GLASNIK MATEMATIČKI
Vol. 44(64)(2009), 211 – 214

SUR LES PLONGEMENTS DANS UN PRODUIT SYMÉTRIQUE DE COMPACTS DE DIMENSION UN

Robert Cauty
Université Paris 6, France

Abstract. We give a necessary condition for the embedding of a compactum in a symmetric product of a one dimensional compactum.

La dimension utilisée dans cet article est celle au sens des recouvrements. Pour tout compact X, nous notons $H^n(X)$ le n-ème groupe de cohomologie de Čech de X à coefficients rationnels, $n \geq 0$, et $H^*(X)$ l'anneau de cohomologie de X à coefficients rationnels. L'homomorphisme de $H^n(Y)$ dans $H^n(X)$ induit par une fonction continue $f : X \to Y$ sera noté f^*. Nous notons $\Lambda(e)$ l'algèbre extérieure (sur $\mathbb{Q}$) engendrée par un élément e.

Nous notons $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique des permutations d'ordre n. Pour tout espace X et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la formule

$$\sigma \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

définit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur le produit X^n de n copies de X. Nous notons $X[n]$ le quotient de X^n par cette action. Si X est compact et $n = 2$, alors $X[2]$ est homéomorphe à l'hyperespace $F_2(X)$ des sous-ensembles non vides de X contenant au plus deux points avec la topologie de Vietoris, donc le théorème[1] suivant résout en particulier le problème 83.14 de [3].

Théorème 1. *Soit X un compact de dimension un. Si Y est un sous-ensemble compact de $X[n]$ tel que $H^n(Y) \neq 0$, alors $H^*(Y)$ contient une sous-algèbre de la forme $\Lambda(e_1) \otimes \cdots \otimes \Lambda(e_n)$, où e_i appartient à $H^1(Y)$ pour tout $i \leq n$.*

2000 *Mathematics Subject Classification.* 54B20, 54F50.
Key words and phrases. Symmetric product, permutation product.

[1] Un résultat analogue est implicite dans un article récent de Koyama, Krasinkiewicz et Spież [4], mais leur démonstration est complètement différente.

Preuve. Pour $k \leq n$, soit X_k une copie du compact X, et soit $X^n = \prod_{k=1}^n X_k$. Notons $\pi : X^n \to X[n]$ la projection, $Z = \pi^{-1}(Y)$, $i : Z \to X^n$ l'inclusion et $\rho : Z \to Y$ la restriction de π. Pour $k \leq n$, soit p_k la projection de X^n sur X_k, et soit $q_k = p_k \circ i$ la restriction de p_k à Z.

Le compact Z est invariant par l'action de $\mathfrak{S}_n$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, nous notons encore σ la fonction de Z dans lui-même induite par cette permutation et, pour tout entier m, nous posons

$$N^* = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma^* : H^m(Z) \to H^m(Z).$$

Pour tout $m \geq 0$, il existe (voir [1], chapitre III) un homomorphisme de transfert $\mu : H^m(Z) \to H^m(Y)$ vérifiant

$$\begin{aligned} \mu \circ \rho^* &= n! : H^m(Y) \to H^m(Y), \\ \rho^* \circ \mu &= N^* : H^m(Z) \to H^m(Z). \end{aligned}$$

Comme $H^m(Y)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, la relation $\mu \circ \rho^* = n!$ entraîne que ρ^* est injectif. Soit $0 \neq a \in H^n(Y)$. Comme X est de dimension un, le produit X^n est de dimension n, donc $H^{n+1}(X^n, Z) = 0$, et l'homomorphisme $i^* : H^n(X^n) \to H^n(Z)$ est surjectif. Soit $b \in H^n(X^n)$ tel que $i^*(b) = \rho^*(a)$.

La formule de Künneth s'applique à un produit de compacts et à la cohomologie de Čech à coefficients rationnels (voir par exemple [5, chapitres 6 et 7]; la cohomologie de Čech coïncide avec celle construite dans la première partie de [5]). Comme X est de dimension un, $H^j(X) = 0$ pour $j > 1$, et il en résulte par récurrence que la fonction

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto p_1^*(u_1) \smile \cdots \smile p_n(u_n)$$

est un isomorphisme de $H^1(X_1) \otimes \cdots \otimes H^1(X_n)$ sur $H^n(X^n)$. L'élément $b \in H^n(X^n)$ est donc de la forme

$$b = \sum_{r=1}^{\ell} p_1^*(u_1^r) \smile \cdots \smile p_n^*(u_n^r),$$

d'où, puisque $q_k = p_k \circ i$,

$$\rho^*(a) = i^*(b) = \sum_{r=1}^{\ell} q_1^*(u_1^r) \smile \cdots \smile q_n^*(u_n^r).$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, nous avons $\rho \circ \sigma = \rho$, d'où $\sigma^*(\rho^*(a)) = \rho^*(a)$. Par conséquent, $N^*(\rho^*(a)) = (n!)\rho^*(a) \neq 0$ puisque $\rho^*(a)$ est un élément non nul du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^n(Z)$. Nous avons aussi

$$N^*(\rho^*(a)) = \sum_{r=1}^{\ell} N^*\big(q_1^*(u_1^r)\big) \smile \cdots \smile N^*\big(q_n^*(u_n^r)\big),$$

