SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODJEL

Ilja Gogić

Potpuno ograničeni operatori i subhomogene C*-algebre

Disertacija

Zagreb, lipanj 2010.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODJEL

Ilja Gogić

Potpuno ograničeni operatori i subhomogene C*-algebre

Disertacija

Voditelji: prof. dr. sc. Bojan Magajna
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, lipanj 2010.

Ova disertacija je predana na ocjenu Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilista u Zagrebu u svrhu stjecanja znanstvenog stupnja doktora prirodnih znanosti iz područja matematike.

Sadržaj

Uvod

Kako bismo razumjeli strukturu operatora i prostora nad kojima oni djeluju često je korisno promatrati mogućnost aproksimacije tih operatora s operatorima jednostavnijeg oblika, kao što su to npr. operatori konačnog ranga. Pri radu s C*-algebrom A, za osnovne građevne blokove prirodno je uzeti operatore obostranog množenja $M_{a,b} : x \mapsto axb$ (umjesto operatora ranga jedan), gdje su a i b elementi iz multiplikatorske algebre $M(A)$ od A, dok ulogu operatora konačnog ranga preuzimaju tzv. *elementarni operatori*, koji su po definiciji konačne sume operatora obostranog množenja. Primijetimo da su elementarni operatori na A ograničeni, modularni nad centrom od $M(A)$ i da čuvaju ideale od A (pod idealom u C*-algebri smatramo obostrani i zatvoreni ideal). Štoviše, nije teško vidjeti da je svaki elementarni operator $T = \sum_{i=1}^{d} M_{a_i,b_i}$ potpuno ograničen, pri čemu za njegovu cb-normu vrijedi ocjena

$$\|T\|_{cb} \leq \left\| \sum_{i=1}^{d} a_i a_i^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^{d} b_i^* b_i \right\|^{\frac{1}{2}}. \tag{0.1}$$

Ako s $\mathrm{E}(A)$ označimo skup svih elementarnih operatora na A i ako algebarski tenzorski produkt $M(A) \otimes M(A)$ opskrbimo s Haagerupovom normom

$$\|t\|_h := \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{d} a_i a_i^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^{d} b_i^* b_i \right\|^{\frac{1}{2}} : t = \sum_{i=1}^{d} a_i \otimes b_i \right\},$$

tada iz (0.1) slijedi da je kanonsko preslikavanje $M(A) \otimes M(A) \to \mathrm{E}(A)$ dano s

$$\sum_{i=1}^{d} a_i \otimes b_i \mapsto \sum_{i=1}^{d} M_{a_i,b_i}$$

kontraktivno s obzirom na cb-normu na $\mathrm{E}(A)$. Dakle, ako s $M(A) \otimes_h M(A)$ i $\mathrm{ICB}(A)$ redom označimo pripadni upotpunjeni Haagerupov tenzorski produkt i skup svih potpuno ograničenih operatora na A koji čuvaju ideale od A, tada dolazimo do tzv. *kanonske kontrakcije* $\Theta_A : M(A) \otimes_h M(A) \to \mathrm{ICB}(A)$.

Osnovna tri pitanja vezana uz kontrakciju Θ_A su pitanja karakterizacije onih A za koje je Θ_A injekcija, izometrija, odnosno surjekcija.

Ukoliko C*-algebra A sadrži par ortogonalnih ne-nul ideala, tada očito Θ_A neće biti injekcija. Drugim riječima, nužan uvjet da bi Θ_A bila injekcija je da je A prim

C*-algebra. Mathieu je u [49] dokazao i obrat te tvrdnje. Interesantno je (i vrlo netrivijalno) da je u tom slučaju Θ_A i izometrija. Dakle, vrijedi

$$\Theta_A \text{ je injekcija} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta_A \text{ je izometrija} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ je prim.}$$

Dokaz te činjenice je najprije proveo Haagerup u svom neobjavljenom radu [37] za slučaj $A = \mathrm{B}(\mathcal{H})$ (C*-algebra svih ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$), a zatim je taj rezultat Mathieu poopćio i na sve prim C*-algebre (vidjeti [5]). Ako A nije prim, tada je prirodno promatrati centralni Haagerupov tenzorski produkt $M(A) \otimes_{Z,h} M(A)$ i induciranu kontrakciju $\Theta_A^Z : M(A) \otimes_{Z,h} M(A) \to \mathrm{ICB}(A)$. Chatterjee i Smith su u [19] pokazali da je Θ_A^Z izometrija ako je A von Neumannova algebra ili ako je primitivni spektar od $M(A)$ Hausdorffov. Iz tog rada se već dalo naslutiti da se rješenje problema izometričnosti (kao i problema injektivnosti) od Θ_A^Z može iskazati u terminima strukture ideala od $M(A)$. Budući da struktura ideala od $M(A)$ može biti znatno kompliciranija od one od A, valja se ograničiti na klasu unitalnih C*-algebri. U tom (unitalnom) slučaju, daljnju generalizaciju je dao Somerset u [64], gdje je pokazao da je Θ_A^Z izometrija ako je svaki Glimmov ideal u A primalan. Također, u istom radu Somerset je dao i karakterizaciju C*-algebri A za koje je Θ_A^Z injekcija; to su točno one A kod kojih je svaki Glimmov ideal u A 2-primalan. Napokon, Archbold, Somerset i Timoney su u [12] dokazali i obrat Somersetovog rezultata (s obzirom na izometričnost od Θ_A^Z) i time je problem izometričnosti od Θ_A^Z u potpunosti riješen.

S druge strane, problem surjektivnosti od Θ_A je tek nedavno proučavao Magajna u [48]. U tom radu je pokazao da je (za separabilnu A) Θ_A surjektivna ako i samo ako je A konačna direktna suma homogenih C*-algebri konačnog tipa (definicija 1.10.8).

U ovoj disertaciji najprije proučavamo problem minimalnosti slike od Θ_A. Preciznije, cilj nam je naći karakterizaciju C*-algebri A za koje je slika od Θ_A najmanja moguća, dakle jednaka $\mathrm{E}(A)$. Kao što ćemo vidjeti, taj problem je vrlo sličan problemu uniformne ograničenosti duljina elementarnih operatora na A. U drugom dijelu disertacije proučavamo derivacije koje se nalaze u slici od Θ_A. Motivacija za pručavanje takvih derivacija dolazi iz činjenice da je svaka derivacija na A operator iz $\mathrm{ICB}(A)$.

Disertacija se sastoji od 5 poglavlja.

Poglavlje 1 je uvodnog tipa. U njemu ćemo izložiti pregled teorije C*-algebri koju ćemo koristiti u ostalim poglavljima. Poseban naglasak je stavljen na konstrukciju Dauns-Hofmannovog izomorfizma, na teoriju Glimmovih i primalnih ideala, kao i na strukturnu teoriju homogenih C*-algebri.

U **poglavlju 2** najprije dajemo kratak pregled teorije operatorskih prostora, potpuno ograničenih operatora i Haagerupovog tenzorskog produkta (te njegove strukture ideala) i zatim iznosimo detaljan pregled rezultata iz radova [64] i [12] u kojima su riješeni problemi injektivnosti i izometričnosti od Θ_A^Z.

U **Poglavlju 3** iznosimo rezultate iz Magajninog rada [48], u kojem je autor proučavao problem karakterizacije klase C*-algebri A za koje je Θ_A surjekcija. Glavni rezultat tog poglavlja (koji je ujedno i glavni rezultat iz [48]) je dokaz činjenice da je (za separabilnu A) Θ_A surjekcija ako i samo ako je A konačna direktna suma homogenih C*-algebri konačnog tipa.

U **Poglavlju 4** tražimo karakterizaciju C*-algebri A za koje vrijedi jedno od sljedeća tri svojstva:

(i) A je konačno generirani modul nad centrom svoje multiplikatorske algebre;

(ii) $\operatorname{Im}\Theta_A$ je najmanja moguća, dakle jednaka $\mathrm{E}(A)$;

(iii) $\mathrm{E}(A)$ je konačne duljine, tj. postoji cjelobrojna konstanta d takva da svaki elementarni operator na A ima duljinu manju ili jednaku d.

Pokazujemo da A zadovoljava (i) ako i samo ako je A konačna direktna suma unitalnih homogenih C*-algebri. Također pokazujemo da ako separabilna A zadovoljava (ii) ili (iii), tada je ona nužno SFT algebra (definicija 1.10.13). Štoviše, u tom slučaju su i kodimenzije 2-primalnih ideala u A uniformno ograničene s nekom cjelobrojnom konstantom. Koristeći tu činjenicu dajemo primjer unitalne i separabilne SFT algebre koja ne zadovoljava niti (ii) niti (iii). Također, dokazujemo i parcijalni obrat; ako je primitivni spektar (unitalne) SFT algebre A Hausdorffov, tada A zadovoljava (ii) i (iii). Većina rezultata iz ovog poglavlja je originalna i uzeta iz [36].

U **Poglavlju 5** najprije iznosimo kratak pregled rezultata iz teorije derivacija na C*-algebrama i zatim proučavamo derivacije koje se nalaze u slici od Θ_A. Kako bismo izbjegli dodatne komplikacije, ograničavamo se na unitalne C*-algebre (odnosno na kvazicentralne C*-algebre (definicija 1.7.1), no tada promatramo restrikciju od Θ_A na $A \otimes_h A$). U tom slučaju pokazujemo da je svaka derivacija $\delta \in \operatorname{Im}\Theta_A$ nužno unutarnja ako je svaki Glimmov ideal u A prim. Klasa takvih C*-algebri obuhvaća sve centralne C*-algebre (definicija 1.7.9), kao i sve kvocijente von Neumannovih algebri (ili općenitije kvocijente AW*-algebri). Nadalje, dajemo primjer unitalne separabilne 2-subhomogene C*-algebre koja dopušta vanjsku derivaciju δ koja je implementirana s elementarnim operatorom. Većina rezultata iz ovog poglavlja je također originalna i uzeta iz [35].

Zahvale

Koristim ovu priliku kako bih se zahvalio prof. dr. sc. Bojanu Magajni što me upoznao s ovom problematikom, kao i na mnogobrojnim korisnim diskusijama i savjetima. Također se zahvaljujem prof. dr. sc. Damiru Bakiću, prof. dr. sc. Borisu Guljašu i prof. dr. sc. Hrvoju Kraljeviću na strpljenju i konstantnoj podršci.

Posveta

Rad posvećujem svojim roditeljima Zdenki i Zoranu, svojoj teti Mariji, prof. Senki Sedmak te svojoj djevojci Višnji.

Oznake

Ovaj rad se sastoji od pet poglavlja. Poglavlja su numerirana brojevima. Svako poglavlje je podijeljeno na točke koje su također numerirane brojevima (npr. 1.2 je druga točka u prvom poglavlju). Formule su numerirane od početka svakog poglavlja, a numeracija sadrži i redni broj poglavlja (npr. (3.9)). Teoremi, propozicije, leme, korolari, napomene, primjeri i problemi numerirani su od početka svake točke i numeracija sadrži redni broj pripadnog poglavlja i pripadne točke (npr. Teorem 3.1.4).

Pod operatorima, ako drugačije nije navedeno, u cijelom radu podrazumijevamo linearne operatore. Uz standardne matematičke oznake, u ovom radu se upotrebljavaju oznake u značenju kako slijedi.

ALGEBRE	
$\mathrm{B}(\mathcal{H})$	C*-algebra svih ograničenih linearnih operatora na $\mathcal{H}$
$\mathrm{F}(\mathcal{H})$	algebra svih operatora konačnog ranga na $\mathcal{H}$
$\mathrm{K}(\mathcal{H})$	C*-algebra svih kompaktnih operatora na $\mathcal{H}$
$\mathrm{T}(\mathcal{H})$	algebra svih operatora na $\mathcal{H}$ s konačnim tragom
A, B	C*-algebre
$Z(A)$	centar od A
$\tilde{A}$	minimalna unitizacija od A
$M(A)$	multiplikatorska algebra od A
A^{**}	omotačka von Neumannova algebra od A
A_h	hermitski dio od A
A_+	pozitivni dio od A
$\hat{A}$	spektar od A
$\mathrm{M}_n(A)$	C*-algebra matrica reda n nad A
$\mathrm{D}_n(A)$	C*-algebra dijagonalnih matrica reda n nad A
$C(\Delta)$	C*-algebra svih neprekidnih kompleksnih funkcija na prostoru Δ
$C_b(\Delta)$	C*-algebra svih neprekidnih ograničenih kompleksnih funkcija na prostoru Δ
$C_0(\Delta)$	C*-algebra svih neprekidnih kompleksnih funkcija na lokalno kompaktnom prostoru Δ koje iščezavaju u beskonačnosti

IDEALI

$\mathrm{Id}(A)$	skup svih (zatvorenih i obostranih) ideala u A
$\mathrm{Id}'(A)$	$\mathrm{Id}'(A) = \mathrm{Id}(A) \setminus \{A\}$
$\mathrm{Id}_{ess}(A)$	skup svih esencijalnih ideala u A
I, J	ideali u A
$I^{\perp}$	anihilator ideala I
$\mathrm{Prim}(A)$	primitivni spektar od A
$\mathrm{hull}(S)$	$\{P \in \mathrm{Prim}(A) : \ S \subseteq P\}$, za $S \subseteq A$
$\ker F$	$\bigcap\{P : P \in F\}$, za $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$
$\mathrm{Prime}(A)$	prim spektar od A
P, Q	primitivni ili prim ideali u A
$\mathrm{Max}(A)$	maksimalni spektar od A
M, N	maksimalni modularni ideali u A
$\mathrm{Primal}(A)$	skup svih primalnih ideala u A
$\mathrm{Primal}_n(A)$	skup svih n-primalnih ideala u A
$\mathrm{MinPrimal}(A)$	skup svih minimalnih primalnih ideala u A
$\mathrm{Glimm}(A)$	skup svih Glimmovih ideala u A
G, H	Glimmovi ideali u A.

PROSTORI

V, W	vektorski prostori
$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$	Hilbertovi prostori
$\mathcal{H}^{(n)}$	direktna suma n-kopija od $\mathcal{H}$ (n je kardinalni broj)
ℓ^2	Hilbertov prostor svih kvadratno sumabilnih kompleksnih nizova
S'	komutant skupa $S \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$
X, Y, Z	normirani, Banachovi ili operatorski prostori
$\mathrm{M}_{m,n}(X)$	prostor svih $m \times n$ matrica nad X
$\mathrm{C}_n(X)$	$\mathrm{M}_{n,1}(X)$
$\mathrm{R}_n(X)$	$\mathrm{M}_{1,n}(X)$
$\mathrm{C}_\infty(X)$	prostor svih nizova (x_n) u X za koje red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^* x_n$ konvergira u normi od X
$\mathrm{R}_\infty(X)$	prostor svih nizova (x_n) u X za koje red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n x_n^*$ konvergira u normi od X
X^*	topološki dual od X
$\mathrm{B}(X, Y)$	prostor svih ograničenih linearnih operatora $X \to Y$
$\mathrm{B}(X)$	$\mathrm{B}(X, X)$
$\mathrm{CB}(X, Y)$	prostor svih potpuno ograničenih linearnih operatora $X \to Y$
$\mathrm{CB}(X)$	$\mathrm{CB}(X, X)$
$\mathrm{CB}(X \times Y, Z)$	prostor svih potpuno ograničenih bilinearnih operatora $X \times Y \to Z$
$\mathrm{IB}(A)$	prostor svih ograničenih operatora na A koji čuvaju ideale od A
$\mathrm{ICB}(A)$	$\mathrm{IB}(A) \cap \mathrm{CB}(A)$
$\mathrm{E}(A)$	prostor svih elementarnih operatora na A
$\mathrm{Der}(A)$	prostor svih svih derivacija na A
$\mathrm{Inn}(A)$	prostor svih unutarnjih derivacija na A

ELEMENTI I OPERATORI

1, 1_A	jedinica u C*-algebri
id, I	jednični operator
I_n, 1_n	jedinična matrica reda n
$e_{i,j}$	matrične jedinice za $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$
ι, i	kanonska inkluzija
ξ, η	elementi Hilbertovih prostora
$\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$	elementi iz $\mathcal{H}^{(n)}$
$\xi \otimes \eta$	operator $\zeta \mapsto \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ ranga (najviše) 1 na $\mathcal{H}$
α, β, λ, μ	skalari
t, u	tenzori
$\mathbf{x} = [x_{i,j}]$	matrice iz $\mathrm{M}_{m,n}(X)$
$\mathbf{x}^\tau$	transponirana matrica od $\mathbf{x} \in \mathrm{M}_{m,n}(X)$
$\mathbf{x} \odot \mathbf{y}$	matrica $[\sum_{k=1}^r x_{i,k} \otimes y_{k,j}] \in \mathrm{M}_{m,n}(X \otimes Y)$, za $\mathbf{x} = [x_{i,j}] \in \mathrm{M}_{m,r}(X)$ i $\mathbf{y} = [y_{i,j}] \in \mathrm{M}_{r,n}(Y)$
(e_α)	aproksimativna jedinica C*-algebre (ili Banachove algebre)
φ	ograničen linearni fukcional
ϕ, ψ	$*$-homomorfizmi / potpuno ograničeni operatori
$M_{a,b}$	operator obostranog množenja $x \mapsto axb$
π, ρ, σ	reprezentacije C*-algebri
π_u	univerzalna reprezentacija C*-algebre
π_a	reducirana atomska reprezentacija C*-algebre
ω	stanje na C*-algebri
π_ω	GNS-reprezentacija pridružena stanju ω
δ	derivacija na C*-algebri
δ_a	unutarnja derivacija impelemtirana elementom a
q_J	kvocijentni $*$-epimorfizam $A \to A/J$, za $J \in \mathrm{Id}(A)$
Q_J	inducirani operator $\mathrm{IB}(A) \to \mathrm{IB}(A/J)$ dan s $Q_J(\phi)(q_J(x)) = q_J(\phi(x))$, za $J \in \mathrm{Id}(A)$, $\phi \in \mathrm{IB}(A)$ i $x \in A$
ϕ_J	operator $Q_J(\phi) : A/J \to A/J$, za $\phi \in \mathrm{IB}(A)$ i $J \in \mathrm{Id}(A)$
ϕ^*	adjungirani operator operatora ϕ
ϕ^β	proširenje od ϕ do $*$-homomorfizma $M(A) \to M(B)$, za nedegenerirani $*$-homomorfizam $\phi : A \to M(B)$
ϕ_n	operator $\mathrm{M}_n(X) \to \mathrm{M}_n(Y)$ dan s $\phi_n([x_{i,j}]) = [\phi(x_{i,j})]$, za $\phi : X \to Y$

TENZORSKI PRODUKTI

$V \otimes W$	algebarski tenzorski produkt vektorskih prostora V i W
$V \overset{k}{\otimes} W$	skup svih tenzora iz $V \otimes W$ ranga manjeg ili jednakog k
$V \otimes_C W$	algebarski tenzorski produkt desnog C-modula V i lijevog C-modula W
$X \otimes^h Y$	neupotpunjeni Haagerupov tenzorski produkt operatorskih prostora X i Y
$X \otimes_h Y$	upotpunjeni Haagerupov tenzorski produkt operatorskih prostora X i Y
$A \otimes_{Z,h} A$	centralni Haagerupov tenzorski produkt C*-algebre A
$\phi \otimes \psi$	tenzorski produkt operatora ϕ i ψ

NORME

$\|\cdot\|$	operatorska norma / norma u C*-algebri
$\|\cdot\|_{cb}$	cb-norma operatora
$\|\cdot\|_n$	norma na $\mathrm{M}_n(A)$ odnosno $\mathrm{M}_n(X)$
$\|\cdot\|_h$	Haagerupova norma na tenzorskom produktu C*-algebri (operatorskih prostora)
$\|\cdot\|_{Z,h}$	norma na centralnom Haagerupovom tenzorskom produktu

VEKTORSKI I (ODOZGO POLUNEPREKIDNI) C*-SVEŽNJEVI

E, F	vektorski ili (odozgo poluneprekidni) C*-svežnjevi
$E\|_U$	restrikcijski svežanj od E nad U, gdje je U podskup baznog prostora od E
$E(s)$	vlakno od E u točki s
$\Gamma(E)$	skup svih neprekidnih prereza od E
$\Gamma_b(E)$	skup svih ograničenih neprekidnih prereza od E
$\Gamma_0(E)$	skup svih ograničenih neprekidnih prereza od E koji iščezavaju u beskonačnosti

TOPOLOGIJE

SOT	jaka operatorska topologija
WOT	slaba operatorska topologija
w^*	slaba $*$-topologija
τ_β	striktna topologija na $M(A)$
τ_s	jaka topologija na $\mathrm{Id}(A)$
τ_w	slaba topologija na $\mathrm{Id}(A)$
τ_q	kvocijentna topologija na $\mathrm{Glimm}(A)$
τ_{cr}	potpuno regularna topologija na $\mathrm{Glimm}(A)$

OSTALE OZNAKE

$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$	mreža (x_α) konvergira prema x u topologiji τ
$\overline{S}^{\tau}$	zatvarač skupa S u topologiji τ
Δ	kompaktan ili lokalno kompaktan Hausdorffov prostor
$\tilde{\Delta}$	Aleksandrovljeva kompaktifikacija prostora Δ
$\beta\Delta$	Stone-Čechova kompaktifikacija prostora Δ
$\mathrm{Ball}(X)$	zatvorena jedinična kugla normiranog prostora X
$\mathrm{span}\, S$	linerna ljuska skupa S
$\mathrm{tr}\, T$	trag operatora T
$\overline{\overline{S}}$	zatvarač u normi skupa S
$\overline{\overline{S}}^{cb}$	zatvarač u cb-normi skupa S
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	skalarni produkt Hilbertovog prostora
$\subsetneq$	pravi podskup
$\bigsqcup$	disjunktna unija
$\hookrightarrow$	ulaganje
$\cong$	izomorfnost
$[\pi]$	klasa (unitarne) ekvivalencije ireducibilne reprezentacije π
$\dim \pi$	dimenzija pripadnog Hilbertovog prostora reprezentacije π
$\mathrm{sp}(a)$, $\mathrm{sp}_A(a)$	spektar elementa a (računat u algebri A)
$\mathrm{S}(A)$	skup svih stanja C*-algebre A
$\mathrm{P}(A)$	skup svih čistih stanja C*-algebre A
Γ_A	Geljfandova trasformacija komutativne C*-algebre A
Ψ_A	Dauns-Hofmannov izomorfizam $Z(M(A)) \to C_b(\mathrm{Prim}(A))$
ϕ_A	potpuna regularizacija od $\mathrm{Prim}(A) \to \mathrm{Glimm}(A)$
Θ_A	kanonska kontrakcija $M(A) \otimes_h M(A) \to \mathrm{ICB}(A)$
θ_A	restrikcija od Θ_A na $A \otimes_h A$

Poglavlje 1

Preliminarni materijali

U ovom poglavlju dat ćemo pregled definicija i nekih rezultata iz teorije operatorskih algebri koje ćemo koristiti u idućim poglavljima. Većina istaknutih rezultata iz prve tri točke može se naći u nekom od standardnih udžbenika teorije operatorskih algebri: [14], [16], [21], [26], [40], [41], [52], [56], [68].

1.1 C*-algebre

Definicija 1.1.1 Za Banachovu $*$-algebru A kažemo da je C*-*algebra* ukoliko za svaki $a \in A$ vrijedi tzv. C*-*identitet*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Odgovarajući morfizmi za kategoriju C*-algebri su $*$-*homomorfizmi*, tj. multiplikativna linearna preslikavanja $\phi : A \to B$ koja poštuju involuciju (tj. vrijedi $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ za sve $a \in A$). Bitno svojstvo $*$-homomorfizama je da su oni automatski ograničeni. Štoviše, vrijedi

Propozicija 1.1.2 Neka su A i B C*-algebre i neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam. Tada vrijedi:

(i) ϕ je kontrakcija;

(ii) $\phi(A)$ je C*-podalgebra od B, tj. $\phi(A)$ je zatvorena u B;

(iii) Ako je ϕ injektivan tada je ϕ izometrija.

□

Napomena 1.1.3 Direktna posljedica propozicije 1.1.2 je da na $*$-algebri A postoji najviše jedna C*-norma.

Za C*-algebru A kažemo da je *unitalna* ukoliko ona sadrži jedinicu. Ako A nije unitalna, tada postoji jednostavan način da se ona uloži u unitalnu C*-algebru $\tilde{A}$

koju definiramo na sljedeći način: ako je A unitalna, stavljamo $\tilde{A} := A$, a inače $\tilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$. U neunitalnom slučaju na $\tilde{A}$ definiramo operacije

$$(a, \lambda) + (b, \mu) := (a + b, \lambda + \mu), \quad \alpha(a, \lambda) := (\alpha a, a\lambda),$$

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \quad (a, \lambda)^* := (a^*, \overline{\lambda}),$$

uz koje $\tilde{A}$ postaje unitalna $*$-algebra (s jedinicom $1_{\tilde{A}} = (0, 1)$). Uvijek ćemo smatrati da je $A \subseteq \tilde{A}$ preko ulaganja $a \hookrightarrow (a, 0)$.

Propozicija 1.1.4 Neka je A neunitalna C* algebra. Tada $\tilde{A}$ postaje C*-algebra uz normu

$$\|(a, \lambda)\| := \sup\{\|ax + \lambda x\| : \; x \in \mathrm{Ball}(A)\}$$

koja proširuje normu od A.

Definicija 1.1.5 Za C*-algebru $\tilde{A}$ kažemo da je *minimalna unitizacija* od A.

U kategoriji C*-algebri moguće je definirati produkte i direktne sume. Ako je $\{A_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ familija C*-algebri tada definiramo njihov *produkt*

$$\prod_{i \in \mathbb{I}} A_i := \left\{(a_i) : \; \sup_i \|a_i\| < \infty\right\},$$

koji uz operacije po koordinatama i normu $\|(a_i)\| := \sup_i \|a_i\|$ postaje C*-algebra.

Direktna suma familije $\{A_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ definirana je s

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{I}} A_i := \left\{(a_i) : \; \lim_{i \to \infty} \|a_i\| = 0\right\},$$

gdje smo $\mathbb{I}$ naravno opskrbili sa diskretnom topologijom. Tada je $\bigoplus_{i \in \mathbb{I}} A_i$ zatvoren obostran ideal u $\prod_{i \in \mathbb{I}} A_i$. Specijalno, $\bigoplus_{i \in \mathbb{I}} A_i$ je C*-algebra.

Navedimo osnovna dva primjera C*-algebri.

Primjer 1.1.6 (i) Neka je Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor i neka je $A := C_0(\Delta)$ skup svih neprekidnih kompleksnih funkcija na Δ koje iščezavaju u beskonačnosti. Tada A postaje komutativna C*-algebra uz operacije po točkama, involuciju $f^*(s) := \overline{f(s)}$ $(f \in C_0(\Delta), \; s \in \Delta)$ te sup-normu

$$\|f\| = \sup\{|f(s)| : \; s \in \Delta\}.$$

(ii) Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada skup $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ svih ograničenih operatora na $\mathcal{H}$ postaje C*-algebra uz standardne operatorske operacije i operatorsku normu

$$\|T\| = \sup\{\|T\xi\| : \; \xi \in \mathrm{Ball}(\mathcal{H})\} \quad (T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})).$$

Sljedeći fundamentalni teorem kaže da su sve komutativne C*-algebre u stvari oblika $A = C_0(\Delta)$ za neki lokalno kompaktan Hausdorffov prostor Δ. Naime, ako za komutativnu C*-algebru A s $\hat{A}$ označimo prostor svih karaktera na A (koji je lokalno kompaktan u slaboj $*$-topologiji, odnosno kompaktan ako je A unitalna) tada vrijedi:

Teorem 1.1.7 (Prvi Geljfand-Naimarkov teorem) Neka je A komutativna C*-algebra. Tada je *Geljfandova transformacija*

$$\Gamma_A : A \to C_0(\hat{A}), \quad \Gamma_A : a \mapsto \hat{a}, \quad \hat{a}(\chi) = \chi(a) \quad (a \in A, \chi \in \hat{A})$$

(izometrički) $*$-izomorfizam.

