

Matematika (biolozi) - 1. kolokvij  
9. 11. 2012.

1. (a) (2 boda) Odredi sve  $x$  i  $y$  tako da matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & 4 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & y \end{bmatrix}$  komutiraju.

(b) (1 bod) Definirajte jednakost matrica.

2. (3 boda) Pažljivo pročitajte sljedeće tvrdnji.

Zaokružite  $T$  ako je tvrdnja točna ili  $N$  ako je netočna.

Množenje matrica je komutativno.  $T$   $N$

Zamijenimo li stupce u matrici sustava, rješenje sustava se neće promjeniti.  $T$   $N$

Homogen sustav ima samo trivijalno rješenje.  $T$   $N$

Matrica i njena transponirana matrica imaju istu determinantu.  $T$   $N$

Za kvadratne matrice  $A$  i  $B$  vrijedi  $\det(A + B) = \det A + \det B$ .  $T$   $N$

Matrica je punog ranga ako i samo ako joj je determinanta različita od nule.  $T$   $N$

3. (3 boda) Za matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  odredite matricu  $X$  takvu da vrijedi

$$(BA^{-1} + X)A = 2B + X.$$

4. (a) (4 boda) Gaussovom metodom eliminacija riješite sustav

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 5, \\2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 7, \\-x_1 + \phantom{2x_2} + x_3 - 2x_4 &= 1.\end{aligned}$$

Rješenje zapišite u vektorskom obliku.

(b) (1 boda) Koliki je rang neproširene matrice gornjeg sustava?

(c) (2 boda) Iskažite Kronecker-Capellijev teorem.

5. (a) (5 bodova) U ovisnosti o parametru  $t \in \mathbb{R}$  odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ t & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) (2 boda) Jesu li vektori  $(1, 7, 4, 2)$ ,  $(1, 17, 10, 4)$  i  $(4, 3, 1, 3)$  linearno nezavisni? Obrazložite svoj odgovor. (Uputa: Možete iskoristiti a) dio zadatka! )

(c) (3 boda) Definirajte pojam linearne nezavisnosti vektora. Navedite tri vektora tipa  $3 \times 1$  koji su linearno nezavisni, te tri koja su linearno zavisna.

6. (a) (3 boda) Odredite  $x \in \mathbb{R}$  takav da je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & x & 1 \end{bmatrix}$$

singularna.

- (b) (3 boda) Formulirajte elementarne transformacije po retcima, te navedite kakav utjecaj imaju na rješenja sustava linearnih jednadžbi, a kakav na vrijednost determinante.

7. (3 boda) Neka su  $A$  i  $B$  kvadratne matrice takve da je  $\det A = 2$  i  $\det(A^{-3}B) = 1$ . Odredite  $\det B^2$ . Koji teorem s predavanja ste koristili?

8. (a) (2 boda) Definirajte skalarni produkt vektora, te kako se računa iz koordinata.

(b) (3 boda) Neka su  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  ne-nul vektori takvi da su  $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$  i  $\mathbf{b}$  okomiti, a kut između  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  jednak  $\frac{2\pi}{3}$ . Ako je  $|\mathbf{a}| = 2$ , odredite  $|\mathbf{b}|$ .

9. (a) (2 boda) Ako je  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 6$ , koliko je  $(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$ ? Obrazložite svoj odgovor.

(b) (2 boda) Odredite volumen tetraedra s vrhovima  $A = (2, 0, 0)$ ,  $B = (5, 2, 0)$ ,  $C = (1, 0, 2)$  i  $D = (3, 0, 1)$ .