et il existe r tel que $N^*\big(q_1^*(u_1^r)\big) \smile \cdots \smile N^*\big(q_n^*(u_n^r)\big) \neq 0$. Pour $1 \leq i \leq n$, soit $e_i = \mu(q_i^*(u_i^r)) \in H^1(Y)$. Pour $k \leq n$, soit M_k l'ensemble des suites $i_1, \ldots, i_k$ d'entiers vérifiant $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Pour $I = \{i_1, \ldots, i_j\} \in M_k$, posons $e_I = e_{i_1} \smile \cdots \smile e_{i_k}$. Puisque e_i est de dimension un, nous avons $e_i \smile e_i = 0$ pour tout i, donc, pour montrer que la sous-algèbre de $H^*(Y)$ engendrée par $e_1, \ldots, e_n$ est isomorphe à $\Lambda(e_1) \otimes \cdots \otimes \Lambda(e_n)$, il suffit de vérifier que, pour tout $k \leq n$, les éléments e_I avec $I \in M_k$ sont linéairement indépendants. Supposons le contraire. Nous avons alors une relation

$$\sum_{I \in M_k} \alpha_I e_I = 0, \tag{1}$$

où les α_I sont des rationnels non tous nuls. Soit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ tel que $\alpha_I \neq 0$, et soit $J = \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$ la suite complémentaire dans $\{1, \ldots, n\}$. Si $I' = \{i'_1, \ldots, i'_k\}$ est un élément de M_k distinct de I, il existe s et t tels que $i'_s = j_t$, d'où $e_{I'} \smile e_J = 0$. Comme $e_I \smile e_J = \pm e_1 \smile \cdots \smile e_n$, en multipliant la relation (1) par e_J, nous obtenons $\alpha_I e_1 \smile \cdots \smile e_n = 0$, donc $e_1 \smile \cdots \smile e_n = 0$. Mais alors

$$\begin{aligned} 0 &= \rho^*(e_1 \smile \cdots \smile e_n) = \rho^*(e_1) \smile \cdots \smile \rho^*(e_n) \\ &= \rho^* \circ \mu(q_1^*(u_1^r)) \smile \cdots \smile \rho^* \circ \mu(q_n^*(u_n^r)) \\ &= N^*\big(q_1^*(u_1^r)\big) \smile \cdots \smile N^*\big(q_n(u_n^r)\big), \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire. ∎

Le Théorème 1 peut s'étendre à des dimensions supérieures. Le cadre naturel de cette généralisation est la dimension cohomologique sur $\mathbb{Q}$, que nous notons $\dim_{\mathbb{Q}}$ (voir par exemple [2] pour sa définition et les propriétés que nous utilisons).

THÉORÈME 2. *Soit X un compact tel que $\dim_{\mathbb{Q}} X = d > 0$. Si Y est un sous-ensemble compact de $X[n]$ tel que $H^{nd}(Y) \neq 0$, alors $H^*(Y)$ contient une sous-algèbre de la forme $\Lambda(e_1) \otimes \cdots \otimes \Lambda(e_n)$, où e_i appartient à $H^d(Y)$ pour tout i.*

PREUVE. Si $\dim_{\mathbb{Q}} X = d$, alors $H^p(X) = 0$ pour $p > d$, $\dim_{\mathbb{Q}} X^n = nd$ et $H^{nd+1}(X, Z) = 0$ pour tout compact Z de X. La démonstration du Théorème 1 s'applique donc avec une seule différence: il faut vérifier que $e_i \smile e_i = 0$, ce qui n'est plus automatique dans le cas où d est pair. Nous avons

$$\begin{aligned} \rho^*(e_i \smile e_i) &= \rho^*(e_i) \smile \rho^*(e_i) = \rho^* \circ \mu(q_i^*(u_i^r)) \smile \rho^* \circ \mu(q_i^*(u_i^r)) \\ &= N^*\big(q_i^*(u_i^r)\big) \smile N^*\big(q_i^*(u_i^r)\big) = N^* \circ q_i^*(u_i^r \smile u_i^r) = 0 \end{aligned}$$

puisque $u_i^r \smile u_i^r$ appartient à $H^{2d}(X_i) = 0$. Comme ρ^* est injectif, nous avons bien $e_i \smile e_i = 0$. ∎

References

[1] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press, New York-London, 1972.
[2] J. Dydak, *Cohomological dimension theory*, in: Handbook of Geometric Topology, R. J. Daverman and R. B. Sher editors, North-Holland, Amsterdam, 2002, 423-470.
[3] A. Illanes and S. B. Nadler Jr, Hyperspaces. Fundamentals and recent advances, Marcel Dekker, New York, 1999.
[4] A. Koyama, J. Krasinkiewicz and S. Spież, *Embedding compacta into products of curves*, preprint, arXiv:math.GT/0712.3470.
[5] W. S. Massey, Homology and cohomology theory, Marcel Dekker, New York-Basel, 1978.

R. Cauty
Université Paris 6
Institut de Mathématiques
case 247, 4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France
E-mail: cauty@math.jussieu.fr

Received: 9.4.2008.