□

Posebno jednostavnu strukturu imaju i konačno dimenzionalne C*-algebre; to su točno konačne direktne sume matričnih algebri:

Teorem 1.1.8 Neka je A netrivijalna konačno dimenzionalna C*-algebra. Tada postoje prirodni brojevi $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ takvi da je A $*$-izomorfna direktnoj sumi matričnih algebri

$$\mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_k}(\mathbb{C}).$$

□

Općenito, svaka C*-algebra se može izometrički uložiti u $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$. Naime, vrijedi sljedeći fundamentalni teorem:

Teorem 1.1.9 (Drugi Gelfand-Naimarkov teorem) Neka je A C*-algebra. Tada postoji Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ i injektivni $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$

□

Ako je A unitalna C*-algebra (ili općenitije unitalna Banachova algebra) tada *spektar* elementa $a \in A$ označavamo sa $\mathrm{sp}(a)$ (ili $\mathrm{sp}_A(a)$ ukoliko želimo naglasiti ambijentalnu algebru A). Ukoliko A nije unitalna, tada je spektar od a definiran sa

$$\mathrm{sp}(a) = \mathrm{sp}_{\tilde{A}}(a).$$

Za C*-algebre (za razliku od općenitih Banachovih algebri) vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 1.1.10 Neka je A unitalna C*-algebra i neka je $B \subseteq A$ C*-podalgebra od A koja sadrži jedinicu od A. Tada vrijedi

$$\mathrm{sp}_A(b) = \mathrm{sp}_B(b) \quad \text{za sve } b \in B.$$

□

Bitni rezultati teorije C*-algebri počivaju na uređajnoj strukturi te (s njom vezanim) neprekidnim funkcionalnim računom koji nam omogućuje da definiramo neprekidnu funkciju od normalnog elementa. Prisjetimo se, za element $a \in A$ kažemo da je

- *normalan*, ako vrijedi $a^*a = aa^*$;
- *hermitski*, ako vrijedi $a^* = a$;
- *pozitivan*, ako postoji $x \in A$ takav da je $a = x^*x$;
- *unitaran*, ako vrijedi $a^*a = aa^* = 1$ (za unitalnu A).

Skup svih hermitskih elemeata u A označavamo s A_h i zovemo *hermitski dio* od A. A_h je realan Banachov potprostor od A koji općenito nije podalgebra.

Napomena 1.1.11 (i) Za svaki hermitski element $a \in A$ vrijedi $\mathrm{sp}(a) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Svaki element $a \in A$ možemo na jedinstven način prikazati u obliku $a = a_1 + ia_2$, gdje su $a_1, a_2 \in A_h$. Oni su dani s $a_1 = \frac{a+a^*}{2}$ i $a_2 = \frac{a-a^*}{2i}$. a_1 zovemo *realni dio* od a, a a_2 zovemo *imaginarni dio* od a.

Skup svih pozitivnih elemenata u A označavamo s A_+ i zovemo *pozitivni dio* od A. Ekvivalentne karakterizacije pozitivnog elementa u C*-algebri su sljedeće:

Propozicija 1.1.12 Neka je A C*-algebra. Za normalni element $a \in A$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $a \in A_+$;

(ii) $a = x^2$ za neko $x \in A_h$;

(iii) $a \in A_h$ i $\mathrm{sp}(a) \subseteq \mathbb{R}_+$;

(iv) $a \in A_h$ i $\|\lambda 1 - a\| \leq \lambda$, za sve $\lambda \geq \|a\|$;

(v) $a \in A_h$ i $\|\lambda 1 - a\| \leq \lambda$, za neki $\lambda \geq \|a\|$.

□

Neka je A unitalna C*-algebra. Ako je $S \subseteq A$ tada s $\mathrm{C}^*(S)$ označavamo C*-algebru generiranu sa $S \cup \{1\}$ (drugim riječima, $\mathrm{C}^*(S)$ je najmanja unitalna C*-podalgebra od A koja sadrži S. Ako je S jednočlan, tada stavljamo $\mathrm{C}^*(x) := \mathrm{C}^*(\{x\})$. Neka je $a \in A$ normalan. Tada je $B := \mathrm{C}^*(a)$ komutativna, pa je prema teoremu 1.1.7 Geljfandova transformacija

$$\Gamma_B : B \to C(\hat{B})$$

izometrički $*$-izomorfizam (budući da je B unitalna, prostor karaktera $\hat{B}$ od B je kompaktan). No, $\hat{B}$ možemo identificirati sa spektrom $\mathrm{sp}(a)$ od a (preko homeomorfizma $\hat{a} : \hat{B} \to \mathrm{sp}(a)$), odakle slijedi da B možemo identificirati s $C(\mathrm{sp}(a))$. Time dolazimo do *neprekidnog funkcionalnog računa* za normalni element a, kojeg definiramo na sljedeći način: za $f \in C(\mathrm{sp}(a))$ definiramo $f(a)$ kao jedinstven element u $B = \mathrm{C}^*(A)$ takav da vrijedi

$$\Gamma_B(f(a)) = f.$$

Po konstrukciji, imamo $\|f\| = \|f(a)\|$ i $f(\mathrm{sp}(a)) = \mathrm{sp}(f(a))$ (teorem o preslikavanju spektra).

Prethodno razmatranje također ima smisla i za neunitalnu A; u tom slučaju sav račun provodimo u $\tilde{A}$.

Napomena 1.1.13 (i) Koristeći neprekidni funkcionalni račun odmah vidimo da za svaki $a \in A_+$ postoji jedinstven $b \in A_+$ takav da je $b^2 = a$. Element b zovemo *pozitivni drugi korijen* od a i označavamo ga s $a^{\frac{1}{2}}$.

(ii) Za svaki hermitski element $a \in A_h$ postoje jedinstveni pozitivni elementi $a_+, a_- \in A$ takvi da vrijedi $a = a_+ - a_-$ i $a_+a_- = a_-a_+ = 0$. Oni su dani s $a_+ := f_+(a)$ i $a_- := f_-(a)$, gdje su $f_+, f_- \in C(\sigma(a))$ definirane s $f_+(s) := \max\{s, 0\}$ i $f_-(s) := -\min\{s, 0\}$ $(s \in \mathrm{sp}(a))$. Uzevši u obzir napomenu 1.1.11 (ii) slijedi da se svaki $a \in A$ može prikazati kao linearna kombinacija od (najviše) četiri pozitivna elementa.

(iii) *Apsolutnu vrijednost* elementa $a \in A$ definiramo s $|a| := a_- + a_+$. Primijetimo da je $|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}}$.

Na A_h uvodimo parcijalni uređaj $\leq$ s

$$a \leq b \;:\Longleftrightarrow\; b - a \in A_+ \quad (a, b \in A_h).$$

Istaknimo osnovna svojstva tog uređaja:

Propozicija 1.1.14 Neka je A C*-algebra. Tada je $\mathrm{Ball}(A) = \{a \in A : a^*a \leq 1\}$. Štoviše, ako su $a, b \in A_h$ takvi da je $0 \leq a \leq b$, tada vrijedi:

(i) $\|a\| \leq \|b\|$;

(ii) $c^*ac \leq c^*bc$, za sve $c \in A$;

(iii) $a^\alpha \leq b^\alpha$, za sve $0 < \alpha \leq 1$.

□

Pri radu s neunitalnim C*-algebrama (ili općenitije s neunitalnim Banachovim algebrama) izrazito je koristan koncept aproksimativne jedinice. Prisjetimo se, ako je A Banachova algebra tada za mrežu (e_α) u A kažemo da je *aproksimativna jedinica* za A ako vrijedi

$$\lim_\alpha \|ae_\alpha - a\| = \lim_\alpha \|e_\alpha a - a\| = 0 \quad \text{za sve } a \in A.$$

Ako postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|e_\alpha\| \leq M$ za sve α tada kažemo da je (e_α) *ograničena*. Nadalje, ako vrijedi $\|e_\alpha\| \leq 1$ za sve α tada kažemo da je (e_α) *kontraktivna*.

U ovoj disertaciji često ćemo koristiti sljedeći bitan teorem:

Teorem 1.1.15 (Hewitt-Cohenov teorem o faktorizaciji) Pretpostavimo da je A Banachova algebra koja dopušta ograničenu aproksimativnu jedinicom i neka je X lijevi Banachov A-modul. Tada je X nedegeneriran ako i samo je $X = AX$, tj. ako i samo ako svaki $x \in X$ možemo faktorizirati u obliku $x = ay$ za neke $a \in A$ i $y \in X$. Štoviše, Ako je $\|x\| < 1$ i ako je ta aproksimativna jedinica kontraktivna, tada možemo postići i $\|a\| < 1$ i $\|y\| < 1$.

□

Prisjetimo se, za Banachov prostor X kažemo da je *lijevi Banachov A-modul* ako je modularno djelovanje $A \times X \to X$, $(a, x) \mapsto ax$ kontraktivan bilinearni operator. Za lijevi Banachov A-modul X kažemo da je *nedegeneriran* ako je njegov *esencijalni podmodul* $\overline{\overline{\operatorname{span}}}_A X$ jednak X, tj. ako vrijedi

$$\overline{\overline{\operatorname{span}}}_A X = \overline{\overline{\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : \ n \in \mathbb{N}, \ a_i \in A, \ x_i \in X \right\}}} = X.$$

Ako A dopušta ograničenu aproksimativnu jedinicu (e_α), tada je lijevi Banachov A-modul X nedegeneriran ako i samo ako je $\lim_\alpha e_\alpha x = x$ za sve $x \in X$.

Jedno od bitnih svojstava C*-algebri je da one uvijek dopuštaju kontraktivne aproksimativne jedinice. Štoviše, vrijedi:

Teorem 1.1.16 Neka je A C*-algebra i I obostran ideal u A koji je gust u A. Tada postoji aproksimativna jedinica (e_α) za A takva da vrijedi:

(i) (e_α) je kontraktivna;

(ii) $e_\alpha \in I$ za sve α;

(iii) $e_\alpha \geq 0$ za sve α;

(iv) (e_α) je *rastuća*, tj. vrijedi $e_\alpha \leq e_{\alpha'}$ čim je $\alpha \leq \alpha'$.

Ukoliko je A separabilna, tada možemo naći prebrojivu aproksimativnu jedinicu (e_k) za A (tj. (e_k) je niz u A) za koju vrijede svojstva (i)-(iv).

□

Napomena 1.1.17 Ako prethodni teorem primijenimo na slučaj $I = A$, slijedi da svaka C*-algebra dopušta aproksimativnu jedinicu za koju vrijede svojstva (i)-(iv). Zbog toga, kada govorimo o aproksimativnoj jedinici C*-algebre A, uvijek ćemo podrazumijevati da je ona izabrana tako da vrijede svojstva (i)-(iv).

Nama će biti posebno interesantna sljedeća klasa C*-algebri:

Definicija 1.1.18 Za C*-algebru A kažemo da je *σ-unitalna* ako ona dopušta prebrojivu aproksimativnu jedinicu.

Napomena 1.1.19 Primijetimo da iz teorema 1.1.16 slijedi da je svaka separabilna C*-algebra σ-unitalna.

Prema teoremu 1.1.16 svaki zatvoren ideal I C*-algebre A dopušta approksimativnu jedinicu. Koristeći tu činjenicu lako se dokaže da je I $*$-invarijantan, tj. vrijedi $a^* \in I$, čim je $a \in I$. Dakle, I je i sam C*-algebra.

Napomena 1.1.20 Ukoliko drugačije nije rečeno, od sada pa nadalje ćemo pod idealom u C*-algebri uvijek podrazumijevati obostran i zatvoren ideal. Skup svih ideala u A označavamo s $\mathrm{Id}(A)$.

Ideali su upravo odgovarajući podobjekti koji omogućuju konstrukciju kvocijenata u kategoriji C*-algebri. Naime, ako je $I \in \mathrm{Id}(A)$ tada je kvocijent A/I (uz prirodne operacije i kvocijentnu normu) Banachova $*$-algebra. Nadalje, za kvocijentnu normu na A/I vrijedi

$$\|a+I\| = \inf\{\|a-x\| : \ x \in I\} = \lim_{\alpha} \|a - e_\alpha a\| = \lim_{\alpha} \|a - a e_a\|, \tag{1.1}$$

čim je (e_α) aproksimativna jedinica za I. Odavde se lako provjeri da kvocijentna norma na A/I zadovoljava C*-identitet. Dakle, A/I (opskrbljena sa kvocijentnom normom) je C*-algebra.

Definicija 1.1.21 Za ideal $I \in \mathrm{Id}(A)$ kažemo da je *modularan* ako je A/I unitalna.

Sada ćemo istaknuti par rezultata iz opće teorije C*-algebri koje ćemo često koristiti u ovoj radnji.

Propozicija 1.1.22 Neka je A C*-algebra. Ako je B C*-podalgebra od A i I ideal u A tada je skup

$$B + I := \{x + y : \ x \in B, \ y \in I\}$$

zatvoren u normi. Specijalno $B + I$ je C*-algebra. Nadalje, preslikavanje

$$\phi : B/(B \cap I) \to (B+I)/I, \quad \phi : b + B \cap I \mapsto b + I$$

je $*$-izomorfizam.

□

Propozicija 1.1.23 Neka je A C*-algebra i $\{I_i : \ i \in \mathbb{I}\}$ familija ideala u A. Stavimo $I := \bigcap\{I_i : \ i \in \mathbb{I}\}$. Tada je

$$\|a + I\| = \sup\{\|a + I_i\| : \ i \in \mathbb{I}\}.$$

□

Ako su I i J ideali u C*-algebri A tada definiramo njihov produkt $I \cdot J$ kao najmanji ideal u A koji sadrži skup $IJ = \{xy : \ x \in I, \ y \in J\}$.

Propozicija 1.1.24 Neka je A C*-algebra.

(i) Ako su I i J ideali u A tada je $I \cdot J = IJ = I \cap J$.

(ii) Ako je I ideal u A tada imamo inkluziju centara $Z(I) \subseteq Z(A)$.

$\square$

Propozicija 1.1.25 Neka je A C*-algebra. Tada je A beskonačno dimenzionalna ako i samo ako je svaka maksimalna komutativna $*$-podalgebra od A beskonačno dimenzionalna. U tom slučaju, postoji ortogonalan niz (e_n) pozitivnih elemenata norme 1 u A, tj. vrijedi

$$e_n \in A_+, \quad \|e_n\| = 1 \quad \text{i} \quad e_n e_m = e_m e_n = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n).$$

$\square$

Propozicija 1.1.26 Neka su A i B C*-algebre, te neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam.

(i) Ako su $a \in A_+$ i $b \in B_+$ takvi da je $b \leq \phi(a)$ tada postoji $a_0 \in A_+$ takav da vrijedi $a_0 \leq a$ i $\phi(a_0) = b$.

(ii) Ako je ϕ surjektivan, tada svaki element $b \in B$ možemo podići preko ϕ do elementa $a \in A$ (tj. $\phi(a) = b$) s $\|a\| = \|b\|$. Ako je b hermitski (pozitivan) tada možemo postići i da je a hermitski (pozitivan). Nadalje, ako je (b_n) ortogonalan niz pozitivnih elemenata norme 1 u B tada se on može podići do ortogonalanog niza (a_n) pozitivnih elemenata norme 1 u A (tj. $\phi(a_n) = b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$).

$\square$

Definicija 1.1.27 Neka je A C*-algebra. Za C*-podalgebru B od A kažemo da je *hereditarna* ako za sve $a \in A_+$ i $b \in B_+$ iz $a \leq b$ slijedi $a \in B$.

Hereditarne C*-podalgebre su u bijekciji s lijevim zatvorenim idealima u A. Preciznije, vrijedi:

Teorem 1.1.28 Neka je A C*-algebra i označimo redom s $\mathrm{Id}_l(A)$ i $\mathrm{Herr}(A)$ skup svih lijevih zatvorenih ideala u A i skup svih hereditarnih C*-podalgebri od A.

(i) Ako je $L \in \mathrm{Id}_l(A)$ tada je $L \cap L^* \in \mathrm{Herr}(A)$ (ovdje je $L^* = \{x^* : \ x \in L\}$). Također, ako je $B \in \mathrm{Herr}(A)$ tada je $\{a \in A : \ a^*a \in B\} \in \mathrm{Herr}(A)$. Nadalje, preslikavanje $\vartheta : \mathrm{Id}_l(A) \to \mathrm{Herr}(A)$ dano s $\vartheta : L \mapsto L \cap L^*$ je bijekcija s inverzom $\vartheta^{-1}(B) = \{a \in A : \ a^*a \in B\}$.

(ii) Ako je B C*-podalgebra od A, tada je B hereditarna ako i samo ako vrijedi

$$BAB = \{bab' : \ b, b' \in B, a \in A\} \subseteq B.$$

Specijalno, svaki zatvoren ideal u A je hereditarna C*-podalgebra.

□

Korolar 1.1.29 Neka je A C*-algebra. Ako je $a \in A_+$ tada je $\overline{\overline{aAa}}$ hereditarna C*-podalgebra od B (generirana s a). Nadalje, za svaku separabilnu hereditarnu C*-podalgebru B od A postoji $a \in B_+$ takav da je $B = \overline{\overline{aAa}}$.

□

Bitno svojstvo hereditarnih C*-podalgebri C*-algebre A je da je njihova struktura ideala dosta povezana s onom od A. Preciznije, vrijedi

Propozicija 1.1.30 Neka je A C*-algebra, $B \in \mathrm{Herr}(A)$ i $I \in \mathrm{Id}(B)$. Tada postoji $J \in \mathrm{Id}(A)$ takav da je $I = B \cap J$.

□

Definicija 1.1.31 Za ideal I C*-algebre A kažemo da je *esencijalan* ako iz $I \cap J = IJ = \{0\}$ slijedi $J = 0$, za svaki $J \in \mathrm{Id}(A)$. Skup svih esencijalnih ideala u A označavamo s $\mathrm{Id}_{ess}(A)$.

Definicija 1.1.32 Neka je A C*-algebra. *Anihilator* $I^\perp$ ideala $I \in \mathrm{Id}(A)$ definiran je s

$$I^\perp := \{a \in A : \ aI = \{0\}\}.$$

Napomena 1.1.33 Neka je A C*-algebra i $I \in \mathrm{Id}(A)$.

(i) $I^\perp \in \mathrm{Id}(A)$ i vrijedi

$$I^\perp = \{a \in A : \ Ia = \{0\}\}.$$

(ii) $I \oplus I^\perp \in \mathrm{Id}_{ess}(A)$. Specijalno, $I \in \mathrm{Id}_{ess}(A)$ ako i samo ako je $I^\perp = \{0\}$.

Primjer 1.1.34 (i) Neka je Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, $A := C_0(\Delta)$ i $U \subseteq \Delta$ otvoren podskup. Tada je ideal

$$I = \{f \in C_0(\Delta) \ : f|_{\Delta \setminus U} = 0\}$$

esencijalan u A ako i samo ako je U gust u Δ.

(ii) Ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor tada je ideal $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ svih kompaktnih operatora na $\mathcal{H}$ esencijalan u $\mathrm{B}(\mathcal{H})$.

Definicija 1.1.35 *Unitizacija* C*-algebre A je unitalna C*-algebra B zajedno sa injektivnim $*$-homomorfizmom $i : A \hookrightarrow B$ od A za kojeg je $\iota(A)$ esencijalan ideal u B.

Ako je A unitalna tada je očito A jedina unitizacija od A (do na izomorfizam). Ako A nije unitalna, tada su posebno istaknute sljedeće dvije njene unitizacije: minimalna (koju smo već definirali) i maksimalna, koju definiramo preko sljedećeg univerzalnog svojstva:

Definicija 1.1.36 Za unitizaciju $i : A \hookrightarrow B$ kažemo da je *maksimalna* ako za svako ulaganje $j : A \hookrightarrow C$ od A kao esencijalnog ideala C*-algebre C postoji $*$-homomorfizam $\phi : C \to B$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} & B \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "j"] & C \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

komutira.

Teorem 1.1.37 Neka je $i : A \hookrightarrow B$ maksimalna unitizacija C*-algebre A i neka je $j : A \hookrightarrow C$ ulaganje od A kao esencijalnog ideala C*-algebre C. Tada je $*$-homomorfizam $\phi : C \to B$ za kojeg dijagram (1.2) komutira jedinstven i injektivan. Nadalje, ako je i $j : A \hookrightarrow C$ maksimalna unitizacija tada je ϕ izomorfizam.

$\square$

Sada ćemo opisati jednu konstrukciju maksimalne unitizacije od A.

Definicija 1.1.38 *Dvostruki centralizator* na C*-algebri A je par (L, R) funkcija $L, R : A \to A$ za koje vrijedi

$$R(x)y = xL(y) \quad (x, y \in A).$$

Propozicija 1.1.39 Neka je A C*-algebra i (L, R) dvostruki centralizator na A. Tada su L i R ograničeni linearni operatori na A s $\|L\| = \|R\|$. Također, vrijedi

$$L(xy) = L(x)y \quad \text{i} \quad R(xy) = xR(y) \quad (x, y \in A).$$

Nadalje, skup svih dvostrukih centralizatora na A postaje C*-algebra uz operacije

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) := (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) := (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$\alpha(L, R) := (\alpha L, \alpha R) \quad (\alpha \in \mathbb{C}),$$

involuciju

$$(L, R)^* := (R^*, L^*),$$

(ovdje smo za operator $T : A \to A$ s T^* označili preslikavanje $A \to A$ dano s $T^*(a) := T(a^*)^*$) i normu

$$\|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|.$$

□

Definicija 1.1.40 Za C*-algebru dvostrukih centralizatora iz prethodne propozicije kažemo da je *multiplikatorska algebra* od A i označavamo ju s $M(A)$.

Propozicija 1.1.41 Neka je A C*-algebra. Ako za $a \in A$ definiramo preslikavanja $L_a, R_a : A \to A$ s $L_a(x) := ax$ i $R_a(x) := xa$, tada je $(L_a, R_a) \in M(A)$, te $M(A)$ postaje maksimalna unitizacija od A uz ulaganje

$$i : A \to M(A), \quad i(a) := (L_a, R_a).$$

□

Naravno, maksimalnu unitizaciju od A možemo realizirati na više načina. Iz teorema 1.1.37 slijedi da su sve te realizacije međusobno izomorfne. Zbog toga, bilo koju maksimalnu unitizaciju od A ćemo također onačavati s $M(A)$. Istaknimo i sljedeću realizaciju od $M(A)$ koja će nam biti korisna.

Pretpostavimo da je A uložena u svoju univerzalnu omotačku von Neumannovu algebru A^{**} (definicija 1.3.8). Tada $M(A)$ možemo definirati kao idealizator od A u A^{**}:

$$M(A) = \{x \in A^{**} : \; xa \in A \text{ i } ax \in A, \text{ za sve } a \in A\}.$$

Navedimo par primjera multiplikatorskih algebri.

Primjer 1.1.42 (i) Neka je Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Tada je $M(C_0(\Delta)) = C_b(\Delta) = C(\beta\Delta)$, gdje $\beta\Delta$ označava Stone-Čechovu kompaktifikaciju od Δ.

(ii) Općenitije, neka je Δ kao u (i) i neka je $C_0(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ skup svih neprekidnih kompleksnih funkcija $f : \Delta \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ koje iščezavaju u beskonačnosti. $C_0(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ postaje C*-algebra uz točkovne operacije nasljeđene od $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ i sup-normu

$$\|f\| := \sup\{\|f(s)\|_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} : \; s \in \Delta\}.$$

Tada je $M(C_0(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))) = C_b(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C})) = C(\beta\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$.

(iii) Ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor tada je $M(\mathrm{K}(\mathcal{H})) = \mathrm{B}(\mathcal{H})$.

Definicija 1.1.43 *Striktna topologija* τ_β na $M(A)$ je lokalno konveksna Hausdorffova topologija definirana polunormama ${}_a\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_a$ $(a \in A)$, gdje je

$${}_a\|x\| := \|ax\| \quad \text{i} \quad \|x\|_a := \|xa\| \;\; (x \in M(A)).$$

Ako je (x_α) mreža u $M(A)$ koja striktno konvergira prema $x \in M(A)$, tada pišemo $x_\alpha \xrightarrow{\beta} x$.

Istaknimo neka svojstva striktne topologije.

Propozicija 1.1.44 Neka je A C^*-algebra.

(i) Mreža (e_α) u A je aproksimativna jedinica za A ako i samo ako vrijedi $e_\alpha \xrightarrow{\beta} 1_{M(A)}$. Specijalno, A je striktno gusta u $M(A)$.

(ii) Involucija na $M(A)$ je striktno neprekidna i (lijevo, odnosno desno) množenje s fiksnim elementom od $M(A)$ je striktno neprekidno.

(iii) Striktna topologija na $M(A)$ je slabija od topologije inducirane normom. Nadalje, te dvije topologije se podudaraju ako i samo je A unitalna.

$\square$

Definicija 1.1.45 Neka su A i B C*-algebre. Za $*$-homomorfizam $\phi : A \to M(B)$ kažemo da je *nedegeneriran* ako je

$$\overline{\mathrm{span}}\{\phi(a)b : \ a \in A, \ b \in B\} = B.$$

Propozicija 1.1.46 Ako su A i B C*-algebre i $\phi : A \to M(B)$ nedegenerirani $*$-homomorfizam, tada se ϕ na jedinstven način proširuje do striktno neprekidnog $*$-homomorfizma $\phi^\beta : M(A) \to M(A)$.

$\square$

Napomena 1.1.47 Proširenje $\phi^\beta : M(A) \to M(B)$ iz prethodne propozicije je naprosto restrikcija od ultraslabo neprekdinog proširenja $\phi^{**} : A^{**} \to B^{**}$ od ϕ na $M(A)$.

Očito je svaki $*$-epimorfizam $\phi : A \to B$ nedegeneriran, pa ga prema propoziciji 1.1.46 na jedinstven način možemo proširiti do striktno neprekidnog $*$-homomorfizma $\phi^\beta : M(A) \to M(B)$. Imamo sljedeći bitan rezultat:

Teorem 1.1.48 (Nekomutativni Tietzeov teorem) Neka su A i B C*-algebre i $\phi : A \to B$ $*$-epimorfizam. Ako je A σ-unitalna, tada je proširenje $\phi^\beta : M(A) \to M(B)$ surjektivno.

$\square$

1.2 Reprezentacije C*-algebri

Reprezentacija C*-algebre A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Ako pripadni Hilbertov prostor reprezentacije π nije istaknut tada ćemo ga označavati s $\mathcal{H}_\pi$.

Za π kažemo da je *vjerna reprezentacija* ako je ona injektivna. *Dimenzija* $\dim \pi$ reprezentacije π od A definirana je kao dimenzija pripadnog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}_\pi$.

