbf{q}) + \frac{1}{h_3}\Big(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_3}\Big) v_3(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

Odavdje je,

$$
\begin{aligned}
& h_1h_2h_3\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{h_k}(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial q_k})v_k(\mathbf{q})\\
&= (h_3\frac{\partial h_2}{\partial q_1}+h_2\frac{\partial h_3}{\partial q_1})v_1(\mathbf{q})+(h_3\frac{\partial h_1}{\partial q_2}+h_1\frac{\partial h_3}{\partial q_2})v_2(\mathbf{q})+(h_2\frac{\partial h_1}{\partial q_3}+h_1\frac{\partial h_2}{\partial q_3})v_3(\mathbf{q})\\
&= \frac{\partial(h_2h_3)}{\partial q_1}v_1(\mathbf{q})+\frac{\partial(h_1h_3)}{\partial q_2}v_2(\mathbf{q})+\frac{\partial(h_1h_2)}{\partial q_3}v_3(\mathbf{q}).
\end{aligned}
$$

Drugi član u izrazu (1.27) daje

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial v_i(\mathbf{q})}{\partial q_i} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial v_1(\mathbf{q})}{\partial q_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial v_2(\mathbf{q})}{\partial q_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial v_3(\mathbf{q})}{\partial q_3}\\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(h_2h_3\frac{\partial v_1(\mathbf{q})}{\partial q_1}+h_1h_3\frac{\partial v_2(\mathbf{q})}{\partial q_2}+h_1h_2\frac{\partial v_3(\mathbf{q})}{\partial q_3}\right)\\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3v_1(\mathbf{q}))+\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3v_2(\mathbf{q}))+\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2v_3(\mathbf{q}))\right)\\
&- \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(v_1(\mathbf{q})\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3)+v_2(\mathbf{q})\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3)+v_3(\mathbf{q})\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2)\right)
\end{aligned}
$$

Zbrajanjem dobivenih izraza izlazi:

$$
\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3v_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3v_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2v_3)\right). \tag{1.28}
$$

Zadatak 31. *Pokažite da za laplasijan skalarne funkcije vrijedi:*

$$
\Delta\phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2})+\frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3})\right). \tag{1.29}
$$

Zadatak 32. *Ispitajte cilindričan koordinatni sustav i izračunajte osnovne diferencijalne operatore u cilindričnom sustavu.*

Rješenje. Neka je u prostoru E postavljen Kartezijev koordinatni sustav $(O;\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})$. Tada su svakoj točki prostora pridružene koordinate (x_1,x_2,x_3) i baza pridruženog vektorskog prostora $(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})$. S druge strane svakoj točki prostora možemo pridružiti uređenu trojku brojeva $\mathbf{q}=(r,\varphi,z)$, $r\in[0,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi)$, $z\in\mathbf{R}$, prema slici. Veza s Kartezijevim koordinatama točke je

$$
x_1=r\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\varphi,\quad x_3=z. \tag{1.30}
$$

Inverzno preslikavanje je dano s $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $z=x_3$, a kut φ je jednoznačno određen formulama

$$
\cos\varphi=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\quad \sin\varphi=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.
$$

Odavde vidimo da se cilindrični koordinatni sustav ne može uvesti u cijeli prostor budući da preslikavanje (1.30) nije injektivno pri $r = 0$. Stoga za skup Ω treba uzeti $\mathbf{R}^3 \backslash \{(0,0,x_3) : x_3 \in \mathbf{R}\}$, a za Ω_1 skup[1] $(0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbf{R}$. S praktičnog stajališta ovaj nedostatak cilindričnog sustava ne pravi poteškoće budući da su točke na x_3-osi posve određene z-koordinatom; koordinata φ za te točke ostaje nedefinirana.

Neka je $\mathbf{x}_0$ točka prostora s koordinatama (r_0, φ_0, z_0), koja se ne nalazi na x_3-osi tj. z-osi. Kroz nju prolaze tri *koordinatne linije* određene preslikavanjima:

$$r \mapsto (r, \varphi_0, z_0), \quad \varphi \mapsto (r_0, \varphi, z_0), \quad z \mapsto (r_0, \varphi_0, z).$$