Za dvije reprezentacije $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ i $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{K})$ kažemo da su *ekvivalentne* i pišemo $\pi \sim \rho$ ako postoji unitarni izomorfizam $U : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ takav da vrijedi

$$\pi(a) = U\rho(a)U^* \quad \text{za sve } a \in A.$$

Ako je $\{\pi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ familija reprezentacija od A tada definiramo njihovu *direktnu sumu* $\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{I}} \pi_\alpha$ kao reprezentaciju π od A na direktnoj sumi $\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{I}} H_{\pi_\alpha}$ pripadnih Hilbertovih prostora s

$$\pi(a)((\xi_\alpha)) := (\pi_\alpha(a)\xi_\alpha) \quad (a \in A,\ (\xi_\alpha) \in \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{I}} H_{\pi_\alpha}).$$

Za familiju $\{\pi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ kažemo da je *vjerna* ako je njihova direktna suma vjerna reprezentacija.

Neka je π reprezentacija od A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ kažemo da je π-*invarijantan* ako vrijedi $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Tada je s restrikcijom $\pi_\mathcal{K} : a \mapsto \pi(a)|_\mathcal{K}$ definirana reprezentacija $\pi_\mathcal{K}$ od A na $\mathcal{K}$ koja se zove *subreprezentacija* od π. Ako je $\mathcal{K}$ π-invarijantan potprostor, tada je i njegov ortogonalni komplement $\mathcal{K}^\perp$ π-invarijantan i vrijedi $\pi \sim \pi_\mathcal{K} \oplus \pi_{\mathcal{K}^\perp}$. Za reprezentaciju π kažemo da je *ireducibilna* ako su $\{0\}$ i $\mathcal{H}$ jedini π-invarijantni potprostori. Vrijedi sljedeći bitan kriterij ireducibilnosti:

Teorem 1.2.1 Reprezentacija π C*-algebre je ireducibilna ako i samo ako su jedini operatori iz $\mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ koji komutiraju s $\pi(A)$ multipli jediničnog operatora $1_{\mathcal{H}_\pi}$.

□

Esencijalni prostor reprezentacije π C*-algebre A je zatvoren potprostor

$$\mathcal{H}_\pi^{ess} := \overline{\overline{\mathrm{span}}}\{\pi(a)\xi :\ a \in A, \xi \in \mathcal{H}_\pi\} = \{\pi(a)\xi :\ a \in A, \xi \in \mathcal{H}_\pi\},$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz Hewitt-Cohenovog teorema fakotrizacije (teorem 1.1.15). Za reprezentaciju π kažemo da je *nedegenerirana* ako je $\mathcal{H}_\pi^{ess} = \mathcal{H}_\pi$. To je ekvivalentno činjenici da je $\pi(1) = 1_{\mathcal{H}_\pi}$ ako je A unitalna, odnosno $\pi(e_\alpha)\xi \to \xi$ za sve $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, čim je (e_α) aproksimativna jedinica za A. Esencijalni prostor $\mathcal{H}_\pi^{ess}$ od π je uvijek π-invarijantan, subreprezentacija $\pi_{\mathcal{H}_\pi^{ess}}$ je nedegenerirana i vrijedi $\pi \sim \pi_{\mathcal{H}_\pi^{ess}} \oplus 0$.

Napomena 1.2.2 Neka je π nedegenerirana reprezentacija C*-algebre A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Ako je $B \subseteq A$ C*-podalgebra od A takva da je $\pi(B) \neq \{0\}$, tada je očito i restrikcija $\pi|_B$ reprezentacija od B na $\mathcal{H}$. Njen esencijalni potprostor označavamo s $\mathcal{H}_B$. Dakle,

$$\mathcal{H}_B = \overline{\overline{\mathrm{span}}}\{\pi(b)\xi :\ b \in B, \xi \in \mathcal{H}\} = \{\pi(b)\xi :\ b \in B, \xi \in \mathcal{H}\},$$

a pripadnu nedegeneriranu subreprezentaciju $(\pi|_B)_{\mathcal{H}_B}$ od $\pi|_B$ označavamo s π_B.

Za reprezentaciju π od A kažemo da je *ciklička* ako postoji vektor $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ takav da je

$$\mathcal{H}_\pi = \overline{\overline{\mathrm{span}}}\{\pi(a)\xi :\ a \in A\} = \{\pi(a)\xi :\ a \in A\}.$$

U tom slučaju za vektor ξ kažemo da je *ciklički vektor* od π. Primijetimo da je svaka ciklička reprezentacija nedegenerirana te da je π ireducibilna ako i samo ako je svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}_\pi \setminus \{0\}$ ciklički od π. Za π-invarijantan potprostor $\mathcal{K}$ od π kažemo da je *ciklički potprostor* od π ako je $\pi|_\mathcal{K}$ ciklička reprezentacija od A. Može se pokazati da je svaka nedegenerirana reprezentacija od A ekvivalentna direktnoj sumi neke familije cikličkih subreprezentacija od A.

Neka je A C*-algebra i $I \in \mathrm{Id}(A)$. Pretpostavimo da nam je dana nedegenerirana reprezentacija π od I na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada nije teško vidjeti da za svako $a \in A$ postoji jedinstven ograničen operator $\tilde{\pi}(a) \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ takav da vrijedi

$$\tilde{\pi}(a)\pi(b) = \pi(ab) \quad \text{za sve } b \in I. \tag{1.3}$$

U tom slučaju je s $\tilde{\pi} : a \mapsto \tilde{\pi}(a)$ definirana (nedegenerirana) reprezentacija $\tilde{\pi}$ od A na $\mathcal{H}$ koja proširuje reprezentaciju π.

Napomena 1.2.3 Ako je ideal I esencijalan u A i ako je π vjerna, primijetimo i da je njeno proširenje $\tilde{\pi}$ vjerna reprezentacija od A. Zaista, ako je $\tilde{\pi}(a) = 0$ za neko $a \in A$, tada iz (1.3) slijedi da je $\pi(ab) = 0$ za sve $b \in I$. Budući da je π vjerna, odavde slijedi da je $ab = 0$ za sve $b \in I$. Dakle, $a \in I^\perp = \{0\}$.

Pretpostavimo sada da nam je dana nedegenerirana reprezentacija π od A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je potprostor $\mathcal{H}_I$ (napomena 1.2.2) π-invarijantan i imamo $\pi \sim \pi_{\mathcal{H}_I} \oplus \pi_{\mathcal{H}_I^\perp}$. Iz prethodnog rezmatranja slijedi da je reprezentacija $\pi_{\mathcal{H}_I}$ jedinstveno određena djelovanjem od π na I (tj. $\pi_{\mathcal{H}_I} = \widetilde{\pi_I}$). S druge strane, imamo $\pi_{\mathcal{H}_I{}^\perp}(I) = 0$, pa je s $a + I \mapsto \pi_{\mathcal{H}_I{}^\perp}(a)$ $(a \in A)$ dobro definirana reprezentacija kvocijentne algebre A/I na $\mathcal{H}_I^\perp$. To nam pokazuje da ako znamo sve reprezentacije od I i A/I tada možemo rekonstruirati i sve reprezentacije od A.

Ako je riječ o ireducibilnim reprezentacijama tada imamo sljedeći rezultat:

Teorem 1.2.4 Neka je π ireducibilna reprezentacija C*-algebre A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i neka je $I \in \mathrm{Id}(A)$ takav da je $\pi(I) \neq \{0\}$. Tada je restrikcija $\pi|_I$ ireducibilna reprezentacija od I na $\mathcal{H}$. Obratno, ako je π ireducibilna reprezentacija od I na $\mathcal{H}$, tada se formulom (1.3) ona na jedinstven način proširuje do ireducibilne reprezentacije $\tilde{\pi}$ na (istom Hilbertovom prostoru) $\mathcal{H}$. Ako su dvije takve reprezentacije od I ekvivalentne tada su i njihova proširenja ekvivalentna.

□

Štoviše, sličan rezultat vrijedi i za hereditarne C*-podalgebre:

Teorem 1.2.5 Neka je B hereditarna C*-podalgebra C*-algebre A. Ako je π ireducibilna reprezentacija od A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i ako vrijedi $\pi(B) \neq \{0\}$, tada je π_B ireducibilna reprezentacija od B (na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_B$).

□

Općenitije, ako je B C*-podalgebra od A tada svaku nedegeneriranu reprezentaciju od B također možemo proširiti do nedegenerirane reprezentacije od A, ali na nešto većem Hilbertovom prostoru. Naime, vrijedi:

Teorem 1.2.6 Neka je A C*-algebra i $B \subseteq A$ njena C*-podalgebra. Ako je π nedegenerirana reprezentacija od B, tada postoji nedegenerirana reprezentacija ρ od A i zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}_\rho$ koji je $\rho|_B$-invarijantan takav da je $\pi \sim (\rho|_B)_{\mathcal{K}}$. Nadalje, ako je π ciklička (ireducibilna) tada možemo postići i da je ρ ciklička (ireducibilna).

□

Reprezentacije na C*-algebrama usko su vezane uz pozitivne linearne funkcionale.

Napomena 1.2.7 Ako je X Banachov prostor tada njegov (topološki) dual označavamo s X^*. Dakle, elementi od X^* su ograničeni linearni funkcionali na X. Uvijek ćemo smatrati da je $X \subseteq X^{**}$ preko kanonskog ulaganja $\iota_X : X \to X^{**}$.

Neka je A C*-algebra. Za linearni funkcional φ na A kažemo da je *pozitivan* ako vrijedi $\varphi(A_+) \subseteq \mathbb{R}_+$. Svaki pozitivni linearni funkcional na A je (automatski) ograničen, dakle element od A^*. Nije teško vidjeti da je linearni funkcional $\varphi \in A^*$ je pozitivan ako i samo ako vrijedi

$$\|\varphi\| = \lim_{\alpha} \varphi(e_\alpha),$$

čim je (e_α) aproksimativna jedinica za A. Bitno svojstvo pozitivnih linearnih funkcionala je da oni zadovoljavaju tzv. SCB-nejednakost[1]

$$|\varphi(b^*a)|^2 \leq \varphi(b^*b)\varphi(a^*a) \quad \text{za sve } a, b \in A. \tag{1.4}$$

Nadalje, koristeći pozitivne linearne funkcionale, možemo dati sljedeću karakterizaciju σ-unitalnih C*-algebri (definicija 1.1.18):

Propozicija 1.2.8 Neka je A C*-algebra. Tada je A σ-unitalna ako i samo ako postoji *striktno pozitivni element* u A (tj. element $a \in A_+$ takav da vrijedi $\varphi(a) > 0$ za svaki pozitivni ne-nul linearni funkcional φ na A).

□

Za pozitivni linearni funkcional ω na A kažemo da je *stanje* na A ako vrijedi $\|\omega\| = 1$. Skup svih stanja na A označavamo s $\mathrm{S}(A)$. $\mathrm{S}(A)$ je konveksan podskup duala A^* koji je slabo*-kompaktan ukoliko je A unitalna. Ako A nije unitalna, tada se svako stanje $\omega \in \mathrm{S}(A)$ može (na jedinstven način) proširiti do stanja $\tilde{\omega} \in \mathrm{S}(\tilde{A})$, tako da definiramo

$$\tilde{\omega}(a + \lambda 1) := \omega(a) + \lambda 1 \quad (a \in A, \lambda \in \mathbb{C}).$$

Ako je π ciklička reprezentacija od A s cikličkim vektorom $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, tada je s

$$\omega_\pi(a) := \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}_\pi}$$

[1] Schwarz-Cauchy-Bunjakovski

definirano stanje na A. Obratno, za $\omega \in S(A)$ definiramo

$$L_\omega := \{a \in A : \ \omega(a^*a) = 0\}. \tag{1.5}$$

Koristeći SCB-nejedakost (1.4), lako se provjeri da je L_ω zatvoren lijevi ideal u A. Nadalje, A/L_ω postaje unitaran prostor uz skalarni produkt

$$\langle a + L_\omega, b + L_\omega\rangle_\omega := \omega(b^*a) \quad (a, b \in A).$$

Ako za $a \in A$ stavimo

$$\pi_\omega(a)(b + L_\omega) := ab + L_\omega \quad (b \in A),$$

tada je $\pi_\omega(a)$ ograničen operator na A/L_ω (s $\|\pi_\omega(a)\| \leq \|a\|$), pa se $\pi_\omega(a)$ na jedinstven način proširuje do ograničenog operatora (kojeg također označavamo s $\pi_\omega(a)$) na upotpunjenje $\mathcal{H}_\omega$ od A/L_ω. Također, nije teško vidjeti da je s $\pi_\omega : a \mapsto \pi_\omega(a)$ definirana reprezentacija od A na $\mathcal{H}_\omega$. Štoviše, vrijedi:

Teorem 1.2.9 (Geljfand-Naimark-Segal) Neka je A C*-algebra i $\omega \in S(A)$. Tada postoji jedinični vektor $\xi_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ koji je ciklički za reprezentaciju π_ω takav da vrijedi

$$\omega(a) = \langle \pi_\omega(a)\xi_\omega, \xi_\omega\rangle_\omega \quad \text{za sve } a \in A. \tag{1.6}$$

□

Definicija 1.2.10 Za reprezentaciju π_ω ($\omega \in S(A)$) kažemo da je *GNS-reprezentacija* pridruženja stanju ω, a pripadnu konstrukciju reprezentacije π_ω zovemo *GNS-konstrukcija*.

Za stanje $\omega \in S(A)$ kažemo da je *čisto stanje* ukoliko je ω ekstremna točka konveksnog skupa $S(A)$. Čista stanja na A su točno ona stanja za koja GNS-konstrukcija rezultira ireducibilnim reprezentacijama. Štoviše, vrijedi:

Teorem 1.2.11 Neka je A C*-algebra i $\omega \in S(A)$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) ω je čisto stanje na A;

(ii) pripadna GNS-reprezentacija π_ω je ireducibilna;

(iii) $\ker \omega = L_\omega + L_\omega^*$ (ovdje je $L_\omega^* = \{x^* : \ x \in L_\omega\}$).

□

Bitno svojstvo čistih stanja je da ona separiraju točke od A. Naime, koristeći Krein-Milmanov teorem, može se pokazati da za svaki $a \in A$ postoji čisto stanje ω na A takvo da je $\omega(a^*a) = \|a\|^2$. Koristeći tu činjenicu, teorem 1.2.11 i GNS-konstrukciju, dobivamo sljedeći bitan rezultat:

Teorem 1.2.12 Neka je A C*-algebra. Tada za svaki $a \in A$ postoji ireducibilna reprezentacija π od A takva da je $\pi(a) = \|a\|$.

□

Definicija 1.2.13 Neka je A C*-algebra. Za reprezentaciju

$$\pi_u := \bigoplus_{\omega \in S(A)} \pi_\omega$$

kažemo da je *univerzalna reprezentacija* od A, a za reprezentaciju

$$\pi_a := \bigoplus_{\omega \in P(A)} \pi_\omega$$

kažemo da je *reducirana atomska reprezentacija* od A.

Iz teorema 1.2.12 slijedi da je π_a (pa onda i π_u) vjerna reprezentacija od A. Odavde odmah slijedi tvrdnja iz teorema 1.1.9.

Na kraju ove točke iskažimo jedan bitan rezultat (i njegovu posljedicu) koji je vezan uz ireducibilne reprezentacije:

Teorem 1.2.14 (Kadisonov teorem tranzitivnosti) Neka je A C*-algebra i neka je π ireducibilna reprezentacija od A. Tada za svaki operator $x \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ i konačno-dimenzionalni projektor $p \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ postoji element $a \in A$ s $\|a\| = \|x\|$ takav da vrijedi

$$\pi(a)|_{p\mathcal{H}_\pi} = x|_{p\mathcal{H}_\pi}.$$

Ako je x hermitski, tada možemo postići i da je a hermitski. Ako je A unitalna i x unitaran, tada možemo postići i da je a unitaran.

□

Korolar 1.2.15 Neka je π ireducibilna reprezentacija C*-algebre A. Tada je ona i algebarski ireducibilna, tj. ako je $V \subseteq \mathcal{H}_\pi$ (ne nužno zatvoren) π-invarijantan vektorski potprostor od $\mathcal{H}_\pi$, tada je $V = \{0\}$ ili $V = \mathcal{H}_\pi$.

□

1.3 Von Neumannove algebre

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Osim topologije inducirane iz operatorske norme, na $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ postoje i mnoge druge bitne topologije. Nama će posebno biti interesantne sljedeće tri:

(i) *Ultraslaba topologija* ili slaba*-topologija na $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ je lokalno konveksna Hausdorffova topologija inducirana kanonskom dualnosti između $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ i $\mathrm{T}(\mathcal{H})$ (gdje $\mathrm{T}(\mathcal{H})$ označava algebru svih operatora na $\mathcal{H}$ s konačnim tragom). Ona je dana s
$$\langle x, y\rangle := \mathrm{tr}(xy), \quad (x \in \mathrm{B}(\mathcal{H}),\ y \in \mathrm{T}(\mathcal{H})).$$
S obzirom na tu dualnost $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ možemo identificirati s dualom od $\mathrm{T}(\mathcal{H})$.

(ii) *Slaba operatorska topologija* (kraće WOT[2]) na $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ je lokalno konveksna Hausdorffova topologija određena polunormama
$$p_{\xi,\eta}(a) := |\langle a\xi, \eta\rangle|, \quad (\xi, \eta \in \mathcal{H}).$$
Tipična WOT-okolina operatora $a \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ je oblika
$$\{x \in \mathrm{B}(\mathcal{H}) : \ |\langle (a-x)\xi_i, \eta_i\rangle| < \varepsilon,\ \text{za sve } 1 \le i \le n\},$$
gdje su $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$. Lako se provjeri da je WOT najslabija topologija na $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ s obzirom na koju su sva *vektorska stanja* $\omega_\xi : a \mapsto \langle a\xi, \xi\rangle$ $(\xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1)$ neprekidna.

(iii) *Jaka operatorska topologija* (kraće SOT[3]) na $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ je lokalno konveksna Hausdorffova topologija određena polunormama
$$p_\xi(a) := \|a\xi\|, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$
Tipična SOT-okolina operatora $a \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ je oblika
$$\{x \in \mathrm{B}(\mathcal{H}) : \|(a-x)\xi_i\| < \varepsilon,\ \text{za sve } 1 \le i \le n\},$$
gdje su $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$.

Očito je jaka operatorska topologija jača od slabe operatorske topologije. Ipak, SOT i WOT duali od $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ se podudaraju. Naime, vrijedi:

Propozicija 1.3.1 Za linearni funkcional φ na $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \langle x\xi_i, \eta_i\rangle$, za neke $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}$;

(ii) φ je WOT-neprekidan;

(iii) φ je SOT-neprekidan.

□

Specijalno, WOT-zatvarač i SOT-zatvrač konveksnog skupa se podudaraju. Također, iz prethodne propozicije slijedi da je slaba operatorska topologija na $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ u stvari

[2]engl. weak operator topology
[3]engl. strong operator topology

slaba topologija s obzirom na dualnost $\langle \mathrm{B}(\mathcal{H}), \mathrm{F}(\mathcal{H})\rangle$, gdje $\mathrm{F}(\mathcal{H})$ označava prostor svih operatora konačnog ranga na $\mathcal{H}$. Ako za vektore $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ sa $\xi \otimes \eta$ označimo operator (najviše) ranga 1,

$$\xi \otimes \eta : \zeta \mapsto \langle \zeta, \eta\rangle \xi \quad (\zeta \in \mathcal{H}),$$

tada se svaki operator $y \in \mathrm{F}(\mathcal{H})$ može zapisati u obliku $y = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i$. Tada je dualnost $\langle \mathrm{B}(\mathcal{H}), \mathrm{F}(\mathcal{H})\rangle$ dana s

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x\xi_i, \eta_i\rangle \quad (x \in \mathrm{B}(\mathcal{H})).$$

Primijetimo da odavde odmah slijedi da je slaba operatorska topologija slabija od ultraslabe topologije. Nadalje, nije teško vidjeti da se te dvije topologije podudaraju na ograničenim podskupovima od $\mathrm{B}(\mathcal{H})$.

Bitno svojstvo jake operatorske topologije je da je ona potpuna s obzirom na uređaj na hermitskim operatorima. Naime, vrijedi

Teorem 1.3.2 (Vigier) Neka je (a_α) mreža hermitskih operatora u $\mathrm{B}(\mathcal{H})$. Tada je (a_α) SOT-konvergentna, čim je ona rastuća i odozgo omeđena ili padajuća i odozdo omeđena.

□

Definicija 1.3.3 Za $*$-algebru $A \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$ kažemo da je *von Neumannova algebra* ako je A SOT-zatvorena (ili ekvivalentno, ako je A WOT-zatvorena).

Očito je svaka von Neumannova algebra C*-algebra. Nadalje, ako je (e_α) aproksimativna jedinica von Neumannove algebre $A \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$, tada prema teoremu 1.3.2 ona SOT-konvergira prema hermitskom operatoru $p \in A$. Tada je očito p jedinica u A. Specijalno, svaka von Neumannova algebra je unitalna C*-algebra. Također primijetimo da posebno jednostavan oblik imaju SOT-zatvoreni ideali u A:

Propozicija 1.3.4 Neka je $A \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$ von Neumannova algebra i neka je I ideal u A koji je SOT-zatvoren. Tada postoji jedinstven centralni projektor $p \in Z(I) \subseteq Z(A)$ takav da je $I = pA = Ap$.

□

Naravno, p je jedinica von Neumannove algebre I.

Ako je $S \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tada *komutant* od S definiramo s

$$S' := \{x \in \mathrm{B}(\mathcal{H}) : \ xy = yx, \text{ za sve } y \in S\}.$$

Za skup $S'' := (S')'$ kažemo da je *bikomutant* od S. Vrijedi sljedeći bitan teorem:

Teorem 1.3.5 (von Neumannov teorem o bikomutantu) Neka je $A \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$ $*$-algebra takva da je $1_{\mathcal{H}} \in A$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $A'' = A$;

(ii) A je SOT-zatvorena.

□

Često ćemo koristiti i sljedeći bitan teorem:

Teorem 1.3.6 (Teorem Kaplanskog o gustoći) Neka je $A \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$ C*-algebra i $\overline{A}$ njeno SOT-zatvorenje. Tada vrijedi:

(i) $\mathrm{Ball}(A)$ je SOT-gusta u $\mathrm{Ball}(\overline{A})$;

(ii) $\mathrm{Ball}(A_h)$ je SOT-gusta u $\mathrm{Ball}(\overline{A_h})$;

(iii) $\mathrm{Ball}(A_+)$ je SOT-gusta u $\mathrm{Ball}(\overline{A_+})$;

(iv) Ako je A unitalna tada je grupa svih unitarnih operatora u A SOT-gusta u grupi svih unitarnih operatora u $\overline{A}$.

□

Specijalno, ultraslabi zatvarač C*-algebre $A \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$ se podudara sa njenim SOT-zatvaračem (odnosno WOT-zatvaračem).

Neka je A C*-algebra, A^{**} njen bidual, $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ reprezentacija od A i $\pi(A)''$ von Neumannova algebra generirana s A. Tada se π može na jedinstven način proširiti do (slabo*,ultraslabo)-neprekidnog linearnog operatora $\bar{\pi} : A^{**} \to \pi(A)''$ za kojeg vrijedi $\bar{\pi}(\mathrm{Ball}(A^{**})) = \mathrm{Ball}(\pi(A)'')$. Specijalno, proširenje $\bar{\pi}$ je surjektivno. Ako tu konstrukciju primijenimo na njenu univerzalnu reprezentaciju π_u (definicija 1.2.13), imamo sljedeći bitan rezultat (koji ujedno opravdava naziv "univerzalna reprezentacija").

Teorem 1.3.7 (Sherman) Neka je A C*-algebra i π_u njena univerzalna reprezentacija. Tada je jedinstveno (slabo*,ultraslabo)-neprekdino proširenje $\overline{\pi_u} : A^{**} \to \pi_u(A)''$ izometrički izomorfizam Banachovih prostora. Specijalno, za svaku reprezentaciju $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\rho)$ postoji ultraslabo neprekidni surjektivni $*$-homomorfizam $\tilde{\rho} : \pi_u(A)'' \to \rho(A)''$ za kojeg dijagram

$$\begin{tikzcd} & \pi_u(A)'' \arrow[d, "\tilde{\rho}"] \\ A \arrow[ur, "\pi_u"] \arrow[r, "\rho"] & \rho(A)'' \end{tikzcd}$$

komutira.

□

Definicija 1.3.8 Za von Neumannovu algebru $\pi_u(A)''$ kažemo da je *univerzalna omotačka von Neumannova algebra* od A.

Napomena 1.3.9 Radi teorema 1.3.7 mi ćemo ubuduće identificirati $\pi_u(A)''$ s A^{**}.

1.4 Spektar i primitivni spektar C*-algebre. Dauns-Hofmannov teorem

Definicija 1.4.1 Neka je A C*-algebra.

(i) Skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija od A zovemo *spektar* od A i označavamo s $\hat{A}$. Klasu ekvivalencije ireducibilne reprezentacije π od A označavamo s $[\pi]$.

(ii) Za ideal $P \in \mathrm{Id}(A)$ kažemo da je *primitivan* ukoliko postoji ireducibilna reprezentacija π od A takva da je $P = \ker \pi$. Skup svih primitivnih ideala u A označavamo s $\mathrm{Prim}(A)$ i zovemo *primitivni spektar* od A.

(iii) Za ideal $P \in \mathrm{Id}(A)$ kažemo da je *prim* ako za svaka dva ideala $I, J \in \mathrm{Id}(A)$ iz $IJ = I \cap J \subseteq P$ slijedi $I \subseteq P$ ili $J \subseteq P$. Skup svih prim ideala u A zovemo *prim spektar* od A i označavamo s $\mathrm{Prime}(A)$.

(iv) Za ideal $M \in \mathrm{Id}(A)$ kažemo da je *maksimalan* ako je $M \neq A$ i ako za bilo koji ideal $J \in \mathrm{Id}(A)$ iz $M \subseteq J$ slijedi $J = M$ ili $J = A$. Skup svih maksimalnih modularnih ideala u A zovemo *maksimalni spektar* od A i označavamo ga s $\mathrm{Max}(A)$.

Za $S \subseteq A$ definiramo *ljusku* $\mathrm{hull}(S)$ od S kao skup svih primitivnih ideala koji sadrže S. Ako je F bilo koji neprazan podskup od $\mathrm{Prim}(A)$ tada definiramo *jezgru* $\ker(F)$ od F kao presjek svih ideala u F. Također stavljamo $\ker(\emptyset) := A$.

Propozicija 1.4.2 Neka je A C*-algebra.

(i) Za svaki ideal $I \in \mathrm{Id}(A)$ vrijedi

$$I = \ker(\mathrm{hull}(I)).$$

Drugim riječima, svaki ideal u A je presjek skupa svih primitivnih ideala u A koji ga sadrže.

(ii) $\mathrm{Prim}(A) \subseteq \mathrm{Prime}(A)$. Drugim riječima, svaki primitivni ideal u A je prim.

(iii) $\mathrm{Max}(A) \subseteq \mathrm{Prim}(A)$. Drugim riječima, svaki maksimalni modularni ideal u A je primitivan.

□

Istaknimo sljedeće tri bitne klase C*-algebri:

Definicija 1.4.3 Za C*-algebru A kažemo da je:

(i) *prosta*, ako A nema pravih ideala;

(ii) *primitivna*, ako je $\{0\}$ primitivni ideal u A (ili ekvivalentno, ako A dopušta vjernu ireducibilnu reprezentaciju);

(iii) *prim*, ako je $\{0\}$ prim ideal u A.

Napomena 1.4.4 Neka je A C*-algebra. Primijetimo da je ideal P u A primitivan (prim) ako i samo ako je A/P primitivna (prim) C*-algebra. Nadalje, očito je svaka prosta C*-algebra primitivna. Iz propozicije 1.4.2 slijedi i da je svaka primitivna C*-algebra prim.

Ukoliko je A separabilna, tada vrijedi i obrat zadnje tvrdnje.

Teorem 1.4.5 Neka je A separabilna prim C*-algebra. Tada je ona primitivna.

□

Dugo vremena bio je otvoren problem da li je svaka prim C*-algebra primitivna. Tek nedavno, Weaver je u [71] pokazao da je odgovor na to pitanje negativan.

Istaknimo i sljedeći rezultat vezan uz prim C*-algebre:

Propozicija 1.4.6 Neka je A C*-algebra A. Tada je ekvivalentno:

(i) A je prim;

(ii) $M(A)$ je prim;

(iii) Ako su $a, b \in A$ takvi da je $aAb = \{0\}$, tada je $a = 0$ ili $b = 0$.

Nadalje, u tom slučaju vrijedi

$$Z(A) = \begin{cases} \mathbb{C}1, & \text{ako je } A \text{ unitalna,} \\ \{0\}, & \text{inače.} \end{cases}$$

□

Skup $\mathrm{Prim}(A)$ možemo opskrbiti sa prirodnom topologijom koju definiramo na sljedeći način:

Definicija 1.4.7 Neka je A C*-algebra. Za podskup $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ definiramo *zatvarač* $\overline{F}$ od F s

$$\overline{F} := \mathrm{hull}(\ker(F)).$$

Teorem 1.4.8 Neka je A C*-algebra. Tada postoji jedinstvena topologija na $\mathrm{Prim}(A)$ s obzirom na koju je podskup $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ zatvoren ako i samo ako vrijedi $\overline{F} = F$. Ona ima sljedeća svojstva:

(i) $\mathrm{Prim}(A)$ je T_0-prostor.

(ii) Preslikavanje $I \mapsto \mathrm{hull}(I)$ je bijekcija sa $\mathrm{Id}(A)$ na sve zatvorene podskupove od $\mathrm{Prim}(A)$.

(iii) Ako su $I, J \in \mathrm{Id}(A)$ tada je $I \subseteq J$ ako i samo ako je $\mathrm{hull}(J) \subseteq \mathrm{hull}(I)$.

□

Definicija 1.4.9 Topologija na $\mathrm{Prim}(A)$ iz prethodnog teorema zove se *Jacobsonova topologija*.

Primijetimo da iz teorema 1.4.8 (ii) slijedi da su otvoreni podskupovi u $\mathrm{Prim}(A)$ točno oni skupovi oblika

$$\{P \in \mathrm{Prim}(A) : \ I \nsubseteq P\}, \tag{1.7}$$

za neki $I \in \mathrm{Id}(A)$.

Napomena 1.4.10 Općenito, kao topološki prostor, primitivni spektar C*-algebre ne mora zadovoljavati ostale aksiome separacije osim aksioma T_0.

(i) Primijetimo da je $\mathrm{Prim}(A)$ T_1-prostor ako i samo ako je svaki primitivni ideal u A maksimalan.

(ii) Primjer C*-algebre kod koje $\mathrm{Prim}(A)$ nije T_1-prostor je algebra $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ za separabilan Hilbertov prostor $\mathcal{H}$. Naime, $\mathrm{Prim}(\mathrm{B}(\mathcal{H})) = \{\{0\}, \mathrm{K}(\mathcal{H})\}$, pa $\{0\}$ nije maksimalni ideal u $\mathrm{B}(\mathcal{H})$.

(iii) U klasu C*-algebri kod kojih je $\mathrm{Prim}(A)$ T_1-prostor spadaju sve liminalne (ili CCR) C*-algebre. Prisjetimo se, za C*-algebru A kažemo da je *liminalna* ako je $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$, za svaku ireducibilnu reprezentaciju π od A.

Budući da ekvivalentne ireducibilne reprezentacije imaju iste jezgre, postoji kanonska surjekcija sa $\hat{A}$ na $\mathrm{Prim}(A)$ dana s $[\pi] \mapsto \ker \pi$. Spektar $\hat{A}$ opskrbljujemo s najslabijom topologijom s obzirom na koju je ta surjekcija neprekidna. Ta se topologija također zove Jacobsonova topologija. Primijetimo da je $\hat{A}$ T_0-prostor ako i samo ako su svake dvije ireducibilne reprezentacije od A s istim jezgrama ekvivalentne.

Napomena 1.4.11 Ubuduće, kada govorimo o spektru ili o primitivnom spektru C*-algebre, uvijek ćemo smatrati da su oni opskrbljeni sa Jacobsonovom topologijom.

Koristeći teorem 1.2.4 nije teško dokazati sljedeću tvrdnju:

Propozicija 1.4.12 Neka je A C*-algebra, $I \in \mathrm{Id}(A)$ i $q_I : A \to A/I$ kvocijentni $*$-epimorfizam.

(i) Preslikavanje $P \mapsto P \cap I$ je homeomorfizam s otvorenog podskupa $\{P \in \mathrm{Prim}(A) : \ I \nsubseteq P\}$ od $\mathrm{Prim}(A)$ na $\mathrm{Prim}(I)$. Također, preslikavanje $[\pi] \mapsto [\pi_I]$ je homeomorfizam s otvorenog podskupa $\{[\pi] \in \hat{A} : \ [\pi_I] \neq 0\}$ od $\hat{A}$ na $\hat{I}$.

(ii) Preslikavanje $Q \mapsto q_I^{-1}(Q)$ je homeomorfizam s $\mathrm{Prim}(A/I)$ na zatvoren podskup $\mathrm{hull}(I) = \{P \in \mathrm{Prim}(A) \ : I \subseteq P\}$ od $\mathrm{Prim}(A)$ s inverzom $P \mapsto P/I$. Također, preslikavanje $[\pi] \mapsto [\pi \circ q_I]$ je homeomorfizam s $(A/I)\hat{}$ na zatvoren podskup $\{[\pi] \in \hat{A} : \pi_I = 0\}$ od $\hat{A}$.

□

Napomena 1.4.13 Zbog prethodne propozicije, mi ćemo ubuduće poistovijetiti $\mathrm{hull}(I)$ s $\mathrm{Prim}(A/I)$ $(I \in \mathrm{Id}(A))$.

Promotrimo sljedeća dva jednostavna primjera, koji ujedno opravdavaju prirodnost definicije Jacobsonove topologije.

Primjer 1.4.14 Neka je Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor i neka je $A := C_0(\Delta)$ pripadna komutativna C*-algebra. Izaberimo proizvoljnu ireducibilnu reprezentaciju π od A. Budući da komutant $\pi(A)'$ od $\pi(A)$ sadrži $\pi(A)$, prema teoremu 1.2.1 imamo $\pi(A) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}_\pi}$. Odavde slijedi da je svaki zatvoren potprostor od $\mathcal{H}_\pi$ π-invarijantan, a kako je π ireducibilna, mora biti $\dim \mathcal{H}_\pi = 1$. Dakle, π je karakter na A, pa postoji točka $s \in \Delta$ takva da je $\pi = \pi_s$; gdje smo s π_s označili karakter evaluacije u točki s. Naravno, za različite točke $s_1, s_2 \in \Delta$ reprezentacije π_{s_1} i π_{s_2} nisu ekvivalentne, pa je

$$\hat{A} = \{\pi_s : \ s \in \Delta\} \ \text{ i } \ \mathrm{Prim}(A) = \{\ker \pi_s : \ s \in \Delta\}.$$

Ako je $S \subseteq \Delta$ i $F = \{\ker \pi_s : \ s \in S\}$, primijetimo da je

$$\overline{F} = \mathrm{hull}(\ker(F)) = \mathrm{hull}\{f \in C_0(\Delta) : \ f|_S = 0\} = \{\ker \pi_s : \ s \in \overline{S}\}.$$

Primjer 1.4.15 Neka je sada $A := C_0(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ i Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor (vidjeti primjer 1.1.42 (ii)). Za $s \in \Delta$ neka je $\pi_s : A \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ evaluacija u točki s. Ukoliko $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ poistovijetimo s $\mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$, tada svaka evaluacija π_s daje ireducibilnu reprezentaciju od A. Primijetimo da ukoliko izabremo neku drugu identifikaciju od $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sa $\mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$, tada pripadne evaluacije daju ekvivalentne reprezentacije. Naime, ako su $S, T : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ $*$-izomorfizmi, tada je $S \circ T^{-1}$ $*$-automorfizam od $\mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$, pa je stoga oblika $X \mapsto UXU^*$ za neki unitarni operator U na $\mathbb{C}^n$. Odavde slijedi da U implementira ekvivalenciju između reprezentacija $T \circ \pi_s : a \mapsto T(a(s))$ i $S \circ \pi_s : a \mapsto S(a(s))$.

Tvrdimo da je

$$\hat{A} = \{[\pi_s] : \ s \in \Delta\}, \tag{1.8}$$

te da je preslikavanje $\Delta \to \hat{A}$ dano s $s \mapsto [\pi_s]$ homeomorfizam.

Kako bi to dokazali, najprije primijetimo da je centar od A oblika

$$Z(A) = \{f1_n : \ f \in C_0(\Delta)\} \cong C_0(\Delta), \tag{1.9}$$

gdje je s 1_n označena jedinična matrica iz $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Naime, jedine matrice iz $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ koje komutiraju sa svim matricama iz $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ su skalarne matrice, što zajedno s neprekidnošću funkcija iz A povlači jednakost (1.9).

Neka je π ireducibilna reprezentacija od A. Prema primjeru 1.4.14 postoji jedinstvena točka $s_0 \in \Delta$ takva da je $\pi(f1_n) = f(s_0)1_{\mathcal{H}_\pi}$. Tvrdimo da je

$$J_{s_0} := \{a \in A : \ a(s_0) = 0\} \subseteq \ker \pi.$$

Zaista, neka su $a \in J_{s_0}$ i $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti od a postoji okolina U oko s_0 takva da je $\|a(s)\| < \varepsilon$ za sve $s \in U$. Izaberimo neprekidnu funkciju $f\colon \Delta \to [0,1]$ takvu da je $f(s_0) = 0$ i $f(s) = 1$ za sve $s \in \Delta \setminus U$. Tada je $\|a(s) - f(s)a(s)\| < \varepsilon$ za sve $s \in \Delta$, odakle slijedi $\|\pi(a) - \pi(fa)\| < \varepsilon$. Ukoliko a faktoriziramo u obliku $a = (g1_n)b$, gdje su $g \in C_0(\Delta)$ i $b \in A$, tada je $fg \in C_0(\Delta)$, pa imamo

$$\pi(fa) = \pi(fg1_n)\pi(b) = (fg)(s_0)\pi(b) = 0.$$

Dakle, $\|\pi(a)\| < \varepsilon$. Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, imamo $\pi(a) = 0$, odnosno $a \in \ker \pi$.

Budući da je $J_{s_0} \subseteq \ker \pi$, s $\dot{\pi} : a + J_{s_0} \mapsto \pi(a)$ je dana ireducibilna reprezentacija od A/J_{s_0} na istom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_\pi$. Primijetimo da je $\dot{\pi}$ ireducibilna, jer ima istu sliku kao π. Budući da $\pi_{s_0} : a \mapsto \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ inducira $*$-izomorfizam ϕ_{s_0} s A/J_{s_0} na $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, kompozicija $\dot{\pi} \circ \phi_{s_0}^{-1}$ daje ireducibilnu reprezentaciju od $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Kako su sve ireducibilne reprezentacije od $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ekvivalentne jediničnoj reprezentaciji, slijedi da je reprezentacija $\pi = \dot{\pi} \circ \phi_{s_0}^{-1} \circ \pi_{s_0}$ ekvivalentna s π_{s_0}. Budući da za $s \neq s_0$ postoji $a \in A$ takav da je $a(s) = 0$ i $a(s_0) \neq 0$, slijedi da π_s i π_{s_0} imaju različite jezgre, pa stoga ne mogu biti ekvivalentne. Time smo dokazali jednakost (1.8).

Dokažimo i da je preslikavanje $s \mapsto [\pi_s]$ s Δ na $\hat{A}$ homeomorfizam. Budući da je preslikavanje $[\pi_s] \to \ker \pi_s$ bijekcija s $\hat{A}$ na $\mathrm{Prim}(A)$, dovoljno je dokazati da je $s \mapsto \ker \pi_s$ homeomorfizam s Δ na $\mathrm{Prim}(A)$. Nadalje, kako bi to dokazali, dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\overline{\{\ker \pi_s : \ s \in V\}} = \{\ker \pi_s : \ s \in \overline{V}\} \tag{1.10}$$

za svaki podskup $V \subseteq \Delta$. Po definiciji zatvarača u $\mathrm{Prim}(A)$, znamo da je lijeva strana u (1.10) oblika $\{\ker \pi_s : \ s \in W\}$, gdje je $W := \{s' \in \Delta : \ \bigcap_{s \in V} \ker \pi_s \subseteq \ker \pi_{s'}\}$. Trebamo pokazati da je $W = \overline{V}$. Budući da su svi elementi iz a neprekidne funkcije na Δ, iz $a|_V = 0$ slijedi $a|_{\overline{V}} = 0$, pa je svakako $\overline{V} \subseteq W$. S druge strane, ako je $s' \in \Delta \setminus \overline{V}$ tada postoji neprekidna funkcija $f \in C_0(\Delta)$ takva da je $f|_{\overline{V}} = 0$ i $f(s') = 1$. Slijedi da je $f1_n \in \ker \pi_s$ za sve $s \in \overline{V}$ i $f1_n \notin \ker \pi_{s'}$, što povlači $s' \notin W$. Dakle, mora biti $W = \overline{V}$ i time je tvrdnja u potpunosti dokazana.

Neka je A C*-algebra. Za element $a \in A$ definiramo *funkciju norme* od a s

$$\check{a} : \mathrm{Prim}(A) \to \mathbb{R}_+, \quad \check{a}(P) := \|a + P\|.$$

Funkcije norme su očito ograničene. Štoviše, iz teorema 1.2.12 slijedi da je

$$\sup\{\check{a}(P) : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\} = \|a\| \quad \text{za sve } a \in A.$$

Također primijetimo da funkcije norme separiraju točke od $\mathrm{Prim}(A)$.

Propozicija 1.4.16 Neka je A C*-algebra.

(i) Funkcije norme su odozdo poluneprekidne, tj. za svako $a \in A$ i $\alpha \geq 0$ skup $\{P \in \mathrm{Prim}(A) : \check{a}(P) \leq \alpha\}$ je zatvoren u $\mathrm{Prim}(A)$.

(ii) Ako je $\{a_i\}$ gust podskup u $\mathrm{Ball}(A)$ tada skupovi oblika $U_i := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : \check{a}_i(P) > \frac{1}{2}\}$ čine bazu topologije za $\mathrm{Prim}(A)$.

(iii) Za $a \in A$ i $\alpha > 0$ skup $\{P \in \mathrm{Prim}(A) : \check{a}(P) \geq \alpha\}$ je kompaktan (ali ne nužno zatvoren).

□

Korolar 1.4.17 Neka je A C*-algebra. Tada je $\mathrm{Prim}(A)$ lokalno kompaktan T_0-prostor koji je kompaktan ukoliko je A unitalna. Ako je A separabilna tada $\mathrm{Prim}(A)$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

□

Za primitivni ideal $P \in \mathrm{Prim}(A)$ kažemo da je *separiran* ako za svaki $Q \in \mathrm{Prim}(A)$ koji nije u zatvaraču od $\{P\}$ (tj. $P \not\subseteq Q$) postoje disjunktne otvorene okoline od P i Q u $\mathrm{Prim}(A)$. Vrijedi:

Teorem 1.4.18 Neka je A C*-algebra.

(i) Primitivni ideal $P \in \mathrm{Prim}(A)$ je separiran ako i samo ako su sve funkcije norme $\check{a}$ $(a \in A)$ neprekidne u P. Specijalno, $\mathrm{Prim}(A)$ je Hausdorffov ako i samo ako su sve funkcije norme neprekidne na $\mathrm{Prim}(A)$.

(ii) Ako je A separabilna tada je skup svih Hausdorffovih točaka neprazan i gust u $\mathrm{Prim}(A)$.

□

Na kraju ove točke iskažimo fundamentalni Dauns-Hofmannov teorem koji ukratko kaže da centar multiplikatorske algebre od A možemo poistovjetiti s C*-algebrom $C_b(\mathrm{Prim}(A))$ svih ograničenih neprekidnih kompleksnih funkcija na $\mathrm{Prim}(A)$. Preciznije, vrijedi:

Teorem 1.4.19 (Dauns-Hofmann) Neka je A C*-algebra. Za svako $P \in \mathrm{Prim}(A)$ neka je $q_P : A \to A/P$ pripadni kvocijentni $*$-epimorfizam. Tada postoji $*$-izomorfizam $\Psi_A : Z(M(A)) \to C_b(\mathrm{Prim}(A))$ takav da vrijedi

$$q_P(za) = \Psi_A(z)(P)q_P(a) \quad \text{za sve } z \in Z(M(A)),\ a \in A \text{ i } P \in \mathrm{Prim}(A).$$

□

Mi ćemo samo opisati konstrukciju preslikavanja Ψ_A sa $Z(M(A))$ u $C_b(\mathrm{Prim}(A))$.

Neka je π ireducibilna reprezentacija od A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_\pi$. Radi jednostavnosti oznaka, stavimo $Z := Z(M(A))$, te neka je $\hat{Z}$ prostor svih karaktera na Z i $\check{Z}$ maksimalni spektar od Z (tj. prostor svih maksimalnih ideala u Z).

Prema teoremu 1.2.4 π možemo na jedinstven način proširiti do (ireducibilne) reprezentacije $\tilde{\pi}$ od $M(A)$ na $\mathcal{H}_\pi$, za koju vrijedi vrijedi (1.3). Kako je π ireducibilna, za svako $z \in Z$ imamo $\tilde{\pi}(z) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}_\pi}$. Dakle, $\tilde{\pi}(z) = \omega_\pi(z)1_{\mathcal{H}_\pi}$, gdje je $\omega_\pi : Z \to \mathbb{C}$ $*$-homomorfizam i $\omega_\pi(1) = 1$. Drugim riječima, ω_π je karakter od Z. Zbog (1.3) imamo

$$\ker \omega_\pi = \ker \tilde{\pi} \cap Z = \{z \in Z : \ zA \subseteq \ker \pi\},$$

pa ω_π ovisi samo o $\ker \pi$. Tada je s

$$\chi_A : \mathrm{Prim}(A) \to \check{Z}, \quad \chi_A(\ker \pi) := \ker \omega_\pi \tag{1.11}$$

dobro definirano preslikavanje. Tvrdimo da je χ_A neprekidno. Za $J \in \mathrm{Id}(Z)$

$$\mathcal{O}_J := \{\ker \omega : \ \omega \in \hat{Z} \text{ i } J \nsubseteq \ker \omega\}$$

je tipičan otvoren skup u $\check{Z}$. S druge strane, neka je $A[J]$ ideal u A generiran s J, tj.

$$A[J] = \overline{\overline{\left\{\sum_{i=1}^{n} z_i a_i : \ n \in \mathbb{N}, z_i \in Z, \ a_i \in A\right\}}} = JA, \tag{1.12}$$

prema Hewitt-Cohenovom teoremu faktorizacije (teorem 1.1.15). Za njegov pripadni otvoren skup

$$\mathcal{O}_{A[J]} := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : \ A[J] \nsubseteq P\}$$

u $\mathrm{Prim}(A)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\chi_A^{-1}(\mathcal{O}_J) &= \{P \in \mathrm{Prim}(A) : \ \chi_A(P) \in \mathcal{O}_J\} \\
&= \{\ker \pi : \ [\pi] \in \hat{A} \text{ i } J \nsubseteq \ker \omega_\pi\} \\
&= \{\ker \pi : \ [\pi] \in \hat{A} \text{ i } A[J] \nsubseteq \ker \pi\} \\
&= \mathcal{O}_{A[J]}.
\end{aligned}$$

Dakle, χ_A je neprekidno preslikavanje, pa inducira $*$-homomorfizam

$$\Psi_A : Z(M(A)) \to C_b(\mathrm{Prim}(A)), \quad \Psi_A(z) = \hat{z} \circ \psi^{-1} \circ \chi_A, \tag{1.13}$$

gdje je $\psi : \hat{Z} \to \check{Z}$, $\psi : \omega \mapsto \ker \omega$ kanonski homeomorfizam i $\hat{z} : \hat{Z} \to \mathbb{C}$ Geljfandova transformacija od z. Eksplicitno, imamo

$$\Psi_A(z)(\ker \pi)1_{\mathcal{H}_\pi} = \hat{z}(\omega_\pi)1_{\mathcal{H}_\pi} = \tilde{\pi}(z), \quad z \in Z \text{ i } [\pi] \in \hat{A}. \tag{1.14}$$

Za $P \in \mathrm{Prim}(A)$ neka je $[\pi] \in \hat{A}$ takva da je $\ker \pi = P$. Ako A/P poistovjetimo s $\pi(A)$ (preko kanonskog izomorfizma $a + P \mapsto \pi(a)$), imamo

$$q_P(za) = \pi(za) = \tilde{\pi}(z)\pi(a) = \Psi_A(z)(P)\pi(a) = \Psi_A(z)(P)q_P(a),$$

za sve $z \in Z(M(A))$ i $a \in A$.

Odavde direktno slijedi injektivnost od Ψ_A. Naime, iz $\Psi_A(z) = 0$ slijedi $q_P(za) = 0$ za sve $a \in A$ i $P \in \mathrm{Prim}(A)$, odnosno

$$za \in \bigcap \{P : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\} = \{0\} \quad \text{za sve } a \in A.$$

Dakle, $zA = \{0\}$, a kako je A esencijalan ideal u $M(A)$, mora biti $z = 0$.

Dokaz surjektivnosti od Ψ_A može se naći u [58].

Napomena 1.4.20 Neka je A C*-algebra i neka je χ_A preslikavanje iz (1.11).

(i) Ako je $P \in \mathrm{Prim}(A)$ takav da $Z(A) \nsubseteq P$, tada je

$$\chi_A(P) = P \cap Z(A) \in \mathrm{Max}(Z(A)).$$

Nadalje, za svaki $J \in \mathrm{Max}(Z(A))$ postoji $P \in \mathrm{Prim}(A)$ takav da je $P \cap Z(A) = J$. Zaista, neka je ρ ireducibilna reprezentacija (karakter) od $Z(A)$ s jezgrom J. Prema teoremu 1.2.6 ρ možemo proširiti do ireducibilne reprezentacije π od A (na nešto većem Hilbertovom prostoru). Budući da je za $x \in J \subseteq Z(A)$, $\pi(x)$ skalarni operator i $\rho(x) = 0$, mora biti i $\pi(x) = 0$. Dakle, $J = \ker \rho \subseteq \ker \pi$, odakle slijedi da je $\chi_A(\ker \pi) = \ker \pi \cap Z(A) = J$. Specijalno, ako je A unitalna, χ_A je surjekcija i $\chi_A(P) = P \cap Z(A)$ za sve $P \in \mathrm{Prim}(A)$.

(ii) Ako je $z \in Z(M(A))$, $P \in \mathrm{Prim}(A)$, tada iz definicije (1.13) od Ψ_A slijedi

$$|\Psi_A(z)(P)| = \|z + P_*\| = \check{z}(P_*),$$

gdje je P_* jedinstven primitivni ideal od $M(A)$ takav da je $P_* \cap A = P$. Ukoliko je $z \in Z(A)$ tada je $\|z + P_*\| = \|z + P\|$, odakle slijedi da su sve funkcije norme $\check{z}$ ($z \in Z(A)$) centralnih elemenata neprekidne na $\mathrm{Prim}(A)$. Specijalno, ako je A unitalna, imamo

$$C(\mathrm{Prim}(A))_+ = \Psi_A(Z(A)_+) = \{\check{z} : \ z \in Z(A)_+\}.$$

1.5 Topologije na idealima i primalni ideali

Neka je T topološki prostor, neka je $\mathfrak{F}(T)$ *hiperprostor* svih zatvorenih podskupova od T i stavimo $\mathfrak{F}'(T) := \mathfrak{F}(T) \setminus \{\emptyset\}$. Za podskup $L \subseteq T$ kažemo da je *graničan* ukoliko postoji mreža u T koja konvergira prema svim točkama iz L.

Napomena 1.5.1 Nije teško vidjeti da je podskup $L \subseteq T$ graničan ako i samo ako svaka konačna familija otvorenih podskupova koja siječe L ima neprazan presjek.

Označimo sa $\mathfrak{L}(T)$ sve granične podskupove od T i stavimo $\mathfrak{L}'(T) := \mathfrak{L}(T) \cap \mathfrak{F}'(T)$. Koristeći Zornovu lemu lako se vidi da je svaki $L \in \mathfrak{L}(T)$ sadržan u nekom maksimalnom graničnom skupu. Očito je svaki maksimalan granični skup zatvoren i neprazan. Sa $\mathfrak{M}(T)$ označavamo familiju svih maksimalnih graničnih skupova.

Pretpostavimo da je T lokalno kompaktan (ne nužno Hausdorffov) prostor, u smislu da svaka točka iz T ima bazu okolina koja se sastoji od kompaktnih skupova (kao što je to slučaj za $T = \mathrm{Prim}(A)$).

Fellova topologija τ_s na $\mathfrak{F}(T)$ je zadana pomoću baze, koju tvore svi skupovi oblika

$$\mathcal{U}(K, \mathcal{O}) := \{C \in \mathfrak{F}(T) :\ C \cap K = \emptyset,\ C \cap O \neq \emptyset \ \text{ za sve } O \in \mathcal{O}\},$$

gdje je K prolazi po svim kompaktnim podskupovima od T, a $\mathcal{O}$ po svim konačnim familijama otvorenih podskupova od T. Uz nju, $\mathfrak{F}(T)$ postaje kompaktan Hausdorffov prostor (vidjeti [32]). Ukoliko T ima prebrojivu bazu topologije, $(\mathfrak{F}(T), \tau_s)$ je metrizabilan (vidjeti [25]).

Michaelova odozdo polukonačna topologija τ_w na $\mathfrak{F}(T)$ zadaje se također pomoću baze, koju tvore svi skupovi oblika $\mathcal{U}(\emptyset, \mathcal{O})$, gdje $\mathcal{O}$ prolazi po svim konačnim familijama otvorenih podskupova od T. Očito je τ_w slabija od τ_s i s obzirom na nju $\mathfrak{F}(T)$ je T_0-prostor. Naime, za svako $C \in \mathfrak{F}(T)$ imamo

$$\overline{\{C\}}^{\tau_w} = \{C' \in \mathfrak{F}(T) :\ C' \subseteq C\},$$

pa različite točke iz $\mathfrak{F}(T)$ imaju različite τ_w-zatvarače. Nadalje, u nedavnom članku [44] Lazar je dokazao da je $\mathfrak{F}(T)$ τ_w-lokalno kompaktan prostor. Za ostale detalje i reference vezane uz te topologije čitatelja upućujemo na članak [44].