Jedinične tangencijalne vektore na koordinatne linije u točki $\mathbf{x}_0$ označimo respektivno s $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_0$ i $\boldsymbol{k}$. Lako je vidjeti da su r-koordinatna linija i z-koordinatna linija pravci, a da je φ-linija kružnica. Kako je z-koordinatna linija pravac paralelan x_3-osi to je njen tangencijalni vektor $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e_3}$. Nadalje, φ-linija ima parametrizaciju:

$$\hat{\mathbf{x}}(\varphi) = r_0 \cos\varphi \boldsymbol{e_1} + r_0 \sin\varphi \boldsymbol{e_2} + z_0 \boldsymbol{e_3}.$$

Deriviranjem po kutu φ dobivamo

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{d\varphi}(\varphi) = -r_0 \sin\varphi \boldsymbol{e_1} + r_0 \cos\varphi \boldsymbol{e_2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = -\sin\varphi \boldsymbol{e_1} + \cos\varphi \boldsymbol{e_2}.$$

Analogno se dobiva

$$\mathbf{r}_0 = \cos\varphi \boldsymbol{e_1} + \sin\varphi \boldsymbol{e_2},$$

a Laméovi parametri su

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\varphi = r, \quad h_3 = h_z = 1.$$

S lakoćom se vidi da je baza $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{k})$ ortogonormirana u svakoj točki prostora (osim, naravno na z-osi, gdje nije definirana).

Christoffelovi simboli su dani sljedećim izrazima:

$$\Gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gradijent skalarne funkcije:

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \varphi} \varphi_{\mathbf{0}} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \mathbf{k}. \tag{1.31}$$

Matrica gradijenta vektorske funkcije zapisan u bazi $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{k})$:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} v_\varphi & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} v_r & \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{1.32}$$

[1] Ovako definiran skup Ω_1 nije otvoren, no to ne pravi poteškoće.

Posebno slijedi:

$$\nabla \mathbf{r_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla \phi_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

Divergencija vektorske funkcije :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{1.34}$$

Laplace skalarne funkcije:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \tag{1.35}$$

Divergenciju tenzorskog polja možemo izračunati iz formula

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{r_0} &= \operatorname{div}(\mathbf{T}^\tau \mathbf{r_0}) - \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{r_0} \\ \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \varphi_{\mathbf{0}} &= \operatorname{div}(\mathbf{T}^\tau \varphi_{\mathbf{0}}) - \mathbf{T} \cdot \nabla \varphi_{\mathbf{0}} \\ \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{k} &= \operatorname{div}(\mathbf{T}^\tau \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Pri tome uzimamo da $\mathbf{T}$ ima u bazi $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{k})$ matricu:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\varphi} & T_{rz} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\varphi} & T_{\varphi z} \\ T_{zr} & T_{z\varphi} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

Vektor komponenti od $\operatorname{div} \mathbf{T}$ u bazi $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{k})$:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r T_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \frac{1}{r}T_{\varphi\varphi} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r T_{\varphi r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{1}{r}T_{r\varphi} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r T_{zr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

Budući da imamo ortonormiranu bazu trag matrice u njoj računamo kao sumu elemenata na dijagonali pa Laplace vektorske funkcije računamo po formuli: $\Delta \mathbf{u} = \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u})$; vektor komponenti u bazi $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{k})$:

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_r}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}. \tag{1.37}$$

Zadatak 33. *Ispitajte sferni koordinatni sustav i izračunajte osnovne diferencijalne operatore u sfernom sustavu.*

Rješenje. Neka je u prostoru E postavljen Kartezijev koordinatni sustav $(O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$. Tada su svakoj točki prostora pridružene koordinate (x_1, x_2, x_3) i baza pridruženog vektorskog prostora $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$. Svakoj točki prostora, koja se ne nalazi na x_3-osi možemo pridružiti uređenu trojku brojeva (r, θ, φ), $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, kao na slici. Tada je veza s Kartezijevim koordinatama točke:

$$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi, \quad x_2 = r \sin\theta \sin\varphi, \quad x_3 = r \cos\theta. \tag{1.38}$$

Lako se provjerava da je preslikavanje (1.38) injektivno, odnosno da je svaka točka prostora E koja ne leži na x_3-osi jedinstveno određena koordinatama (r, θ, φ). Formule kojima se (r, θ, φ) određuju iz (x_1, x_2, x_3) su

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \cos\theta = \frac{x_3}{r}, \quad \cos\varphi = \frac{x_1}{r\sin\theta}, \quad \sin\varphi = \frac{x_2}{r\sin\theta}.$$

Prva jednakost jedinstveno određuje r, pa je onda drugom jedinstveno određen kut $\theta \in [0, \pi]$; kut φ je određen s posljednje dvije jednakosti.