Primijenimo sada prethodno razmatranje na slučaj kada je A C*-algebra i $T := \mathrm{Prim}(A)$. Tada znamo da je preslikavanje $I \mapsto \mathrm{Prim}(A/I)$ bijekcija s $\mathrm{Id}(A)$ na $\mathfrak{F}(\mathrm{Prim}(A))$ (teorem 1.4.8), pa topologije τ_s i τ_w možemo prenijeti na $\mathrm{Id}(A)$ (koje također redom označavamo s τ_s i τ_w). Eksplicitno, τ_w je lokalno kompaktna T_0-topologija čiju bazu okolina tvore svi skupovi oblika

$$\mathcal{U}(F) := \{I \in \mathrm{Id}(A) :\ J \not\subseteq I \text{ za sve } J \in F\},$$

gdje F prolazi po svim konačnim podskupovima od $\mathrm{Id}(A)$. Naravno, relativna τ_w-topologija na $\mathrm{Prim}(A)$ se podudara s Jacobsonovom topologijom.

Topologija τ_s je kompaktna Hausdorffova i moguće ju je jednostavno opisati preko konvergentnih mreža. Naime, za mrežu (I_α) u $\mathrm{Id}(A)$ i $I \in \mathrm{Id}(A)$ vrijedi

$$I_\alpha \xrightarrow{\tau_s} I \quad \Leftrightarrow \quad \|a + I_\alpha\| \longrightarrow \|a + I\|, \quad \text{za sve } a \in A.$$

Dokaz te činjenice može se naći u [31]. Također napomenimo da se u ovom kontekstu topologije τ_s i τ_w redom zovu *jaka* i *slaba* topologija na $\mathrm{Id}(A)$.

Definicija 1.5.2 Neka je A C*-algebra i neka je $I \in \mathrm{Id}(A)$.

(i) Za I kažemo da je *primalan ideal* ako je $\mathrm{Prim}(A/I)$ graničan skup u $\mathrm{Prim}(A)$. Skup svih primalnih ideala u A označavamo s $\mathrm{Primal}(A)$.

(ii) Za I kažemo da je *minimalan primalan ideal* ako je $\mathrm{Prim}(A/I)$ maksimalan graničan skup u $\mathrm{Prim}(A)$. Skup svih minimalnih primalnih ideala u A označavamo s $\mathrm{MinPrimal}(A)$.

(iii) Za I kažemo da je *n-primalan ideal* ($n \geq 2$) ako je za sve $P_1, \ldots, P_n \in \mathrm{Prim}(A/I)$ skup $\{P_1, \ldots, P_n\}$ graničan u $\mathrm{Prim}(A)$. Skup svih n-primalnih ideala u A označavamo s $\mathrm{Primal}_n(A)$.

Također stavljamo $\mathrm{Primal}'_n(A) := \mathrm{Primal}(A) \setminus \{A\}$ i $\mathrm{Primal}'(A) = \mathrm{Primal}(A) \setminus \{A\}$.

Napomena 1.5.3 (i) Dogovorno uzimamo da su svi ideali u A 1-primalni.

(ii) Ideal $I \in \mathrm{Id}(A)$ je n-primalan ako i samo ako je za sve $P_1, \ldots, P_n \in \mathrm{Prim}(A/I)$ presjek $P_1 \cap \cdots \cap P_n$ primalan ideal.

Imamo sljedeću algebarsku karakterizaciju (n-)primalnosti:

Propozicija 1.5.4 Neka je A C*-algebra i $I \in \mathrm{Id}(A)$. Tada vrijedi

(i) Ideal I je n-primalan ako i samo ako za bilo koju n-torku ideala $J_1, \ldots, J_n \in \mathrm{Id}(A)$ iz $J_1 \cdots J_n = \{0\}$ slijedi $J_i \subseteq I$ za neko $1 \leq i \leq n$.

(ii) Ideal I je primalan ako i samo ako je I n-primalan za svako $n \geq 2$. Dakle

$$\mathrm{Primal}(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Primal}_n(A).$$

Dokaz. (i). Pretpostavimo da je I n-primalan i neka su $J_1, \ldots, J_n \in \mathrm{Id}(A)$ takvi da vrijedi $J_i \nsubseteq I$ ($1 \leq i \leq n$). Tada $\mathrm{Prim}(A/I) \nsubseteq \mathrm{Prim}(A/J_i)$, pa postoji $P_i \in \mathrm{Prim}(A/I)$ takav da je

$$P_i \in U_i := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : J_i \nsubseteq P\} \quad (1 \leq i \leq n) \tag{1.15}$$

Kako je I n-primalan, $L := \{P_1, \ldots, P_n\}$ je graničan podskup od $\mathrm{Prim}(A)$. Nadalje, skupovi U_i su otvoreni u $\mathrm{Prim}(A)$, a iz (1.15) slijedi da je $L \cap U_i \neq \emptyset$ ($1 \leq i \leq n$). Napomena 1.5.1 povlači da je $\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \neq \emptyset$. Neka je $P \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$. Tada je $J_i \nsubseteq P$ ($1 \leq i \leq n$), a kako je P prim ideal (propozicija 1.4.2), mora biti $J_1 \cdots J_n \neq \{0\}$.

Obratno, pretpostavimo da I nije n-primalan. Tada postoje $P_1, \ldots, P_n \in \mathrm{Prim}(A/I)$ takvi da $L := \{P_1, \ldots, P_n\}$ nije graničan podskup od $\mathrm{Prim}(A)$. Prema napomeni 1.5.1, postoje otvoreni podskupovi $U_1, \ldots, U_n$ od $\mathrm{Prim}(A)$ takvi da $U_i \cap L \neq \emptyset$ ($1 \leq i \leq n$) i $\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i = \emptyset$. Neka su $J_i \in \mathrm{Id}(A)$ takvi da je $U_i = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : J_i \nsubseteq P\}$ ($1 \leq i \leq n$). Tada je očito $J_1 \cdots J_n = 0$, ali $J_i \nsubseteq I$ za sve $1 \leq i \leq n$.

(ii). Tvrdnja slijedi direktno iz napomene 1.5.1 □

Propozicija 1.5.5 Neka je A C*-algebra, neka je $I \in \mathrm{Id}(A)$ i neka je (P_α) mreža u $\mathrm{Prim}(A)$. Tada $P_\alpha \xrightarrow{\tau_w} I$ ako i samo ako $P_\alpha \longrightarrow P$ za sve $P \in \mathrm{Prim}(A/I)$. Specijalno,

$$\overline{\mathrm{Prim}(A)}^{\tau_w} = \mathrm{Primal}(A).$$

Dokaz. Pretpostavimo da $P_\alpha \xrightarrow{\tau_w} I$. Tada i $P_\alpha \xrightarrow{\tau_w} J$ za sve $J \in \overline{\{I\}}^{\tau_w}$. No $\overline{\{I\}}^{\tau_w} = \{J \in \mathrm{Id}(A) :\ I \subseteq J\}$, pa $P_\alpha \to P$ za sve $P \in \mathrm{Prim}(A/I)$ (naravno, ako je $I = A$ tvrdnja je trivijalna).

Obratno, pretpostavimo da $P_\alpha \longrightarrow P$ za sve $P \in \mathrm{Prim}(A/I)$ i neka je $U(F)$ bazna okolina od I. Pretpostavimo da je $I \neq \emptyset$ (u protivnom imamo $P_\alpha \in U(F) = \mathrm{Id}(A)$ za sve α) i neka su $J_1, \ldots, J_n$ ideali u A takvi da je $F = \{J_1, \ldots, J_n\}$. Tada $J_i \nsubseteq I$, pa postoji $P_i \in \mathrm{Prim}(A/I)$ takav da $J_i \nsubseteq P_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Budući da $P_\alpha \longrightarrow P_i$ u $\mathrm{Prim}(A)$, postoji indeks α_0 takav da $J_i \nsubseteq P_\alpha$ za sve $\alpha \geq \alpha_0$ i $1 \leq i \leq n$. Tada je očito $P_\alpha \in U(F)$ za sve $\alpha \geq \alpha_0$.

Napokon, neka je $I \in \mathrm{Id}(A)$. Prema dokazanom, $I \in \overline{\mathrm{Prim}(A)}^{\tau_w}$ ako i samo ako je $\mathrm{Prim}(A/I)$ graničan skup u $\mathrm{Prim}(A)$, odnosno ako i samo ako je $I \in \mathrm{Primal}(A)$. □

Napomena 1.5.6 Budući da je $(\mathrm{Id}(A), \tau_s)$ kompaktan (Hausdorffov) prostor i budući da je τ_w-topologija slabija od τ_s-topologije, slijedi da je $\mathrm{Primal}(A)$ τ_s-zatvoren (pa onda i τ_s-kompaktan) podskup od $\mathrm{Id}(A)$.

Sljedeća propozicija je generalizacija od (i) i (iii) propozicije 1.4.16:

Propozicija 1.5.7 Neka je A C*-algebra i neka je $a \in A$.

(i) Za $\alpha > 0$ skup

$$K := \{I \in \mathrm{Id}(A) :\ \|a + I\| \geq \alpha\} = \{I \in \mathrm{Id}'(A) :\ \|a + I\| \geq \alpha\}$$

je τ_w-kompaktan.

(ii) Za $\alpha \geq 0$ postoji ideal $J \in \mathrm{Id}(A)$ takav da je

$$\{I \in \mathrm{Id}(A) :\ \|a + I\| > \alpha\} = \{I \in \mathrm{Id}(A) :\ J \nsubseteq I\}.$$

Specijalno, funkcije norme $I \mapsto \|a + I\|$ $(a \in A)$ su odozdo poluneprekidne na $(\mathrm{Id}(A), \tau_w)$.

Dokaz. (i) Neka je (U_α) otvoreni pokrivač od K. Kako je $K \cap \mathrm{Prim}(A)$ kompaktan podskup od $\mathrm{Prim}(A)$ (propozicija 1.4.16), postoje indeksi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takvi da je

$$K \cap \mathrm{Prim}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\alpha_i} \cap \mathrm{Prim}(A)).$$

Neka je $I \in K$. Tada je $\|a + I\| \geq \alpha$, pa prema teoremu 1.2.12 postoji $P \in \mathrm{Prim}(A/I)$ takav da je $\|a + P\| \geq \alpha$. Tada je $P \in U_{\alpha_k}$ za neko $1 \leq k \leq n$. Kako je $I \subseteq P$, imamo $I \in U_{\alpha_k}$, pa je $K = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

(ii) Stavimo $S := \{I \in \mathrm{Id}(A) :\ \|a + I\| \leq \alpha\}$ i neka je $J := \bigcap\{I :\ I \in S\}$. Iz propozicije 1.1.23 slijedi da je $J \in S$, pa je stoga

$$S = \{I \in \mathrm{Id}(A) :\ J \subseteq I\} = \overline{\{J\}}^{\tau_w}.$$

□

Iako je τ_w-topologija na $\mathrm{Id}(A)$ dosta slabija od Hausdorffove topologije τ_s, one se podudaraju ukoliko ih restringiramo na skup $\mathrm{MinPrimal}(A)$. Naime vrijedi:

Teorem 1.5.8 Ako je A C*-algebra i neka je $I \in \mathrm{Primal}(A)$. Identiteta

$$\mathrm{id} : (\mathrm{Primal}(A), \tau_w) \to (\mathrm{Primal}(A), \tau_s)$$

je neprekdina u I ako i samo ako je $I \in \mathrm{MinPrimal}(A)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $I \in \mathrm{MinPrimal}(A)$ i neka je (I_α) mreža u $\mathrm{Primal}(A)$ takva da $I_\alpha \xrightarrow{\tau_w} I$. Neka je (I_β) podmreža od (I_α). Prema napomeni 1.5.6, $\mathrm{Primal}(A)$ je τ_s-kompaktan, pa postoji ideal $J \in \mathrm{Primal}(A)$ i podmreža (I_γ) od (I_β) takva da $I_\gamma \xrightarrow{\tau_s} J$. Neka je $a \in J$. Budući da $I_\gamma \xrightarrow{\tau_w} I$, iz propozicije 1.5.7 slijedi

$$\|a + I\| \leq \liminf_\gamma \|a + I_\gamma\| = \lim_\gamma \|a + I_\gamma\| = \|a + J\| = 0.$$

Dakle $J \subseteq I$, pa je po minimalnosti od I nužno $J = I$. Slijedi $I_\gamma \xrightarrow{\tau_s} I$, pa je nužno i $I_\alpha \xrightarrow{\tau_s} I$.

Obratno, pretpostavimo da je $I \in \mathrm{Primal}(A) \setminus \mathrm{MinPrimal}(A)$ i neka je $J \in \mathrm{Primal}(A)$ takav da je $J \subsetneqq I$. Tada je $I \in \overline{\{J\}}^{\tau_w}$ i $I \notin \overline{\{J\}}^{\tau_s} = \{J\}$ (τ_s je Hausdorffova, specijalno T_1-topologija). Dakle, id ima prekid u I. □

Korolar 1.5.9 Neka je A C*-algebra.

(i) Relativne τ_w i τ_s topologije se podudaraju na $\mathrm{MinPrimal}(A)$.

(ii) $\mathrm{MinPrimal}(A) \subseteq \overline{\mathrm{Prim}(A)}^{\tau_s} \subseteq \mathrm{Primal}(A)$

Dokaz. (i). Tvrdnja slijedi direktno iz teorema 1.5.8 i činjenice da je τ_w slabija od τ_s.

(ii). Neka je $I \in \mathrm{MinPrimal}(A)$. Prema propoziciji 1.5.5, postoji mreža (P_α) u $\mathrm{Prim}(A)$ takva da $P_\alpha \xrightarrow{\tau_w} I$. Prema teoremu 1.5.9, $P_\alpha \xrightarrow{\tau_s} I$, odakle slijedi da je $I \in \overline{\mathrm{Prim}(A)}^{\tau_s}$. Druga inkluzija slijedi iz činjenice da je $\mathrm{Primal}(A)$ τ_s-zatvoren (napomena 1.5.6). □

Za ostale detalje i rezultate vezane uz primalne ideale čitatelja upućujemo na [7].

1.6 Potpuna regularizacija primitivnog spektra i Glimmovi ideali

Neka je A C*-algebra. Za $P, Q \in \mathrm{Prim}(A)$ stavljamo

$$P \approx Q \quad \text{ako i samo ako} \quad f(P) = f(Q) \quad \text{za sve } f \in C_b(\mathrm{Prim}(A)). \tag{1.16}$$

Tada je $\approx$ relacija ekvivalencije na $\mathrm{Prim}(A)$ i klase ekvivalencije $[P]_\approx$ ($P \in \mathrm{Prim}(A)$) su zatvoreni podskupovi od $\mathrm{Prim}(A)$. Zbog toga, postoji bijekcija između $\mathrm{Prim}(A)/\approx$ i skupa ideala u A koja je dana s

$$[P]_\approx \mapsto \phi_A(P) := \bigcap [P]_\approx .$$

Definicija 1.6.1 Neka je A C*-algebra. Za ideal $G \in \mathrm{Id}(A)$ kažemo da je *Glimmov* ako je on oblika $G = \phi_A(P)$ za neko $P \in \mathrm{Prim}(A)$. Skup svih Glimmovih ideala u A označavamo s $\mathrm{Glimm}(A)$, a za (kvocijentno) preslikavanje $\phi_A : \mathrm{Prim}(A) \to \mathrm{Glimm}(A)$, $\phi_A : P \mapsto \phi_A(P)$ kažemo da je *potpuna regularizacija*.

Napomena 1.6.2 Budući da su klase ekvivalencije $[P]_\approx$ zatvorene u $\mathrm{Prim}(A)$, slijedi da za $G \in \mathrm{Glimm}(A)$ i $P \in \mathrm{Prim}(A)$ imamo $\phi_A(P) = G$ ako i samo ako je $G \subseteq P$.

Notacija 1.6.3 Za $f \in C_b(\mathrm{Prim}(A))$ označimo s $f_\approx : \mathrm{Glimm}(A) \to \mathbb{C}$ (jedinstvenu) funkciju za koju dijagram

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Prim}(A) \arrow[dl, "\phi_A"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Glimm}(A) \arrow[r, "f_\approx"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

komutira.

Skup $\mathrm{Glimm}(A)$ možemo opskrbiti sa dvije prirodne topologije.

- *Kvocijentna topologija* τ_q je najjača topologija na $\mathrm{Glimm}(A)$ s obzirom na koju je potpuna regularizacija ϕ_A neprekidna. Uz nju je $\mathrm{Glimm}(A)$ Hausdorffov prostor.

- *Potpuno regularna topologija* τ_{cr} je najslabija topologija na $\mathrm{Glimm}(A)$ s obzirom na koju su sve funkcije $f_\approx$ ($f \in C_b(\mathrm{Prim}(A))$) neprekidne. Uz nju je $\mathrm{Glimm}(A)$ Tihonovljev prostor (potpuno regularan Hausdorffov prostor) i inducirano preslikavanje $f \mapsto f_\approx$ je izomorfizam s $C_b(\mathrm{Prim}(A))$ na $C_b(\mathrm{Glimm}(A))$. Po definiciji to znači da je $\mathrm{Glimm}(A)$ *potpuna regularizacija* od $\mathrm{Prim}(A)$ (vidjeti [34]).

Napomena 1.6.4 Primijetimo da je topologija τ_{cr} slabija od topologije τ_q. Općenito, može se desiti da je $\tau_{cr} \subsetneqq \tau_q$, no u mnogim slučajevima te topologije se podudaraju. Npr. ako je A unitalna, tada je prema korolaru 1.4.17 $\mathrm{Prim}(A)$ kompaktan prostor. Slijedi da je $\mathrm{Glimm}(A) = \phi_A(\mathrm{Prim}(A))$ τ_q-kompaktan. Budući da je slabija τ_{cr} topologija Hausdorffova, mora biti $\tau_{cr} = \tau_q$. Također primijetimo da je za svaku C*-algebru A

$$C_b(\mathrm{Glimm}(A), \tau_q) = C_b(\mathrm{Glimm}(A), \tau_{cr}) = \{f_\approx : \ f \in C_b(\mathrm{Prim}(A))\}.$$

Zbog toga ćemo ubuduće samo pisati $C_b(\mathrm{Glimm}(A))$. Specijalno, ako je $(\mathrm{Glimm}(A), \tau_q)$ lokalno kompaktan, τ_q se podudara sa slabom topologijom induciranom s $C_0(\mathrm{Glimm}(A), \tau_q)$, pa je i u tom slučaju $\tau_{cr} = \tau_q$. Odavde također slijedi da je $\tau_{cr} = \tau_q$ čim je ϕ_A τ_q-otvoreno ili τ_{cr}-otvoreno. Naime, tvrdnja je jasna ako je ϕ_A τ_{cr}-otvoreno. Ako je pak ϕ_A τ_q-otvoreno, onda lokalna kompaktnost od $\mathrm{Prim}(A)$ (korolar 1.4.17) prelazi na Hausdorffov prostor $(\mathrm{Glimm}(A), \tau_q)$. Zbog toga možemo jednoznačno govoriti o otvorenosti od ϕ_A.

Propozicija 1.6.5 Neka je A unitalna C^*-algebra. Ako su $P, Q \in \mathrm{Prim}(A)$, tada vrijedi

$$P \approx Q \quad \Leftrightarrow \quad P \cap Z(A) = Q \cap Z(A). \tag{1.17}$$

Nadalje, ako za $J \in \mathrm{Max}(Z(A))$ s $A[J]$ označimo ideal u A generiran s J ($A[J] = JA$, prema Hewitt-Cohenovom teoremu faktorizacije), tada je preslikavanje

$$\zeta_A : \mathrm{Glimm}(A) \to \mathrm{Max}(Z(A)), \quad \zeta_A : G \mapsto G \cap Z(A) \ \ (G \in \mathrm{Glimm}(A))$$

homeomorfizam s inverzom $\zeta_A^{-1} : J \mapsto A[J]$ ($J \in \mathrm{Max}(Z(A))$). Specijalno, imamo

$$\mathrm{Glimm}(A) = \{A[J] : \ J \in \mathrm{Max}(Z(A))\}. \tag{1.18}$$

Dokaz. Po definiciji Dauns-Hofmannovog izomorfizma Ψ_A (1.13) imamo

$$\begin{aligned} P \approx Q \ &\Leftrightarrow \ f(P) = f(Q) \ \text{ za sve } f \in C_b(\mathrm{Prim}(A)) \\ &\Leftrightarrow \ \Psi_A(z)(P) = \Psi_A(z)(Q) \ \text{ za sve } z \in Z(A) \\ &\Leftrightarrow \ \hat{z}(\chi_A(P)) = \hat{z}(\chi_A(Q)) \ \text{ za sve } z \in Z(A) \\ &\Leftrightarrow \ \chi_A(P) = \chi_A(Q) \\ &\Leftrightarrow \ P \cap Z(A) = Q \cap Z(A). \end{aligned}$$

Dokažimo i drugu tvrdnju. Najprije primijetimo da je za $G \in \mathrm{Glimm}(A)$, $\zeta_A(G)$ zaista maksimalan ideal u $Z(A)$. Naime, fiksirajmo $P \in \mathrm{Prim}(A)$. Tada je prema (1.17) $P \cap Z(A) = Q \cap Z(A)$ za sve $Q \in \mathrm{Prim}(A/G)$ (jer je $P \approx Q$), a kako je $G = \ker \mathrm{Prim}(A/G)$ imamo

$$\begin{aligned} G \cap Z(A) &= \bigcap \{Q : \ Q \in \mathrm{Prim}(A/G)\} \cap Z(A) \\ &= \bigcap \{Q \cap Z(A) : \ Q \in \mathrm{Prim}(A/G)\} \\ &= P \cap Z(A) \in \mathrm{Max}(Z(A)). \end{aligned}$$

Također, ako su G i H različiti Glimmovi ideali u A, tada za $P \in \mathrm{Prim}(A/G)$ i $Q \in \mathrm{Prim}(A/H)$ vrijedi $P \not\approx G$, pa iz (1.17) slijedi

$$\zeta_A(G) = G \cap Z(A) = P \cap Z(A) \neq Q \cap Z(A) = H \cap Z(A) = \zeta_A(H).$$

Odavde slijedi injektivnost od ζ_A. Također, iz (1.17) slijedi da je ideal $G \in \mathrm{Id}(A)$ Glimmov ako i samo ako vrijedi: $G \neq A$, G sadrži maksimalni ideal od $Z(A)$ i najmanji je sa takvim svojstvom. Specijalno, svaki Glimmov ideal G je generiran sa maksimalnim idealom J_G od $Z(A)$, dakle oblika $G = A[J_G]$ (gdje je, naravno, $J_G = G \cap Z(A)$).

Obratno, ako je $J \in \mathrm{Max}(Z(A))$, tada je $A[J] \in \mathrm{Glimm}(A)$. Zaista, prema prethodnoj napomeni, dovoljno je dokazati da je $A[J]$ pravi ideal u A. Prema napomeni 1.4.20 postoji $P \in \mathrm{Prim}(A)$ takav da je $J \subseteq P$. Tada je $J \subseteq A[J] \subseteq P$, pa je $A[J]$ pravi ideal u A. Odavde odmah slijedi surjektivnost od ζ_A i jednakost (1.18).

Ostaje nam dokazati da je ζ_A homeomorfizam. Očito je ζ_A neprekidno, jer je takvo preslikavanje χ_A. Da je i inverz ζ_A^{-1} neprekidan, slijedi iz činjenice da je ζ_A neprekidna bijekcija s kompaktnog prostora $\mathrm{Glimm}(A)$ na Hausdorffov prostor $\mathrm{Max}(Z(A))$. □

Ponekad će nam biti korisna i sljedeća dva rezultata:

Propozicija 1.6.6 Neka je A C*-algebra.

(i) Funkcije norme

$$\mathrm{Glimm}(A) \to \mathbb{R}_+, \quad G \mapsto \|a+G\| \quad (a \in A)$$

su odozgo poluneprekidne na $\mathrm{Glimm}(A)$ s obzirom na obje topologije τ_q i τ_{cr} na $\mathrm{Glimm}(A)$.

(ii) Funkcije norme

$$\mathrm{Glimm}(A) \to \mathbb{R}_+, \quad G \mapsto \|a+G\| \quad (a \in A)$$

su τ_q-neprekidne (odnosno τ_{cr}-neprekidne) ako i samo ako je ϕ_A τ_q-otvoreno (odnosno τ_{cr}-otvoreno) preslikavanje. Nadalje, u bilo kojem od tih slučajeva vrijedi $\tau_{cr} = \tau_q$.

Dokaz. (i) Neka je $a \in A$ i $\alpha > 0$. Trebamo pokazati da je skup

$$K := \{G \in \mathrm{Glimm}(A) : \ \|a+G\| \geq \alpha\}$$

τ_q-zatvoren i τ_{cr}-zatvoren. Kako je τ_{cr} slabija od τ_q, dovoljno je dokazati da je K τ_{cr}-zatvoren. Neka je $\phi_A : \mathrm{Prim}(A) \to \mathrm{Glimm}(A)$ potpuna regularizacija. Primijetimo da je $K = \phi_A(K')$, gdje je

$$K' := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : \ \|a+P\| \geq \alpha\}.$$

Zaista, prema teoremu 1.2.12 za svaki $G \in \mathrm{Glimm}(A)$ postoji $P \in \mathrm{Prim}(A/G)$ takav da vrijedi $\|a+G\| = \|a+P\|$. Nadalje, prema propoziciji 1.4.16 K' je kompaktan podskup od $\mathrm{Prim}(A)$. Budući da je ϕ_A neprekidna s obzirom na τ_{cr} topologiju na $\mathrm{Glimm}(A)$, slijedi da je $K = \phi_A(K')$ τ_{cr}-kompaktan podskup od $\mathrm{Glimm}(A)$. Napokon, kako je τ_{cr} Hausdorffova topologija, slijedi da je K' τ_{cr}-zatvoren. Time smo dokazali (i).

(ii) Pretpostavimo da je ϕ_A τ_q-otvoreno ili τ_{cr}-otvoreno. Iz napomene 1.6.4 slijedi $\tau_q = \tau_{cr}$. Tada je

$$U := \{G \in \mathrm{Glimm}(A) : \ \|a+G\| > \alpha\} = \phi_A(U'),$$

gdje je

$$U' = \{P \in \text{Prim}(A) : \ \|a + P\| > \alpha\}.$$

Prema propoziciji 1.4.16, U' je otvoren podskup od Prim(A), pa je $U = \phi_A(U')$ otvoren podskup od Glimm(A). Time smo pokazali da su funkcije norme odozdo poluneprekidne, što zajedno s (i) povlači njihovu neprekidnost.

Obratno, pretpostavimo da je za svako $a \in A$ funkcija $G \mapsto \|a + G\|$ τ_q-neprekidna odnosno τ_{cr}-neprekidna. Prema napomeni 1.6.4, $C_b(\text{Glimm}(A), \tau_q) = (C_b(\text{Glimm}(A), \tau_{cr})$, pa možemo jednoznačno govoriti o neprekidnosti tih funkcija. Neka je $U \subseteq \text{Prim}(A)$ otvoren i neka je $I \in \text{Id}(A)$ takav da je $U = \{P \in \text{Prim}(A) : I \nsubseteq P\}$. Primijetimo da je

$$U = \bigcup_{a \in I} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ P \in \text{Prim}(A) : \|a + P\| > \frac{1}{n} \right\},$$

pa je zbog neprekidnosti funkcija $G \mapsto \|a + G\|$ $(a \in A)$ na Glimm(A)

$$\phi_A(U) = \bigcup_{a \in I} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ G \in \text{Glimm}(A) : \|a + G\| > \frac{1}{n} \right\}$$

τ_{cr}-otvoren podskup od Glimm(A). Dakle, ϕ_A je τ_{cr}-otvoreno. Iz napomene 1.6.4 slijedi $\tau_q = \tau_{cr}$. □

Propozicija 1.6.7 Neka je A C*-algebra i neka je $R \in \text{Primal}'_2(A)$. Tada postoji jedinstven $G \in \text{Glimm}(A)$ takav da je $G \subseteq R$.

Dokaz. Neka je $P \in \text{Prim}(A/R)$. Po definiciji od R, za svaki $Q \in \text{Prim}(A/R)$ skup $\{P, Q\}$ je graničan u Prim(A), pa je $P \approx Q$. Zbog toga je

$$G := \bigcap [P]_{\approx} \subseteq \bigcap \{Q : \ Q \in \text{Prim}(A/R)\} = R.$$

Nadalje, ako je $H \in \text{Glimm}(A)$ takav da je $H \subseteq R$, tada je $H \subseteq P$, pa iz napomene 1.6.2 slijedi $G = \phi_A(P) = H$. □

1.7 Kvazicentralne i centralne C*-algebre

Delaroche je u [24] uveo sljedeću bitnu klasu C*-algebri:

Definicija 1.7.1 Za C*-algebru A kažemo da je *kvazicentralna* ako nikoji primitivni ideal od A ne sadži $Z(A)$ (ili ekvivalentno, ako nikoji Glimmov ideal od A ne sadrži $Z(A)$).

Primijetimo da je svaka unitalna C*-algebra kvazicentralna. Za razliku od općenitih neunitalnih C*-algebri, kvazicentralne C*-algebre imaju neka dobra svojstva koja su karakteristična unitalnim C*-algebrama.

Imamo sljedeću karakterizaciju kvazicentralnih C*-algebri.

Propozicija 1.7.2 Neka je A C*-algebra. Sljedeći tvrdnje su međusobno ekvivalentne:

(i) A je kvazicentralna;

(ii) A dopušta centralnu aproksimativnu jedinicu[4];

(iii) $A = Z(A)A$;

(iv) A je unitalna ili je A Glimmov ideal u $\tilde{A}$.

Dokaz. Ako je A unitalna, tada nemamo ništa za dokazati. Zato pretpostavimo da A nije unitalna.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je (z_α) aproksimativna jedinica za $Z(A)$. Ako je $\Psi_A : Z(M(A)) \to C_b(\mathrm{Prim}(A))$ Dauns-Hofmannov izomorfizam, primijetimo da tada mreža $(\Psi_A(z_\alpha))$ strogo raste prema $1 \in C_b(\mathrm{Prim}(A))$. Zaista, neka je $P \in \mathrm{Prim}(A)$ i izaberimo $z \in Z(A)$ takav da $z \notin P$. Tada je $\Psi_A(z)(P) \neq 0$ i imamo

$$\Psi_A(z)(P)\Psi_A(z_\alpha)(P) = \Psi_A(zz_\alpha)(P) \longrightarrow \Psi_A(z),$$

odakle slijedi da je $\lim_\alpha \Psi_A(z_\alpha)(P) = 1$ za sve $P \in \mathrm{Prim}(A)$. Prema Dinijevom teoremu, $(\Psi_A(z_\alpha))$ konvergira uniformno prema 1 na kompaktnim podskupovima od $\mathrm{Prim}(A)$. Neka je $a \in A$ i $\varepsilon > 0$. Tada je prema propoziciji 1.4.16

$$K := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : \ \|a + P\| \geq \varepsilon\}$$

kompaktan podskup od $\mathrm{Prim}(A)$. Dokažimo da je $\lim_\alpha \|az_\alpha - a\| = 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $a \neq 0$ i neka je α_0 indeks takav da je $1 - \Psi_A(z_\alpha)(P) < \varepsilon/\|a\|$ za sve $P \in K$ i $\alpha \geq \alpha_0$. Tada za $\alpha \geq \alpha_0$ imamo

$$\begin{aligned}
\|a - az_\alpha\| &= \sup\{\|(a - az_\alpha) + P\| : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\} \\
&= \sup\{(1 - \Psi_A(z_\alpha)(P))\|a + P\| : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\} \\
&\leq \sup\{(1 - \Psi_A(z_\alpha)(P))\|a + P\| : \ P \in K\} \\
&+ \sup\{(1 - \Psi_A(z_\alpha)(P))\|a + P\| : \ P \in \mathrm{Prim}(A) \setminus K\} \\
&< 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

jer je $(1 - \Psi_A(z_\alpha)(P))\|a + P\| < \varepsilon$ za sve $P \in \mathrm{Prim}(A) \setminus K$. Dakle, (z_α) je aproksimativna jedinica za A.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Ova implikacija slijedi direktno iz Hewitt-Cohenovog teorema faktorizacije (teorem 1.1.15), jer je u tom slučaju A nedegeneriran Banachov $Z(A)$-modul.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Budući da A nije unitalna, iz $Z(A)A = A$ slijedi da $Z(A) \neq \{0\}$, pa je $Z(A)$ maksimalan ideal u $Z(\tilde{A})$ i $Z(A)\tilde{A} = A$. Iz (1.18) slijedi da je $A \in \mathrm{Glimm}(\tilde{A})$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Pretpostavimo da A nije kvazicentralna. Ako je $Z(A) = \{0\}$, tada je $Z(\tilde{A}) = \mathbb{C}1$, pa je $\mathrm{Glimm}(\tilde{A}) = \{0\}$. Specijalno A nije Glimmov ideal u $\tilde{A}$. Ako

[4] Za aproksimativnu jedinicu (e_α) za A kažemo da je centralna ako vrijedi $e_\alpha \in Z(A)$ za sve α.

$Z(A)$ nije trivijalan, tada je $Z(A)$ maksimalan ideal u $Z(\tilde{A})$. Budući da A nije kvazicentralna, postoji $P \in \mathrm{Prim}(A)$ takav da je $Z(A) \subseteq P$. Tada je $P \in \mathrm{Prim}(\tilde{A})$, a kako je A maksimalan (primitivan) ideal u $\tilde{A}$ i $Z(A) \subseteq A$ (trivijalno), iz (1.17) slijedi da je $P \approx A$ u $\tilde{A}$. Dakle,

$$\bigcap [A]_{\approx} \subseteq P \subsetneqq A,$$

pa $A \notin \mathrm{Glimm}(A)$. $\square$

Propozicija 1.7.3 Neka je A kvazicentralna C*-algebra i neka je $\Psi_A : Z(M(A)) \to C_b(\mathrm{Prim}(A))$ Dauns-Hofmannov izomorfizam. Tada je

$$\Psi_A(Z(A)) = C_0(\mathrm{Prim}(A)).$$

Specijalno, $\mathrm{Prim}(A)$ je kompaktan ako i samo ako je A unitalna.

Dokaz. Neka je $z \in Z(A)$ i $\varepsilon > 0$. Budući da je $|\Psi_A(z)(P)| = \|z + P\|$ za sve $P \in \mathrm{Prim}(A)$ (napomena 1.4.20), prema propoziciji 1.4.16

$$\{P \in \mathrm{Prim}(A) : \ |\Psi_A(z)(P)| \geq \varepsilon\} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : \ \|z + P\| \geq \varepsilon\}$$

je kompaktan podskup od $\mathrm{Prim}(A)$. Dakle, $\Psi_A(Z(A)) \subseteq C_0(\mathrm{Prim}(A))$. Neka je $z \in Z(M(A))$ takav da je $\Psi_A(z) \in C_0(\mathrm{Prim}(A))$ i neka je (z_α) centralna aproksimativna jedinica za A (propozicija 1.7.2). Tada je $(\Psi_A(z_\alpha))$ aproksimativna jedinica za $C_0(\mathrm{Prim}(A))$, pa je

$$\lim_\alpha \|z - zz_\alpha\| = \lim_\alpha \|\Psi_A(z) - \Psi_A(z)\Psi_A(z_\alpha)\| = 0.$$

Budući da je $zz_\alpha \in Z(A)$ za sve α, slijedi da je $z \in Z(A)$. Dakle, $\Psi_A(Z(A)) = C_0(\mathrm{Prim}(A))$.

Nadalje, ako je A unitalna tada je $\mathrm{Prim}(A)$ kompaktan (korolar 1.4.17). Obratno, ako je $\mathrm{Prim}(A)$ kompaktan, tada je prema dokazanom $Z(A)$ unitalna. Budući da je A kvazicentralna, jedinica od $Z(A)$ mora biti i jedinica za A (propozicija 1.7.2). $\square$

Napomena 1.7.4 Neka je A kvazicentralna C*-algebra. Tada za svaki $P \in \mathrm{Prim}(A)$ postoji pozitivni centralni element $z_P \in Z(A)_+$ takav da je $\|z_P\| = 1$ i $\Psi_A(z_P)(P) = 1$. Specijalno, svaki primitivni ideal P od A je modularan, pri čemu je element $z_P + P$ jedinica za A/P. Štoviše, koristeći Geljfandovu transformaciju od $Z(A)$, lako se vidi da za svaki kompaktni podskup $K \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ postoji $z \in Z(A)_+$ takav da je $\|z\| = 1$ i $\Psi_A(z)(P) = 1$ za sve $P \in K$.

Napomena 1.7.5 Neka je A kvazicentralna C*-algebra i χ_A preslikavanje iz (1.11). Iz napomene 1.4.20 slijedi $\chi_A(P) = P \cap Z(A) \in \mathrm{Max}(Z(A))$ za sve $P \in \mathrm{Prim}(A)$, te χ_A surjektivno slika $\mathrm{Prim}(A)$ na $\mathrm{Max}(Z(A))$.

Lema 1.7.6 Neka je A kvazicentralna C*-algebra i neka su $P, Q \in \mathrm{Prim}(A)$. Sljedeći uvjeti su ekvivalentni:

(i) $P \approx Q$;

(ii) $f(P) = f(Q)$ za sve $f \in C_0(\mathrm{Prim}(A))$;

(iii) $P \cap Z(A) = Q \cap Z(A)$.

Dokaz. Implikacija (i) $\Rightarrow$ (ii) je trivijalna.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Prema propoziciji 1.7.3, definiciji (1.13) od Ψ_A i napomeni 1.7.5 , za $P, Q \in \mathrm{Prim}(A)$ imamo

$$\begin{aligned} f(P) = f(Q) \text{ za sve } f \in C_0(\mathrm{Prim}(A)) &\Leftrightarrow \Psi_A(z)(P) = \Psi_A(z)(Q) \text{ za sve } z \in Z(A) \\ &\Leftrightarrow \hat{z}(\chi_A(P)) = \hat{z}(\chi_A(Q)) \text{ za sve } z \in Z(A) \\ &\Leftrightarrow \chi_A(P) = \chi_A(Q) \\ &\Leftrightarrow P \cap Z(A) = Q \cap Z(A). \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Neka je $g \in C_b(\mathrm{Prim}(A))$ u stavimo $f := \Psi_A(z_P)$, gdje je $z_P \in Z(A)_+$ kao u napomeni 1.7.4. Tada je $f \in C_0(\mathrm{Prim}(A))$ i $f(P) = 1$. Prema pretpostavci, imamo $f(Q) = 1$ i $(fg)(P) = (fg)(Q)$ (jer je $fg \in C_0(\mathrm{Prim}(A))$). Dakle,

$$g(P) = f(P)g(P) = (fg)(P) = (fg)(Q) = f(Q)g(Q) = g(Q).$$

Kako je $g \in C_b(\mathrm{Prim}(A))$ bila proizvoljna, slijedi $P \approx Q$. $\square$

Ako je A unitalna C*-algebra, tada smo vidjeli da je preslikavanje $\zeta_A : G \mapsto G \cap Z(A)$ homeomorfizam s $\mathrm{Glimm}(A)$ na $\mathrm{Max}(Z(A))$ (propozicija 1.6.5). Sljedeća propozicija poopćuje taj rezultat i za kvazicentralne C*-algebre.

Propozicija 1.7.7 Neka je A kvazicentralna C*-algebra. Tada se topologije τ_q i τ_{cr} podudaraju i s obzirom na tu topologiju $\mathrm{Glimm}(A)$ je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Nadalje, preslikavanje

$$\zeta_A : \mathrm{Glimm}(A) \to \mathrm{Max}(Z(A)), \quad \zeta_A : G \mapsto G \cap Z(A)$$

je homeomorfizam s inverzom $\zeta_A^{-1}(J) = A[J]$ (gdje je, kao i prije, za $J \in \mathrm{Max}(Z(A))$ s $A[J]$ označen ideal u A generiran s J). Specijalno, kao i u unitalnom slučaju, imamo

$$\mathrm{Glimm}(A) = \{A[J] : \ J \in \mathrm{Max}(Z(A))\}. \tag{1.19}$$

Dokaz. Najprije fiksirajmo $G \in \mathrm{Glimm}(A)$. Budući da je A kvazicentralna, postoji $z \in Z(A)_+$ takav da je $\|z + G\| > 0$. Prema napomeni 1.4.20, funkcija norme $P \mapsto \|z + P\| = \Psi_A(z)(P)$ je neprekidna (i naravno ograničena) na $\mathrm{Prim}(A)$ i njen spust $\Psi_A(z)_\approx$ na $\mathrm{Glimm}(A)$ se podudara s funkcijom $H \mapsto \|z+H\|$ ($H \in \mathrm{Glimm}(A)$). Zaista, za $H \in \mathrm{Glimm}(A)$ neka je $P \in \mathrm{Prim}(A/H)$. Tada za svaki $Q \in \mathrm{Prim}(A/H)$ vrijedi $Q \approx P$, odakle slijedi da je $\|z + Q\| = \|z + P\|$. Stoga je

$$\|z + H\| = \sup\{\|z + Q\| : \ Q \in \mathrm{Prim}(A/H)\} = \|z + P\| = \Psi_A(z)_\approx(H).$$

Stavimo

$$\mathcal{U} := \left\{ H \in \text{Glimm}(A) : \; \|z + H\| \geq \frac{1}{2}\|z + G\| \right\}.$$

Primijetimo da je $\mathcal{U}$ τ_q-kompaktna okolina od G u $\text{Glimm}(A)$. Zaista, kako je $[H \mapsto \|z + H\|] \in C_b(\text{Glimm}(A))$, slijedi da je

$$\mathcal{O} := \left\{ H \in \text{Glimm}(A) : \; \|z + H\| > \frac{1}{2}\|z + G\| \right\}$$

τ_q-otvoren podskup od $\text{Glimm}(A)$ i $G \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$. Drugim riječima, $\mathcal{U}$ je τ_q-okolina od G. Nadalje, stavimo

$$\mathcal{U}' := \left\{ P \in \text{Prim}(A) : \; \|z + P\| \geq \frac{1}{2}\|z + G\| \right\}.$$

Prema propoziciji 1.4.16 $\mathcal{U}'$ je kompaktan podskup od $\text{Prim}(A)$. Koristeći sličan argument kao u dokazu propozicije 1.6.6 (i) slijedi $\mathcal{U} = \phi_A(\mathcal{U}')$. Budući da je ϕ_A τ_q-neprekidno, $\mathcal{U}$ je τ_q-kompaktna okolina od G. Dakle, $(\text{Glimm}(A), \tau_q)$ je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Iz napomene 1.6.4 slijedi da je $\tau_{cr} = \tau_q$.

Sada dokažimo da je ζ_A homeomorfizam. Injektivnost od ζ_A slijedi iz leme 1.7.6, dok isti arument kao i u unitalnom slučaju (dokaz propozicije 1.6.5) daje surjektivnost od ζ_A i jednakost (1.19). Kako se topologija lokalno kompaktnog Hausdorffovog prostora $\text{Glimm}(A)$ podudara sa slabom topologijom induciranom s $C_0(\text{Glimm}(A))_+$, te kako je $C_0(\text{Glimm}(A))_+ = \{\Psi_A(z)_\approx : \; z \in Z(A)_+\}$ (propozicija 1.7.3), za mrežu (G_α) u $\text{Glimm}(A)$ i $G \in \text{Glimm}(A)$ imamo

$$\begin{aligned}
G_\alpha \longrightarrow G \quad &\Longleftrightarrow \quad \Psi_A(z)_\approx(G_\alpha) \longrightarrow \Psi_A(z)_\approx(G) \;\; \text{za sve } z \in Z(A)_+ \\
&\Longleftrightarrow \quad \|z + G_\alpha\| \longrightarrow \|z + G\|, \text{ for all } z \in Z(A)_+ \\
&\Longleftrightarrow \quad \|z + G_\alpha \cap Z(A)\| \longrightarrow \|z + G \cap Z(A)\| \;\; \text{za sve } z \in Z(A)_+ \\
&\Longleftrightarrow \quad G_\alpha \cap Z(A) \longrightarrow G \cap Z(A),
\end{aligned}$$

gdje treća ekvivalencija slijedi iz propozicije 1.1.22. Dakle, ζ_A je homeomorfizam. □

Napomena 1.7.8 Neka je A neunitalna kvazicentralna C*-algebra. Prema propoziciji 1.7.3 $\text{Prim}(A)$ i $\text{Glimm}(A)$ su nekompaktni prostori. Za $J \in \text{Id}(A)$ s $J_\sim$ označimo jedinstven ideal u $\tilde{A}$ takav da je $A \cap J_\sim = J$. Tada je

$$\text{Glimm}(\tilde{A}) = \{G_\sim : \; G \in \text{Glimm}(A)\} \cup \{A\}$$

i preslikavanje $G \mapsto G_\sim$ je homeomorfizam s $\text{Glimm}(A)$ na svoju sliku $\text{Glimm}(\tilde{A}) \setminus \{A\}$ u $\text{Glimm}(\tilde{A})$. Kako je $\tilde{A}$ unitalna, $\text{Glimm}(\tilde{A})$ je kompaktan Hausdorffov prostor, pa je $\text{Glimm}(\tilde{A})$ Aleksandrovljeva kompaktifikcja od $\text{Glimm}(A)$. Sve zajedno, sljedeći dijagram

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Prim}(A) & \xrightarrow{\phi_A} & \mathrm{Glimm}(A) & \xrightarrow{\zeta_A} & \mathrm{Max}(Z(A)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Prim}(\tilde{A}) & \xrightarrow{\phi_{\tilde{A}}} & \mathrm{Glimm}(\tilde{A}) & \xrightarrow{\zeta_{\tilde{A}}} & \mathrm{Max}(Z(\tilde{A})),
\end{array}$$

je komutativan, gdje vertikalne strelice označavaju kanonska ulaganja.

U klasi kvazicentralnih C*-algebri posebno su istaknute tzv. centralne C*-algebre, koje je uveo Kaplansky u [42].

Definicija 1.7.9 Za C*-algebru A kažemo da je *centralna* ako je ona kvazicentralna i ako je preslikavanje χ_A injektivno (tj. ako za sve $P, Q \in \mathrm{Prim}(A)$ iz $P \cap Z(A) = Q \cap Z(A)$ slijedi $P = Q$).

Napomena 1.7.10 Primijetimo da je kvazicentralna C*-algebra A centralna ako i samo ako je $\mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov. Zaista, ta činjenica slijedi direktno iz leme 1.7.6, budući da je lokalno kompaktan prostor $\mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov ako i samo ako familija $C_0(\mathrm{Prim}(A))$ separira točke od $\mathrm{Prim}(A)$. U tom slučaju je $\mathrm{Glimm}(A) = \mathrm{Prim}(A)$, pa je prema propoziciji 1.7.7 $\chi_A = \zeta_A$ homeomorfizam s $\mathrm{Prim}(A)$ na $\mathrm{Max}(Z(A))$.

Propozicija 1.7.11 Neka je A C*-algebra. Tada je A centralna ako i samo ako je $\tilde{A}$ centralna.

Dokaz. Ako je A unitalna, tada nemamo ništa za dokazati. Zato pretpostavimo da A nije unitalna.

Pretpostavimo da je A centralna i neka su $P, Q \in \mathrm{Prim}(\tilde{A})$ različiti primitivni ideali u $\tilde{A}$. Tada su $P \cap A$ i $Q \cap A$ različiti elementi od $\mathrm{Prim}(A) \cup \{A\}$. Kako je A centralna, slijedi da $P \cap A$ i $Q \cap A$ daju različit presjek s $Z(A) \subseteq Z(\tilde{A})$. Dakle, $\tilde{A}$ je centralna.

Obratno, pretpostavimo da je A centralna. Prema napomeni 1.7.10 $\mathrm{Prim}(\tilde{A})$ je Hausdorffov. Zato je $\mathrm{Glimm}(\tilde{A}) = \mathrm{Prim}(\tilde{A})$, pa je $A \in \mathrm{Glimm}(\tilde{A})$. Prema propoziciji 1.7.2 A je kvazicentralna. Nadalje, kako je $\mathrm{Prim}(A)$ homeomorfan s (otvorenim) podskupom $\mathrm{Prim}(\tilde{A}) \setminus \{A\}$ od $\mathrm{Prim}(\tilde{A})$, $\mathrm{Prim}(A)$ je također Hausdorffov. Prema napomeni 1.7.10 A je centralna. □

1.8 O homomorfnoj slici centra C*-algebre

Neka su A i B C*-algebre i neka je $\phi : A \to B$ $*$-epimorfizam. Tada svakako imamo inkluziju centara

$$\phi(Z(A)) \subseteq Z(B). \tag{1.20}$$

U ovoj točki dajemo pregled rezultata iz članka [70], u kojem je autor dao karakterizaciju (unitalnih) C*-algebri A za koje vrijedi jednakost u (1.20) za svaki $*$-epimorfizam $\phi : A \to B$.

Najprije uvedimo sljedeću notaciju. Ako je ϕ kao gore, tada ćemo s $\check{\phi}$ označavati inducirano preslikavanje s $\mathrm{Prim}(B) \to \mathrm{Prim}(A)$, koje je dano s

$$\check{\phi}(\dot{P}) = \phi^{-1}(\dot{P}) \quad (\dot{P} \in \mathrm{Prim}(B)).$$

Iz propozicije 1.4.12 slijedi da preslikavanje $\check{\phi}$ ulaže $\mathrm{Prim}(B)$ kao zatvoren podskup od $\mathrm{Prim}(A)$. Nadalje, s ϕ_Z ćemo kraće označavati resktrikciju $\phi|_{Z(A)} : Z(A) \to Z(B)$. Ukoliko je A kvazicentralna, tada primijetimo da je za svaki karakter $\omega \in Z(B)^\wedge$ s $\omega_\phi := \omega \circ \phi_Z$ definiran karakter na $Z(A)$. Zaista, kako je A kvazicentralna, ona dopušta centralnu aproksimativnu jedinicu (z_α) (propozicija 1.7.2). Budući da je ϕ surjektivan, on slika aproksimativne jedinice za A u aproksimativne jedinice za B. Odavde slijedi da je $(\phi(z_\alpha))$ centralna aproksimativna jedinica za B (pa je nužno i B kvazicentralna). Kako je $\omega \neq 0$, mora biti i $\omega_\phi \neq 0$. Također, preslikavanje $\omega \mapsto \omega_\phi$ s $Z(B)^\wedge$ u $Z(A)^\wedge$ je neprekidno u paru slabih $*$-topologija koje je injektivno ako i samo ako je ϕ_Z surjektivno. Kako je

$$\phi_Z^{-1}(\ker \omega) = (\omega \circ \phi_Z)^{-1}(0) = \ker \omega_\phi$$

maksimalan ideal u $Z(A)$, slijedi da je s

$$\check{\phi}_Z : \mathrm{Max}(Z(B)) \to \mathrm{Max}(Z(A)), \quad \check{\phi}_Z(\dot{J}) = \phi_Z^{-1}(\dot{J}) \quad (\dot{J} \in \mathrm{Max}(Z(B)))$$

dobro definirano neprekidno preslikavanje, koje je injektivno ako i samo ako je ϕ_Z surjektivno.

Propozicija 1.8.1 Neka je $\phi : A \to B$ $*$-epimorfizam između C*-algebri A i B. Ako je A kvazicentralna, tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:

(i) $\phi(Z(A)) = Z(B)$;

(ii) $\check{\phi}_Z$ je injektivno;

(iii) Ako su $\dot{P}, \dot{Q} \in \mathrm{Prim}(B)$ takvi da je $\dot{P} \not\approx \dot{Q}$ u $\mathrm{Prim}(B)$ tada je i $\check{\phi}(\dot{P}) \not\approx \check{\phi}(\dot{Q})$ u $\mathrm{Prim}(A)$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati ekvivalenciju (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Primijetimo da sljedeći dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Prim}(B) & \xrightarrow{\check{\phi}} & \mathrm{Prim}(A) \\ {\scriptstyle \chi_B}\big\downarrow & & {\scriptstyle \chi_A}\big\downarrow \\ \mathrm{Max}(Z(B)) & \xrightarrow{\check{\phi}_Z} & \mathrm{Max}(Z(A)) \end{array} \tag{1.21}$$

komutira. Zaista, za proizvoljni $\dot{P} \in \mathrm{Prim}(B)$ imamo

$$\begin{aligned} (\chi_A \circ \check{\phi})(\dot{P}) &= \chi_A(\phi^{-1}(\dot{P})) = \phi^{-1}(\dot{P}) \cap Z(A) = \phi^{-1}(\dot{P}) \cap \phi^{-1}(Z(B)) \cap Z(A) \\ &= \phi^{-1}(\dot{P} \cap Z(B)) \cap Z(A) = \check{\phi}_Z(\dot{P} \cap Z(B)) \\ &= (\check{\phi}_Z \circ \chi_B)(\dot{P}). \end{aligned}$$

Stoga, koristeći lemu 1.7.6, za $\dot{P}, \dot{Q} \in \text{Prim}(B)$ imamo

$$\begin{aligned}\check{\phi}(\dot{P}) \approx \check{\phi}(\dot{Q}) \quad &\Leftrightarrow \quad \check{\phi}(\dot{P}) \cap Z(A) = \check{\phi}(\dot{Q}) \cap Z(A) \\ &\Leftrightarrow \quad \chi_A(\check{\phi}(\dot{P})) = \chi_A(\check{\phi}(\dot{Q})) \\ &\Leftrightarrow \quad \check{\phi}_Z(\chi_B(\dot{P})) = \check{\phi}_Z(\chi_B(\dot{Q}))\end{aligned}$$

Dakle, $\check{\phi}_Z$ je injektivno ako i samo za sve $\dot{P}, \dot{Q} \in \text{Prim}(B)$ iz $\check{\phi}(\dot{P}) \approx \check{\phi}(\dot{Q})$ (u $\text{Prim}(B)$) slijedi $\chi_B(\dot{P}) = \chi_B(\dot{Q})$, što je ekvivalentno s $\dot{P} \approx \dot{Q}$ (u $\text{Prim}(A)$). □

Korolar 1.8.2 Neka je A centralna C*-algebra. Ako je B C*-algebra i $\phi : A \to B$ $*$-epimorfizam, tada je i B centralna, te vrijedi

$$\phi(Z(A)) = Z(B). \tag{1.22}$$

Dokaz. Zaista, iz komutativnosti dijagrama (1.21) slijedi $\chi_A \circ \check{\phi} = \check{\phi}_Z \circ \chi_B$. Prema pretpostavci χ_A je injektivno (štoviše homoeomorfizam, prema napomeni 1.7.10), pa je $\check{\phi}_Z \circ \chi_B$ također injektivno. Odavde odmah slijedi i da je χ_B injektivno (tj. B je centralna), dakle homeomorfizam, pa je nužno i $\check{\phi}_Z$ injektivno. Iz propozicije 1.8.1 slijedi jednakost (1.22). □

Sada ćemo pokazati da jednakost centara (1.22) vrijedi i za širu klasu tzv. slabo centralnih C*-algebri. Prije nego li damo definiciju, prisjetimo se da je svaki primitivni ideal kvazicentralne C*-algebre A modularan (napomena 1.7.4), pa je stoga sadržan u nekom maksimalnom modularnom idealu od A. Specijalno, $\text{Max}(A)$ je neprazan T_1-prostor.