Točke koje se nalaze na x_3-osi posve su određene r-koordinatom i kutem θ. Koordinata φ za te točke ostaje nedefinirana; u ishodištu koordinatnog sustava nije definirana niti koordinata θ.

Dakle, vidimo da sferni koordinatni sustav ne možemo uvesti u cijeli prostor već samo u skup $\Omega = \mathbf{R}^3 \backslash \{(0, 0, x_3) \colon x_3 \in \mathbf{R}\}$. Za skup[2] Ω_1 treba uzeti $(0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi)$. S praktičnog stajališta ovaj nedostatak sfernog sustava ne pravi poteškoće.

Neka je $\mathbf{x}_0$ proizvoljna točka prostora s koordinatama $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, koja se ne nalazi na x_3-osi. Kroz nju prolaze tri *koordinatne linije* određene preslikavanjima:

$$r \mapsto (r, \theta_0, \varphi_0), \quad \theta \mapsto (r_0, \theta, \varphi_0), \quad \varphi \mapsto (r_0, \theta_0, \varphi).$$

Jedinične tangencijalne vektore na koordinatne linije u točki $\mathbf{x}_0$ označimo respektivno s $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\theta}_0$ i $\boldsymbol{\varphi}_0$. Lako je vidjeti da je r-koordinatna linija pravac, a da su θ-koordinatna linija i φ-linija kružnice (vidi sliku).

Za φ-liniju imamo parametrizaciju

$$\hat{\mathbf{x}}(\varphi) = r_0 \sin\theta_0 \cos\varphi \boldsymbol{e_1} + r_0 \sin\theta_0 \sin\varphi \boldsymbol{e_2} + r_0 \cos\theta_0 \boldsymbol{e_3};$$

deriviranjem po kutu φ dobivamo

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{d\varphi}(\varphi) = r_0(-\sin\theta_0 \sin\varphi \boldsymbol{e_1} + \sin\theta_0 \cos\varphi \boldsymbol{e_2}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = -\sin\varphi \boldsymbol{e_1} + \cos\varphi \boldsymbol{e_2}.$$

Analogno se dobiva

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \cos\theta \cos\varphi \boldsymbol{e_1} + \cos\theta \sin\varphi \boldsymbol{e_2} - \sin\theta \boldsymbol{e_3}, \tag{1.39}$$

$$\mathbf{r}_0 = \sin\theta \cos\varphi \boldsymbol{e_1} + \sin\theta \sin\varphi \boldsymbol{e_2} + \cos\theta \boldsymbol{e_3}. \tag{1.40}$$

[2] Ovako definiran skup Ω_1 nije otvoren, no to ne pravi poteškoće.

Odavde je lako vidjeti da su Laméovi parametri

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\varphi = r\sin\theta, \tag{1.41}$$

da je baza $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$ ortonormirana u svakoj točki prostora u kojoj je definirana.

Gradijent skalarne funkcije:

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial r}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\theta}\theta_{\mathbf{0}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\varphi}\varphi_{\mathbf{0}}. \tag{1.42}$$

Matrica gradijent vektorske funkcije zapisana u bazi $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$:

$$\nabla\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}v_\theta & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}v_\varphi \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}v_r & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta\, v_\varphi \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta\, v_\theta \end{bmatrix}. \tag{1.43}$$

Divergencija vektorske funkcije:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta\, v_\theta. \tag{1.44}$$

Laplace skalarne funkcije:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}. \tag{1.45}$$

Neka $\mathbf{T}$ ima u bazi $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$ matricu:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\varphi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\varphi} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\theta} & T_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

Vektor komponenti od $\operatorname{div}\mathbf{T}$ u bazi $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$:

$$\operatorname{div}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(T_{rr} + \operatorname{ctg}\theta\, T_{r\theta} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{\theta r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta\,(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{\varphi r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(T_{\varphi r} + T_{r\varphi}) + \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta\,(T_{\varphi\theta} + T_{\theta\varphi}) \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

Vektor komponenti od $\Delta\mathbf{u} = \operatorname{div}(\nabla\mathbf{u})$ u bazi $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$:

$$\Delta\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\varphi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\, v_\theta \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}v_\theta \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}v_\varphi \end{bmatrix}. \tag{1.47}$$

Bibliografija

[1] Ibrahim Aganović. *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*. Element, Zagreb, 2003.

[2] Philippe G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Volume I: Three-Dimensional Elasticity*. North-Holland, 1988.

[3] Morton E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981.