Definirajmo preslikavanje

$$\eta_A : \text{Max}(A) \to \text{Max}(Z(A)), \quad \eta_A(M) := M \cap Z(A) \quad (M \in \text{Max}(A)).$$

Iz propozicije 1.7.7 slijedi da je η_A surjektivno (očito neprekdino) preslikavanje.

Misonou je u [51] uveo sljedeću klasu C*-algebri, koja proširuje klasu centralnih C*-algebri:

Definicija 1.8.3 Za C*-algebru A kažemo da je *slabo centralna* ukoliko je A kvazicentralna i ako je preslikavanje η_A injektivno.

Napomena 1.8.4 Ako je C*-algebra A slabo centralna, tada iz istog argumenta kao u dokazu propozicije 1.7.7 slijedi da je η_A zapravo homeomorfizam.

Napomena 1.8.5 Očito je svaka centralna C*-algebra slabo centralna, dok je C*-algebra $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ (za separabilan beskonačno dimenzionalnan Hilbertov prostor $\mathcal{H}$) primjer slabo centralne C*-algebre koja nije centralna. Naime, $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ sadrži jedinstven maksimalni ideal; ideal $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ svih kompaktnih operatora na $\mathcal{H}$. Naravno, svaka unitalna C*-algebra A koja sadrži jedinstven maksimalni ideal je nužno slabo centralna. Nadalje, koristeći tzv. Dixmierovo aproksimacijsko svojstvo (vidjeti [41]), može se dokazati da je svaka von Neumannova algebra slabo centralna (vidjeti [51]).

Koristeći Glimmove ideale, imamo sljedeću jednostavnu karakterizaciju slabo centralnih C*-algebri:

Propozicija 1.8.6 Neka je A kvazicentralna C*-algebra. Tada je A slabo centralna ako i samo je svaki Glimmov ideal u A sadržan u jedinstvenom maksimalnom idealu od A.

Dokaz. Pretpostavimo da je A slabo centralna. Za $G \in \mathrm{Glimm}(A)$ neka su $M, N \in \mathrm{Max}(A)$ takvi da je $G \subseteq M, N$. Tada je $M \approx N$, pa iz leme 1.7.6 slijedi da je $\eta_A(M) = M \cap Z(A) = N \cap Z(A) = \eta_A(N)$. Injektivnost od η_A povlači $M = N$.

Obratno, ako A nije slabo centralna, tada postoje $M, N \in \mathrm{Max}(A)$ takvi da je $M \neq N$ i $M \cap Z(A) = N \cap Z(A)$. Prema lemi 1.7.6 $M \approx N$, pa je $G := \phi_A(M) = \phi_A(N) \in \mathrm{Glimm}(A)$ sadržan u $M \cap N$. □

Sada napokon iskazujemo (i dokazujemo) glavni rezultat ove točke.

Teorem 1.8.7 (Vesterstøm) Pretpostavimo da je A kvazicentralna C*-algebra. Tada je A slabo centralna ako i samo ako vrijedi

$$\phi(Z(A)) = Z(B),$$

za svaku C*-algebru B i $*$-epimorfizam $\phi : A \to B$.

Dokaz. Pretpostavimo da je A slabo centralna i promotrimo sljedeći dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Max}(B) & \xrightarrow{\check{\phi}|_{\mathrm{Max}(B)}} & \mathrm{Max}(A) \\ {\scriptstyle \iota_B}\downarrow & & {\scriptstyle \iota_A}\downarrow \\ \mathrm{Prim}(B) & \xrightarrow{\check{\phi}} & \mathrm{Prim}(A) \\ {\scriptstyle \chi_B}\downarrow & & {\scriptstyle \chi_A}\downarrow \\ \mathrm{Max}(Z(B)) & \xrightarrow{\check{\phi}_Z} & \mathrm{Max}(Z(A)), \end{array} \tag{1.23}$$

gdje su ι_A i ι_B inkluzije. Tada je očito (1.23) komutativan. Prema pretpostavci, preslikavanje $\eta_A = \chi_A \circ \iota_A$ je injektivno, pa je takvo i $\chi_A \circ \iota_A \circ \check{\phi}|_{\mathrm{Max}(B)}$. Iz komutativnosti od (1.23) slijedi i da je $\check{\phi}_Z \circ \eta_B = \check{\phi}_Z \circ \chi_B \circ \iota_B$ injektivno. Odavde odmah slijedi injektivnost od η_B (drugim riječima, B je slabo centralna), pa je η_B homeomorfizam (napmena 1.8.4). Slijedi da je $\check{\phi}_Z$ injektivno, pa je prema propoziciji 1.8.1 $\phi(Z(A)) = Z(B)$.

Obratno, pretpostavimo da za svaku C^*-algebru B i svaki $*$-epimorfizam $\phi : A \to B$ vrijedi $\phi(Z(A)) = Z(B)$. Neka su $M, N \in \mathrm{Max}(A)$ različiti maksimalni ideali u A. Stavimo $B := A/(M \cap N)$ i neka je $\phi := q_{M\cap N} : A \to B$ kvocijentni $*$-epimorfizam. Budući da su jedini primitivni ideali u A koji sadrže $M \cap N$ točno M i N (budući da su primitivni ideali prim, za $P \in \mathrm{Prim}(A)$ iz $MN = M \cap N \subseteq P$ slijedi $M \subseteq P$ ili

$N \subseteq P$, odnosno (zbog maksimalnosti od M i N) $P = M$ ili $P = N$), slijedi da je

$$\mathrm{Prim}(B) = \mathrm{Max}(B) = \{M/(M \cap N), N/(M \cap N)\}.$$

Kako je $\mathrm{Max}(B)$ T_1-prostor, $\mathrm{Prim}(B)$ je diskretan, odakle slijedi da $M/(M \cap N) \not\approx N/(M \cap N)$ u $\mathrm{Prim}(B)$. Prema propoziciji 1.8.1

$$M = \check{\phi}(M/(M \cap N)) \not\approx \check{\phi}(N/(M \cap N)) = N$$

u $\mathrm{Prim}(A)$, odnosno, $M \cap Z(A) \neq N \cap Z(A)$. Kako su M i N bili proizvoljni, slijedi da je η_A injektivno, tj. A je slabo centralna. □

Primjer 1.8.8 Neka je $B := C([0,1], \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$ C*-algebra svih neprekidnih funkcija $f : [0,1] \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ i neka je $A \subseteq B$ njena C^*-podalgebra koja se sastoji od svih $f \in B$ za koje je $f(1)$ dijagonalna matrica, dakle oblika

$$f(1) = \begin{bmatrix} \lambda(f) & 0 \\ 0 & \mu(f) \end{bmatrix} \quad \text{(za neke } \lambda(f), \mu(f) \in \mathbb{C}).$$

Stavimo $J = C_0([0,1), \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$ (J je tzv. 2-homogeni ideal u A). Kako su sve sve ireducibilne reprezentacije od J (do na ekvivalenciju) evaluacije u točkama iz $[0,1)$ (primjer 1.4.15) , te kako je $A/J \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ dvodimenzionalna (komutativna), imamo

$$\hat{A} = \{[\pi_s] : \ s \in [0,1)\} \cup \{[\lambda], [\mu]\},$$

gdje je $\pi_s : A \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ evaluacija u točki $s \in [0,1)$, te λ i μ jednodimenzionalne reprezentacije od A dane s $\lambda : f \mapsto \lambda(f)$ i $\mu : f \mapsto \mu(f)$. Naravno, kako je A liminalna, imamo

$$\mathrm{Max}(A) = \mathrm{Prim}(A) = \{\ker \pi_s : \ s \in [0,1)\} \cup \{\ker \lambda, \ker \mu\}.$$

Budući da je

$$Z(A) = \left\{ \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} : \ f \in C([0,1]) \right\},$$

slijedi da je

$$\ker \lambda \cap Z(A) = \ker \mu \cap Z(A) = \left\{ \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} : \ f \in C_0([0,1)) \right\}.$$

Dakle, $\ker \lambda \approx \ker \mu$, pa A nije (slabo) centralna. Stavimo $B := \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ i definirajmo $*$-epimorfizam

$$\phi : A \to B \quad \text{s} \quad \phi(f) := (\lambda(f), \mu(f)) \quad (f \in A).$$

Tada iz propozicije 1.8.1 slijedi $\phi(Z(A)) \subsetneqq Z(B)$, što naravno možemo i provjeriti i eksplicitnim računom. Naime, imamo

$$\phi(Z(A)) = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\} \subsetneqq Z(B) = B = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

1.9 $C_0(\Delta)$-algebre i odozgo poluneprekidni C*-svežnjevi

Definicija 1.9.1 Neka je A C*-algebra i neka je Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Za A kažemo da je $C_0(\Delta)$-*algebra* ako postoji nedegenerirani $*$-homomorfizam $\Phi_A : C_0(\Delta) \to Z(M(A))$.

Napomena 1.9.2 Ako je A $C_0(\Delta)$-algebra tada iz Hewitt-Cohenovog teorema faktorizacije (teorem 1.1.15) slijedi

$$A = \Phi_A(C_0(\Delta))A = \{\Phi_A(f)a : \ f \in C_0(\Delta), \ a \in A\}.$$

Ako je A $C_0(\Delta)$-algebra tada za je svaki ideal $J \in \mathrm{Id}(C_0(\Delta))$, $\Phi_A(J)A$ ideal u A (zatvorenost od $\Phi_A(J)A$ ponovno slijedi iz Hewitt-Cohenovog teorema faktorizacije). Ukoliko je J_s maksimalni ideal od $C_0(\Delta)$ koji se sastoji od svih funkcija koje iščezavaju u točki $s \in \Delta$ tada za $I_s := \Phi_A(J_s)A$ kvocijent $A(s) := A/I_s$ zovemo *vlakno* od A *nad* s. Ako je $a \in A$ tada njegovu sliku (po kvocijentnom preslikavanju $A \mapsto A/J_s$) označavamo s $a(s)$ i na a gledamo kao na funkciju

$$a : \Delta \to \bigsqcup_{s\in\Delta} A(s), \quad a : s \mapsto a(s).$$

Sada ćemo ukratko objasniti kako dana C*-algebra postaje $C_0(\Delta)$-algebra. Pretpostavimo da je $\nu : \mathrm{Prim}(A) \to \Delta$ neprekidna funkcija i neka je $\Psi_A : Z(M(A)) \to C_b(\mathrm{Prim}(A))$ Dauns-Hofmannov izomorfizam (teorem 1.4.19). Tada je A $C_0(\Delta)$-algebra, gdje je $\Phi_A : C_0(\Delta) \to C_b(\mathrm{Prim}(A))$ dan s

$$\Phi_A(f) := \Psi_A^{-1} \circ (f \circ \nu) \quad (f \in C_0(\Delta)).$$

Zaista, trebamo pokazati da je $\Phi_A(C_0(\Delta))A = A$. Neka je $P \in \mathrm{Prim}(A)$. Tada je

$$\Phi_A(f)a + P = f(\nu(P))a + P \quad (a \in A, f \in C_0(\Delta)),$$

pa očito $\Phi_A(C_0(\Delta))A \nsubseteq P$. Budući da je $\Phi_A(C_0(\Delta))A$ (zatvoren) ideal u A, odavde odmah slijedi nedegeneriranost od Φ_A. Dakle, A je $C_0(\Delta)$-algebra i time smo dokazali prvi dio sljedeće propozicije.

Propozicija 1.9.3 Neka je A C*-algebra i neka je Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Ako postoji neprekidna funkcija $\nu : \mathrm{Prim}(A) \to \Delta$ tada je A $C_0(\Delta)$-algebra, gdje je

$$\Phi_A(f) := \Psi_A^{-1} \circ (f \circ \nu) \quad (f \in C_0(\Delta)). \tag{1.24}$$

Obratno, ako je A $C_0(\Delta)$-algebra s $\Phi_A : C_0(\Delta) \to Z(M(A))$ tada postoji neprekidna funkcija $\nu : \mathrm{Prim}(A) \to \Delta$ takva da vrijedi (1.24).

Posebno, svaka ireducibilna reprezentacija od A je dobivena podizanjem neke ireducibilne reprezentacije od vlakna $A(s)$ za neko $s \in \Delta$. Preciznije, ako je $[\pi] \in \hat{A}$, tada je ideal $I_{\nu(\ker(\pi))}$ sadržan u $\ker \pi$ i π je dobivena podizanjem ireducibilne reprezentacije od $A(\nu(\ker\pi))$. Dakle, možemo identificirati

$$\hat{A} = \bigsqcup_{s\in\Delta} A(s)\hat{} \quad \text{i} \quad \mathrm{Prim}(A) = \bigsqcup_{s\in\Delta} \mathrm{Prim}(A(s)).$$

□

Ubuduće nećemo isticati pripadni $*$-homomorfizam Φ_A, nego ćemo samo pisati $f \cdot a$ umjesto $\Phi_A(f)a$ ($f \in C_0(\Delta)$, $a \in A$). Dakle, A je nedegeneriran $C_0(\Delta)$-bimodul za kojeg je

$$f \cdot a = a \cdot f \quad \text{i} \quad (f \cdot a)^* = f^* a^*.$$

Primjer 1.9.4 Neka je A kvazicentralna C*-algebra. Prema propoziciji 1.7.7 Glimm(A) je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor (uz $\tau_q = \tau_{cr}$ topologiju). Tada A postaje $C_0(\mathrm{Glimm}(A))$-algebra, gdje je $\nu = \phi_A$ potpuna regularizacija.

Imamo sljedeću (svojevrsnu) generalizaciju propozicije 1.6.6:

Propozicija 1.9.5 Neka je A $C_0(\Delta)$-algebra.

(i) Za svako $a \in A$ funkcija $s \mapsto \|a(s)\|$ je odozgo poluneprekidna i iščezava u beskonačnosti.

(ii) Funkcije $s \mapsto \|a(s)\|$ su neprekidne za svako $a \in A$ ako i samo ako je preslikavanje $\nu : \mathrm{Prim}(A) \to \Delta$ otvoreno.

(iii) Za svako $a \in A$ vrijedi $\|a\| = \sup\{\|a(s)\| : \ s \in \Delta\}$.

(iv) Ako je $f \in C_0(\Delta)$ i $a \in A$, tada je $(f \cdot a)(s) = f(s)a(s)$ za sve $s \in \Delta$.

□

$C_0(\Delta)$-algebre su usko vezane uz odozgo poluneprekidne C*-svežnjeve.

Definicija 1.9.6 *Odozgo poluneprekidni* C*-*svežanj* je trojka (E, Δ, q), gdje je Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor (tzv. *bazni prostor*), E topološki prostor (tzv. *totalni prostor*) i $q : E \to \Delta$ neprekidna otvorena surjekcija, zajedno s operacijama i normama uz koje je svako *vlakno* $E(s) := q^{-1}(s)$ C*-algebra, tako da vrijede sljedeći uvjeti:

(i) Preslikavanje $a \mapsto \|a\|$ s E u $\mathbb{R}_+$ je odozgo poluneprekidno.

(ii) Involucija $a \mapsto a^*$ s E u E je neprekidna.

(iii) Preslikavanja $(a, b) \mapsto a + b$ i $(a, b) \mapsto ab$ s $E^{(2)} := (a, b) \in E \times E : \ q(a) = q(b)$ u E su neprekidna.

(iv) Za svako $\lambda \in \mathbb{C}$ je preslikavanje $a \mapsto \lambda a$ s E u E neprekidno.

(v) Ako je (a_α) mreža u E takva da $\|a_\alpha\| \longrightarrow 0$ i $q(a_\alpha) \longrightarrow s$ u Δ, onda $a_\alpha \longrightarrow 0_s$ u E (gdje 0_s označava nul-element C*-algebre $E(s)$).

Za odozgo poluneprekidni C*-svežanj kažemo da je *neprekidni* C*-*svežanj* (kraće, C*-*svežanj*) ukoliko je preslikavanje iz (i) neprekidno.

Napomena 1.9.7 Često ćemo samo reći da je E odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad Δ, pri čemu nećemo isticati preslikavanje q.

Definicija 1.9.8 Za (odozgo poluneprekidne) C*-svežnjeve E i F nad Δ kažemo da su *izomorfni* i pišemo $E \cong F$ ako postoji homeomorfizam $\Lambda : E \to F$ takav da je $\Lambda(E(s)) = F(s)$ i za kojeg je restrikcija $\Lambda|_{E(s)} : E(s) \to F(s)$ $*$-izomorfizam za sve $s \in \Delta$.

Primjer 1.9.9 (i) Osnovni primjer C*-svežnja je tzv. *trivijalni svežanj*. To je svežanj oblika $E = \Delta \times A$ (s produktnom topologijom), gdje je A C*-algebra i $q : E \to \Delta$ projekcija na prvu koordinatu.

(ii) Ako je E (odozgo poluneprekidni) C*-svežanj nad Δ i $U \subseteq \Delta$ otvoren ili zatvoren podskup, tada definiramo *restrikcijski svežanj* od E nad U kao trojku $(E|_U, U, q_U)$, gdje je $E|_U = \bigsqcup_{s \in U} E(s)$ snabdjeven s relativnom topologijom i $q|_U : E|_U \to U$ restrikcija od q. Očito je E_U (odozgo poluneprekidni) C*-svežanj nad U.

Istaknimo neke jednostavne posljedice koje slijede iz definicije 1.9.6.

Propozicija 1.9.10 Neka je E odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad Δ.

(i) Množenje skalarom $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$ s $\mathbb{C} \times E$ u E je neprekidno.

(ii) Ako je (a_α) mreža u E takva da $a_\alpha \longrightarrow 0_s$ u E (za neko $s \in D$), tada $\|a_\alpha\| \longrightarrow 0$.

(iii) Neka je (a_α) mreža u E takva da $q(a_\alpha) \longrightarrow q(a)$ za neko $a \in E$. Pretpostavimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji mreža (b_α) (indeksirana istim skupom) u E i $b \in E$ takva da

(a) $b_\alpha \longrightarrow b$ u E,

(b) $q(b_\alpha) = q(a_\alpha)$ za sve α,

(c) $\|a - b\| < \varepsilon$,

(d) $\|a_\alpha - b_\alpha\| < \varepsilon$ za dovoljno velike α.

Tada $a_\alpha \longrightarrow a$.

□

Definicija 1.9.11 Neka je E odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad Δ. Za funkciju $e : \Delta \to E$ kažemo da je *prerez* od E ako vrijedi $e(s) \in E(s)$ za sve $s \in \Delta$. Skup svih neprekidnih prereza od E, skup svih ograničenih neprekidnih prereza od E i skup svih neprekidnih prereza od E koji iščezavaju u beskonačnosti redom označavamo s $\Gamma(E)$, $\Gamma_b(E)$ i $\Gamma_0(E)$.

Napomenimo da nije očito da svaki odozgo poluneprekidni C*-svežanj uopće dopušta neprekidni prerez različit od nul-prereza. Ipak, vrijedi sljedeći rezultat:

Teorem 1.9.12 Neka je E odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad Δ. Tada za svako $s \in \Delta$ i $a \in E(s)$ postoji $e \in \Gamma(E)$ takav da je $e(s) = a$.

□

Napomena 1.9.13 Neka je E odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad Δ.

(i) Skup svih neprekidnih prereza $\Gamma(E)$ od E postaje $*$-algebra uz operacije po točkama. Također, za neprekidnu funkciju $g : \Delta \to \mathbb{C}$ i $e \in \Gamma(E)$ imamo $g \cdot e \in \Gamma(E)$, gdje je $(g \cdot e)(s) := g(s)e(s)$ $(s \in \Delta)$.

(ii) S obzirom na normu
$$\|e\| = \sup\{\|e(s)\| : \ s \in \Delta\}$$
$\Gamma_b(E)$ postaje C*-algebra.

Propozicija 1.9.14 Neka je E odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad Δ. Tada je $\Gamma_0(E)$ C*-podalgebra od $\Gamma_b(E)$. Štoviše, $\Gamma_0(E)$ je $C_0(\Delta)$-algebra i vrijedi

$$\Gamma_0(E)(s) = \{e(s) : \ e \in \Gamma_0(E)\} = E(s) \quad \text{za sve } s \in \Delta.$$

□

Često je koristan i sljedeći rezultat:

Propozicija 1.9.15 Neka je E odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad Δ. Neka je $\Gamma \subseteq \Gamma_0(E)$ takav da vrijedi:

(i) ako je $e \in \Gamma$ i $g \in C_0(\Delta)$ tada je $g \cdot e \in \Gamma$;

(ii) za sve $s \in \Delta$, $\Gamma(s) = \{e(s) : \ e \in \Gamma\}$ je gust podskup od $E(s)$.

Tada je Γ gust u $\Gamma_0(E)$.

□

Prirodno je pitati se vrijedi li i obrat propozicije 1.9.14. Drugim riječima, da li svaku $C_0(\Delta)$-algebru možemo dobiti kao C*-algebru prereza nekog odozgo poluneprekidnog C*-svežnja? Odgovor na to pitanje je potvrdan (ali netrivijalan) i u glavnom koraku za dokaz te činjenice se koristi sljedeći bitni teorem:

Teorem 1.9.16 (Fell) Pretpostavimo da je E skup, Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor i $q : E \to \Delta$ surjekcija takva da je svako vlakno $E(s) := q^{-1}(s)$ C*-algebra. Neka je Γ $*$-algebra prereza od E takva da vrijedi

(i) funkcija $s \mapsto \|e(s)\|$ je odozgo poluneprekidna za svako $e \in \Gamma$,

(ii) za svako $s \in \Delta$ skup $\{e(s) : \ e \in \Delta\}$ je gust u $E(s)$.

Tada postoji jedinstvena topologija τ na E s obzirom na koju je (E, Δ, q) odozgo poluneprekidni C*-svežanj i $\Gamma \subseteq \Gamma(E)$. Nadalje, ako su sve funkcije u (i) neprekidne, tada je (E, Δ, q) (neprekidni) C*-svežanj.

□

Netrivijalni dio prethodnog teorema je dokaz egzistencije takve topologije τ. Ona je opisana svojom bazom koju tvore svi skupovi oblika

$$\mathcal{U}(e, U, \varepsilon) = \{a \in E : \ q(a) \in U \text{ i } \|a - e(q(a))\| < \varepsilon\},$$

gdje su $e \in \Gamma$, $U \subseteq \Delta$ otvoren i $\varepsilon > 0$. Naravno, sada ostaje provjeriti da je uz tu topologiju (E, Δ, q) zaista odozgo poluneprekidni C*-svežanj i da je $\Gamma \subseteq \Gamma(E)$. S druge strane, dokaz jedinstvenosti takve topologije τ je vrlo jednostavan. Naime, pretpostavimo sa su τ_1 i τ_2 dvije topologije za koje vrijedi tvrdnja Fellovog teorema i neka je (a_α) mreža u E takva da $a_\alpha \xrightarrow{\tau_1} a$, za neko $a \in E$. Prema (i), za $\varepsilon > 0$ postoji $e \in \Gamma$ takav da je $\|e(q(a)) - a\| < \varepsilon$. Stavimo $b_\alpha := e(q(a_\alpha))$ i $b := e(q(a))$. Tada očito vrijedi: $b_\alpha \xrightarrow{\tau_2} b$ u E, $q(b_\alpha) = q(a_\alpha)$ za sve α, $\|a - b\| < \varepsilon$ i $\|a_\alpha - b_\alpha\| < \varepsilon$ eventualno. Prema propoziciji 1.9.10 imamo $a_\alpha \xrightarrow{\tau_2} a$. Dakle, $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Zbog simetrije imamo jednakost $\tau_1 = \tau_2$.

Ukoliko saberemo dosadašnje rezultate iz ove točke, dobivamo sljedeći fundamentalni teorem:

Teorem 1.9.17 (Lee) Neka je A C*-algebra i neka je Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:

(i) A je $C_0(\Delta)$-algebra;

(ii) postoji neprekidno preslikavanje $\nu : \mathrm{Prim}(A) \to \Delta$;

(iii) postoji odozgo poluneprekidni C*-svežanj E nad Δ i $C_0(\Delta)$-modularni izomorfizam C*-algebri $A \cong \Gamma_0(E)$.

Štoviše, ako je A $C_0(\Delta)$-algebra, tada je preslikavanje $\nu : \mathrm{Prim}(A) \to \Delta$ otvoreno ako i samo ako je E (neprekidni) C*-svežanj nad Δ.

□

Mi ćemo samo opisati kako iz dane $C_0(\Delta)$-algebre A konstruirati odozgo poluneprekidni C*-svežanj E za kojeg vrijedi (iii). Potpuni dokaz Leejevog teorema, kao i dokazi svih tvrdnji iz ove točke, mogu se naći u [73].

Neka je

$$E := \bigsqcup_{s \in \Delta} A(s)$$

i neka je $q : E \to \Delta$ kanonska surjekcija. Stavimo $\Gamma := \{[s \mapsto a(s)] : \ a \in A\}$. Prema Fellovom teoremu (teorem 1.9.16) postoji jedinstvena topologija na E s obzirom na koju on postaje odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad Δ i za koju vrijedi $\Gamma \subseteq \Gamma(E)$. Prema propoziciji 1.9.5 (i) $\Gamma \subseteq \Gamma_0(E)$. Prema propoziciji 1.9.15 Γ je gust u $\Gamma_0(E)$.

Nadalje, prema propoziciji 1.9.5 (iii) i (iv) preslikavanje $a \mapsto [s \mapsto a(s)]$ je $C_0(\Delta)$-modularni $*$-izomorfizam s A na $\Gamma(E)$. Dakle, Γ je u normi zatvoren, pa je nužno $\Gamma = \Gamma_0(E)$.

Napomena 1.9.18 Neka je A C*-algebra sa Hausdorffovim primitivnim spektrom $\Delta := \mathrm{Prim}(A)$. Tada je trivijalno A $C_0(\Delta)$-algebra, pa iz Leejevog teorema slijedi egzistencija (neprekidnog) C*-svežnja E nad Δ takvog da vrijedi $A \cong \Gamma_0(E)$ ($C_0(\Delta)$-modularni izomorfizam.)

Na kraju ove točke, istaknimo i sljedeći bitan rezultat iz teorije C*-svežnjeva kojeg ćemo često koristiti:

Teorem 1.9.19 (Tietzeov teorem za C*-svežnjeve) Neka je E (neprekidni) C*-svežanj nad lokalno kompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ. Ako je $C \subseteq \Delta$ zatvoren podskup i $e \in \Gamma_0(E|_C)$, tada postoji $f \in \Gamma_0(E)$ takav da je $f|_C = e$. Specijalno, ako je I_C ideal u $\Gamma_0(E)$ koji se sastoji od svih $e \in \Gamma_0(E)$ za koje je $e|_C = 0$, tada je preslikavanje $q : \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E|_C)$ dano s $q(e) = e|_C$ surjektivni $*$-homomorfizam. Specijalno, $\Gamma_0(E)/I_C \cong \Gamma_0(E|_C)$.

□

Dokaz teorema 1.9.19 može se naći u [33] (gdje je formuliran za općenitije Banachove svežnjeve).

1.10 Homogene i subhomogene C*-algebre

Definicija 1.10.1 Za C*-algebru A kažemo da je *n-homogena* ($n \in \mathbb{N}$) ako su sve njene ireducibilne reprezentacije iste dimenzije n.

Iz primjera 1.4.15 slijedi da je svaka C*-algebra oblika $C_0(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ (gdje je Δ lokalno kompaktan Hausdroffov prostor) n-homogena. Štoviše, dokazat ćemo da je svaka n-homogena C*-algebra lokalno tog oblika.

U tu svrhu, najprije primijetimo da homogene C*-algebre imaju Hausdorrfov primitivni spektar. Zaista, to slijedi iz sljedećeg (dobro poznatog) rezultata, čiji se dokaz može naći npr. u [26]:

Teorem 1.10.2 Neka je A C*-algebra čije su sve ireducibilne reprezentacije konačno dimenzionalne. Za svako $n \in \mathbb{N}$ s $\hat{A}_n$ i $\mathrm{Prim}_n(A)$ redom označimo skup svih n-dimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija od A i skup svih njihovih jezgara. Tada vrijedi:

(i) $\bigcup_{k \leq n} \mathrm{Prim}_k(A)$ je zatvoren podskup od $\mathrm{Prim}(A)$;

(ii) $\mathrm{Prim}_n(A)$ je otvoren podskup od $\bigcup_{k \leq n} \mathrm{Prim}_k(A)$;

(iii) $\mathrm{Prim}_n(A)$ je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor (u relativnoj Jacobsonovoj topologiji);

(iv) funkcije traga $\hat{A} \to \mathbb{R}_+$, $[\pi] \mapsto \operatorname{tr} \pi(a)$ su odozdo poluneprekidne za svako $a \in A_+$. Nadalje, relativna Jacobsonova topologija na $\mathrm{Prim}_n(A)$ se podudara sa slabom topologijom induciranom funkcijama traga.

□

Specijalno, prema napomeni 1.9.18, za n-homogenu C*-algebru A postoji C*-svežanj E nad $\Delta := \mathrm{Prim}(A)$ takav da je $A \cong \Gamma_0(E)$ ($C_0(\Delta)$-modularni izmorfizam). Naravno, sva vlakna od E su izomorfna matričnoj algebri $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Štoviše, pripadni svežanj E od A je lokalno trivijalan, tj. oko svake točke $s \in \Delta$ postoji otvorena okolina U oko s takva da je restrikcijski svežanj $E|_U$ izomorfan trivijalnom svežnju $U \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (kao C*-svežanj). Kako bi dokazali tu činjenicu, najprije ćemo trebati par pomoćnih rezultata.

Lema 1.10.3 Neka je E C*-svežanj nad lokalno kompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ, neka je $s_0 \in \Delta$ i neka su $p_1, \ldots, p_r$ međusobno ortogonalni ne-nul projektori u vlaknu $E(s_0)$ različiti. Tada postoji otvorena okolina U oko s_0 i prerezi $e_1, \ldots, e_r \in \Gamma_0(E)$ takvi da je vrijedi

(i) $e_i(s_0) = p_i$ $(1 \le i \le r)$,

(ii) $e_1(s), \ldots, e_r(s)$ su međusobno ortogonalni projektori za sve $s \in U$.

Dokaz. Prema propoziciji 1.1.26 projektore $p_1, \ldots, p_r$ možemo redom podići do pozitivnih međusobno ortogonalnih elemenata $e'_1, \ldots, e'_r \in \Gamma_0(E)$. Kako je $e'_i(s_0) = p_i = p_i^2 = e'_i(s_0)^2$, za $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ postoji otvorena okolina U oko s_0 takva da vrijedi $\|e'_i(s)^2 - e'_i(s)\| < \varepsilon$, za sve $s \in U$ i $1 \le i \le r$. Prema teoremu o preslikavanju spektra, postoje $\frac{1}{2} < \delta_1 < 1 < \delta_2$ takvi da je

$$\mathrm{sp}(e'_i) \subseteq \langle 1-\delta_2, 1-\delta_1 \rangle \cup \langle \delta_1, \delta_2 \rangle \quad (1 \le i \le r).$$

Neka je $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ neprekidna funkcija takva da vrijedi

$$\psi(t) := \begin{cases} 0, & \text{za } t \in \langle 1-\delta_2, 1-\delta_1 \rangle \\ 1, & \text{za } t \in \langle \delta_1, \delta_2 \rangle. \end{cases}$$

Tada očito elementi $e_i := \psi(e'_i) \in \Gamma_0(E)$ $(1 \le i \le r)$ zadovoljavaju tražene uvjete. □

Lema 1.10.4 Neka je E C*-svežanj nad lokalno kompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ i neka je $s_0 \in \Delta$. Pretpostavimo da su q_1 i q_2 projektori u vlaknu $E(s_0)$ i $a \in E(s_0)$ takav da je $a^*a = q_1$ i $aa^* = q_2$. Ako je U otvorena okolina oko s_0 u Δ i $p_1, p_2 \in \Gamma_0(E)$ takvi da vrijedi

(i) $p_i(s_0) = q_i$ $(1 \le i \le 2)$ i

(ii) $p_1(s)$ i $p_2(s)$ su projektori za sve $s \in U$,

tada postoji otvorena okolina V od s_0 i $q \in \Gamma_0(E)$ takav da vrijedi $q(s_0) = a$ i

$$(q^*q)(s) = p_1(s), \quad (qq^*)(s) = p_2(s) \quad \text{za sve } s \in V.$$

Dokaz. Neka je $h' \in \Gamma_0(E)$ takav da je $h'(s_0) = a$ i stavimo $h := p_2 h' p_1$. Kako je a parcijalna izometrije, imamo $aa^*a = a$, pa je

$$h(s_0) = q_2 a q_1 = a. \tag{1.25}$$

Također imamo

$$(p_2 h)(s) = (h p_1)(s) = h(s) \quad \text{za sve } s \in U. \tag{1.26}$$

Stavimo $g := |h| = (h^*h)^{\frac{1}{2}}$. Iz (1.25) slijedi

$$g(s_0) = (h(s_0)^* h(s_0))^{\frac{1}{2}} = (a^*a)^{\frac{1}{2}} = q_1 = p_1(s_0). \tag{1.27}$$

Iz (1.26) slijedi da je

$$(h^*h)(s) = p_1(s)(h^*h)(s)p_1(s) \quad \text{za sve } s \in U,$$

a kako je $p_1(s)$ projektor za sve $s \in U$, imamo

$$g(s) = p_1(s) g(s) p_1(s) \quad \text{za sve } s \in U. \tag{1.28}$$

Iz (1.27) slijedi da je $(g - p_1)(s_0) = 0$, pa sužavanjem skupa U (ako je potrebno), možemo pretpostaviti da vrijedi

$$\|(g - p_1)(s)\| < \frac{1}{8} \quad \text{za sve } s \in U. \tag{1.29}$$

Neka je $\psi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ neprekidna funkcija takva da vrijedi

$$\psi_1(t) := \begin{cases} 0, & \text{za } t = 0 \\ \frac{1}{t}, & \text{za } |t-1| \leq \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Definirajmo $q := h \cdot \psi_1(g)$. Tada je

$$q(s)^* q(s) = \psi_1(g(s)) h(s)^* h(s) \psi_1(g(s)) = (\psi_1(g(s)) g(s))^2 = \psi_2(g(s))^2 \quad \text{za sve } s \in U, \tag{1.30}$$

gdje je

$$\psi_2(t) := t\psi_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{za } t = 0 \\ 1, & \text{za } |t-1| \leq \frac{1}{8}. \end{cases} \tag{1.31}$$

Koristeći teorem 1.1.10 iz (1.28), (1.29) i (1.31), dobivamo da je $\psi_2(g(s)) = p_1(s)$ za sve $s \in U$, pa iz (1.30) slijedi da je

$$q(s)^* q(s) = p_1(s) \quad \text{za sve } s \in U. \tag{1.32}$$

Kako je

$$q(s_0) = h(s_0)\psi_1(g(s_0)) = a q_1 = a, \tag{1.33}$$

imamo $(qq^*)(s_0) = aa^* = q_2 = p_2(s_0)$, odnosno

$$(qq^* - p_2)(s_0) = 0. \tag{1.34}$$

S druge strane, iz (1.26) slijedi

$$p_2(s)(qq^*)(s) = h(s)\psi_1(g(s))q^*(s) = (qq^*)(s) \quad \text{za sve } s \in U. \tag{1.35}$$

Iz (1.32) slijedi da je $q(s)$ parcijalna izometrija za sve $s \in U$. Dakle $(qq^*)(s)$ je projektor, a iz (1.35) da je $(qq^*)(s) \leq p_2(s)$ za sve $s \in U$. Tvrdimo da je $(qq^*)(s) = p_2(s)$ za sve s iz neke okoline $s_0 \in V \subseteq U$. Pretpostavimo suprotno i neka je (s_α) mreža u U koja konvergira prema s_0 takva da je $(qq^*)(s_\alpha) \neq p_2(s_\alpha)$ za sve α. Tada je $\|(p_2 - qq^*)(s_\alpha)\| = 1$ za sve α, pa iz neprekidnosti funkcije $s \mapsto \|(p_2 - qq^*)(s)\|$ slijedi

$$\|(qq^* - p_2)(s_0)\| = \lim_\alpha \|(p_2 - qq^*)(s_\alpha)\| = 1,$$

što je u kontradikciji s (1.34). Dakle, postoji otvorena okolina V oko s_0 takva da vrijedi

$$q(s)^*q(s) = p_1(s) \quad q(s)q(s)^* = p_2(s) \quad \text{za sve } s \in V,$$

što zajedno s (1.33) završava dokaz leme. □

Teorem 1.10.5 Neka je E C*-svežanj nad lokalno kompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ. Pretpostavimo da je $s_0 \in \Delta$ i B konačno dimenzionalna C*-podalgebra vlakna $E(s_0)$. Tada postoji otvorena okolina U oko s_0 u Δ i injektivni morfizam C*-svežnjeva $\Lambda : U \times B \to E|_U$ takav da vrijedi $\Lambda(s_0, b) = b$ za sve $b \in B$.

Dokaz. Iz teorema 1.1.8 slijedi da je $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$, gdje su B_k minimalni ideali u B takvi da je $B_k \cong \mathrm{M}_{n_k}(\mathbb{C})$ $(1 \leq k \leq r)$. Neka su $(e^k_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n_k}$ matrične jedinice u B_k. Koristeći leme 1.10.3 i 1.10.4 dobivamo otvorenu okolinu U oko s_0, prereze p^k_i $(1 \leq k \leq r,\ 1 \leq i \leq n_k)$ i $q^k_{i,1}$ $(1 \leq k \leq r,\ 2 \leq i \leq n_k)$ u $\Gamma_0(E)$ takve da vrijedi:

(i) $p^k_i(s_0) = e^k_{i,i}$, $q^k_{i,1}(s_0) = e^k_{i,1}$;

(ii) $p^k_i(s)$ $(1 \leq k \leq r,\ 1 \leq i \leq n_k)$ su međusobno ortogonalni ne-nul projektori za sve $s \in U$;

(iii) za sve $s \in U$, $1 \leq k \leq r$ i $2 \leq i \leq n_k$ vrijedi

$$q^k_{i,1}(s)^* q^k_{i,1}(s) = p^k_1(s),$$

$$q^k_{i,1}(s) q^k_{i,1}(s)^* = p^k_i(s).$$

Stavimo $q^k_{i,j} := q^k_{i,1}(q^k_{j,1})^*$. Ako definiramo $\Lambda : U \times B \to E|_U$ s

$$\Lambda\left(s, \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=1}^{n_k} \alpha^k_{i,j} e^k_{i,j}\right) := \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=1}^{n_k} \alpha^k_{i,j} q^k_{i,j}(s),$$

tada se lako provjeri da je Λ injektivni morfizam C*-svežnjeva. □

Teorem 1.10.6 (Fell) Neka je A n-homogena C*-algebra. Tada postoji lokalno trivijalni C*-svežanj E nad $\Delta := \mathrm{Prim}(A)$ čija su sva vlakna izomorfna s $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ takav da je $\Gamma_0(E) \cong A$.

Dokaz. Prema korolaru 1.4.17 i teoremu 1.10.2 $\Delta := \mathrm{Prim}(A)$ je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Prema napomeni 1.9.18 postoji C*-svežanj E nad Δ takav da je $A \cong \Gamma_0(E)$. Ako je $s_0 \in \Delta$ bilo koja točka, tada iz teorema 1.10.5 slijedi egzistencija otvorene okoline U oko s_0 u Δ i injektivnog morfizma C*-svežnjeva $\Lambda : U \times E(s_0) \to E|_U$ takvog da je $\Lambda(s_0, a) = a$ za sve $a \in E(s_0)$. Kako je $E(s) \cong E(s_0) \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ za sve $s \in \Delta$, slijedi da je Λ izomorfizam. Dakle, E je lokalno trivijalan. □

Korolar 1.10.7 Neka je A n-homogena C*-algebra. Tada je A centralna.

Dokaz. Kako je $\Delta := \mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov, prema napomeni 1.7.9 dovoljno je dokazati da je A kvazicentralna. Neka su E i Δ kao u teoremu 1.10.6. Za $s \in \Delta$ neka je $e \in \Gamma_0(E)$ takav da je $e(s') = 1_{E(s')}$ za sve s' iz neke okoline U od s u Δ (egzistencija takvog prereza slijedi iz lokalne trivijalnosti od E). Neka je V kompaktna okolina od s u Δ takva da je $V \subseteq U$ i izaberimo neprekidnu funkciju $g : \Delta \to [0,1]$ za koju vrijedi $g|_V = 1$ i $g(s') = 0$ za sve s' izvan nekog kompaktnog podskupa od U. Tada je $g \cdot e \in Z(\Gamma_0(E))$ i $g(s) = 1$. Dakle, A je kvazicentralna. □

Definicija 1.10.8 Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj nad lokalno kompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ s vlaknima $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Ukoliko postoji konačan otvoreni pokrivač $\{U_j\}_{1 \leq j \leq m}$ od Δ takav da je $E|_{U_j} \cong U_j \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (izomorfizam C*-svežnjeva) za sve $1 \leq j \leq m$ tada kažemo da je E *konačnog tipa* (kao C*-svežanj).

Također, Za n-homogenu C*-algebru A kažemo da je *konačnog tipa* ako je njen pripadni C*-svežanj E iz teorema 1.10.6 konačnog tipa.

Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj nad lokalno kompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ s vlaknima $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Tada je naravno E (lokalno trivijalni kompleksni) n^2-dimenzionalni vektorski svežanj nad Δ (pri čemu zaboravljamo dodatnu strukturu). Ako je E konačnog tipa (u smislu definicije 1.10.8) tada je on naravno konačnog tipa i kao vektorski svežanj. Interesantno je (i netrivijalno) da vrijedi i obrat prethodne tvrdnje, tj. C*-svežanj E je konačnog tipa kao C*-svežanj ako i samo ako je on konačnog tipa kao vektorski svežanj. Preciznije, vrijedi:

Teorem 1.10.9 (Phillips) Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj nad lokalno kompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ s vlaknima $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:

(i) E je konačnog tipa kao C*-svežanj;

(ii) E je konačnog tipa kao vektorski svežanj;

(iii) postoji lokalno trivijalni C*-svežanj F nad Stone-Čechovom kompaktifikacijom $\beta\Delta$ od Δ takav da je $F|_\Delta \cong E$ (izomorfizam C*-svežnjeva);

□

Dokaz teorema 1.10.9 može se naći u [57]. Zbog prethodnog teorema možemo jednoznačno govoriti o konačnom tipu od E. Dakle, kako bi provjerili da je $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$-svežanj E konačnog tipa (u smislu definicije 1.10.8), dovoljno je provjeriti da je pripadni n^2-dimenzionalni vektorski svežanj konačnog tipa. Nadalje, kako bi provjerili da je pripadni vektorski svežanj konačnog tipa, često ćemo koristiti sljedeću jednostavnu karakterizaciju:

Lema 1.10.10 Neka je E n-dimenzionalni lokalno trivijalni vektorski svežanj nad parakompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ. Tada je E konačnog tipa ako i samo ako postoji konačan skup ograničenih neprekidnih prereza $\{e_1, \ldots, e_m\} \subseteq \Gamma_b(E)$ takav da vrijedi

$$\operatorname{span}\{e_1(s), \ldots, e_m(s)\} = E(s) \quad \text{za sve } s \in \Delta. \tag{1.36}$$

Dokaz. Ako je E konačnog tipa, tada tvrdnja slijedi direktno koristeći konačnu particiju jedinice podređenu konačnom lokalno trivijalizirajućem pokrivaču od Δ.

Obratno, pretpostavimo da su $e_1, \ldots, e_m \in \Gamma_b(E)$ takvi da vrijedi (1.36). Tada je preslikavanje $\Lambda : \Delta \times \mathbb{C}^m \to E$ definirano formulom

$$\Lambda(s, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j(s),$$

surjektivni morfizam vektorskih svežnjeva. Slijedi da je E izomorfan podsvežnju $(\ker \Lambda)^{\perp}$ trivijalnog svežnja $\Delta \times \mathbb{C}^m$, pa je kao takav konačnog tipa (vidjeti [38] ili [43]). □

Kao direktnu posljedicu teorema 1.10.6, teorema 1.10.9 i leme 1.10.10 dobivamo sljedeću karakterizaciju σ-unitalnih homogenih C*-algebri konačnog tipa:

Korolar 1.10.11 σ-unitalna n-homogena C*-algebra A je konačnog tipa ako i samo ako postoji konačan broj elemenata $a_1, \ldots, a_m \in A$ za koje vrijedi

$$\operatorname{span}\{a_1 + P, \ldots, a_m + P\} = A/P \quad \text{za sve } P \in \operatorname{Prim}(A).$$

□

Definicija 1.10.12 Za C*-algebru A kažemo da je *n-subhomogena* ($n \in \mathbb{N}$) ako vrijedi $\sup\{\dim \pi : [\pi] \in \hat{A}\} = n$.

Neka je A n-subhomoegena C*-algebra. Stavimo

$$J := \bigcap \{\ker \pi : [\pi] \in \hat{A}, \ \dim \pi < n\}.$$

Tada je J ideal u A kojeg zovemo *n-homogeni ideal* u A. Naime, J je najveći ideal u A koji je n-homogen kao C*-algebra. Tada je očito A/J k-subhomogena C*-algebra, gdje je $k < n$. Koristeći induktivni argument, dolazimo do konačnog rastućeg niza

$$0 = J_0 \subseteq J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_p = A \tag{1.37}$$

ideala u A takav da je svaki subkvocijent J_i/J_{i-1} $(1 \leq i \leq p)$ homogena C*-algebra. Za (1.37) kažemo da je *(konačan) kompozicijski niz* za A. Primijetimo da je ideal J_1 u (1.37) pripadni n-homogeni ideal u A.

Definicija 1.10.13 Za C*-algebru A kažemo da je *n-subhomogena konačnog tipa* (kraće *n-SFT algebra*[5]) ako je A n-subhomogena i ako je svaki subkvocijent J_i/J_{i-1} $(1 \leq i \leq p)$ u kompozicijskom nizu (1.37) za A homogena C*-algebra konačnog tipa.

Na kraju ove točke istaknimo da omotačka von Neumannova algebra subhomogene C*-algebre ima vrlo jednostavan oblik:

Teorem 1.10.14 Neka je A n-subhomogena C*-algebra. Tada postoje prirodni brojevi $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_l = n$ i kompaktni Hausdorffovi prostori $X_1, \ldots, X_l$ takvi da je

$$A^{**} = C(X_1, \mathrm{M}_{k_1}\mathbb{C}) \oplus C(X_2, \mathrm{M}_{k_2}(\mathbb{C})) \oplus \cdots \oplus C(X_l, \mathrm{M}_{k_l}(\mathbb{C})).$$

Specijalno, A^{**} je n-subhomogena.

□

Dokaz teorema 1.10.14 može se naći u [16].

Korolar 1.10.15 Ako je A n-subhomogena C*-algebra, tada je i $M(A)$ n-subhomogena.

Dokaz. Kako svaku ireducibilnu reprezentaciju od A možemo podići do ireducibilne reprezentacije od $M(A)$ na istom Hilbertovom prostoru (teorem 1.2.4), slijedi $\sup\{\dim \pi : [\pi] \in M(A)^\wedge\} \geq n$. S druge strane, neka je π ireducibilna reprezentacija od $M(A)$. Kako je $M(A) \subseteq A^{**}$, prema teoremu 1.2.6 π možemo podići do ireducibilne reprezentacije ρ od A^{**} na nešto većem Hilbertovom prostoru. Prema teoremu 1.10.14 A^{**} je n-subhomogena, pa je $\dim \pi \leq \dim \rho \leq n$. □

[5] subhomogeneous of finite type

Poglavlje 2

Potpuno ograničeni operatori i Haagerupov tenzorski produkt

2.1 Operatorski prostori i potpuno ograničeni operatori

Neka je V vektorski prostor. Za $m, n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathrm{M}_{m,n}(V)$ vektorski prostor svih $m \times n$ matrica s vrijednostima u V. Naravno, $\mathrm{M}_{m,n}(V)$ možemo poistovijetiti s algebarskim tenzorskim produktom $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \otimes V$. Standarno, pišemo $\mathrm{M}_n(V) := \mathrm{M}_{n,n}(V)$, te $\mathrm{R}_n(V) := \mathrm{M}_{1,n}(V)$ i $\mathrm{C}_n(V) := \mathrm{M}_{n,1}(V)$.

Ako je $\mathbf{x} \in \mathrm{M}_{m,n}(V)$ tada njenu (i,j)-tu vrijednost označavamo s $x_{i,j}$ i pišemo $\mathbf{x} = [x_{i,j}]$. Za $\mathbf{x} = [x_{i,j}] \in \mathrm{M}_{m,n}(V)$ s $\mathbf{x}^\tau$ označavamo transponiranu matricu $[x_{j,i}] \in \mathrm{M}_{n,m}(V)$. Stadardnu bazu matričnih jedinica za $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ označavamo s $\{e_{i,j}\}$.

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathcal{H}^{(n)}$ direktna suma n kopija od $\mathcal{H}$. Tada $\mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\mathcal{H}))$ možemo identificirati sa C*-algebrom $\mathrm{B}(\mathcal{H}^{(n)})$ svih ograničenih operatora na $\mathcal{H}^{(n)}$, preko $*$-izomorfizma koji matrici $[T_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\mathcal{H}))$ pridružuje operator iz $\mathrm{B}(\mathcal{H}^{(n)})$ koji na vektoru $\vec{\xi} = (\xi_k) \in H^{(n)}$ djeluje s

$$\begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \cdots & T_{1,n} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \cdots & T_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T_{n,1} & T_{n,2} & \cdots & T_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n T_{1,k}\xi_k \\ \sum_{k=1}^n T_{2,k}\xi_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n T_{n,k}\xi_k \end{bmatrix}.$$

Preko te identifikacije $\mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\mathcal{H}))$ postaje C*-algebra. Normu na $\mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\mathcal{H}))$ označavamo s $\|\cdot\|_n$. Eksplicitno, norma matrice $[T_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\mathcal{H}))$ je dana s

$$\|[T_{i,j}]\|_n := \sup\{\|[T_{i,j}]\vec{\xi}\| : \ \vec{\xi} \in \mathrm{Ball}(\mathcal{H}^{(n)})\}.$$

Budući da normu vektora ξ Hilbertovog prostora $\mathcal{K}$ možemo računati prema formuli

$$\|\xi\| = \sup\{|\langle \xi, \eta\rangle| : \ \eta \in \mathrm{Ball}(\mathcal{K})\},$$

imamo

$$\|[T_{i,j}]\|_n = \sup\{\Big|\sum_{i,j=1}^{n} \langle T_{i,j}\xi_j, \eta_i\rangle\Big| : \vec{\xi} = (\xi_i), \vec{\eta} = (\eta_i) \in \mathrm{Ball}(\mathcal{H}^{(n)})\}.$$

Slični identiteti vrijede i za pravokutne matrice. Zaista, ako su $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilbertovi prostori i $m, n \in \mathbb{N}$, tada vektorskom prostoru $\mathrm{M}_{m,n}(\mathrm{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H}))$ pridružujemo normu $\|\cdot\|_{m,n}$ tako da prirodni izomorfizam

$$\mathrm{M}_{m,n}(\mathrm{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})) \cong \mathrm{B}(\mathcal{K}^{(n)}, \mathcal{H}^{(m)})$$

postaje izometrički izomorfizam.

Neka su V i W vektorski prostori, te $\phi : V \to W$ linearni operator. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo n-tu *amplifikaciju* od ϕ kao operator $\phi_n : \mathrm{M}_n(V) \to \mathrm{M}_n(W)$ koji matrici $[x_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(V)$ pridružuje matricu $[\phi(x_{i,j})] \in \mathrm{M}_n(W)$. Naravno, na ϕ_n možemo gledati kao na tenzorski produkt operatora $\mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \otimes \phi$. Slično definiramo i operatore $\phi_{m,n} : \mathrm{M}_{m,n}(V) \to \mathrm{M}_{m,n}(W)$.

Definicija 2.1.1 Neka su X i Y normirani prostori. Pretpostavimo da je svaki matrični prostor $\mathrm{M}_n(X)$ i $\mathrm{M}_n(Y)$ snabdjeven s normom $\|\cdot\|_n$. Za linearni operatori $\phi : X \to Y$ kažemo da je *potpuno ograničen* ako je

$$\|\phi\|_{cb} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi_n\|_n < \infty$$

i u tom slučaju za $\|\phi\|_{cb}$ kažemo da je cb-norma[1] od ϕ. Ukoliko su svi operatori ϕ_n kontrakcije / izometrije / kvocijentni operatori, tada redom kažemo da je ϕ *potpuna kontrakcija / potpuna izometrija / potpuno kvocijentni operator*. Skup svih potpuno ograničenih operatora s X u Y označavamo s $\mathrm{CB}(X, Y)$, odnosno s $\mathrm{CB}(X)$ ako je $X = Y$

Definicija 2.1.2 *Konkretan operatorski prostor* je zatvoren potprostor od $X \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. *Apstraktan operatorski prostor* je par $(X, \{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, gdje je X vektorski prostor i $\|\cdot\|_n$ potpuna norma na $\mathrm{M}_n(X)$ $(n \in \mathbb{N})$ takav da postoji Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ i potpuna izometrija $\phi : X \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. U tom slučaju za niz $\{\|\cdot\|_n\}$ kažemo da definira *strukturu operatorskog prostora* na vektorskom prostoru X.

Napomena 2.1.3 Neka je A C*-algebra. Izabravši vjernu reprezentaciju od A, možemo pretpostaviti da je A C*-podalgebra od $\mathrm{B}(\mathcal{H})$. U tom slučaju $\mathrm{M}_n(A)$ nasljeđuje normu $\|\cdot\|_n$ od $\mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\mathcal{H})) \cong \mathrm{B}(\mathcal{H}^{(n)})$ i lako se provjeri da je $\mathrm{M}_n(A)$ u normi zatvorena podalgebra od $\mathrm{M}_n(\mathrm{B}(\mathcal{H}))$, dakle C*-algebra. Naravno, dana konstrukcija ne ovisi o izboru vjerne reprezentacije, budući da je C*-norma na C*-algebri jedinstvena. Slijedi da je (s obzirom na te norme) A operatorski prostor. Ukoliko je A komutativna, recimo $A = C_0(\Delta)$ za lokalno kompaktan Hausdorffov prostor Δ, tada su te

[1] engl. completely bounded

matrične norme određene preko kanonskog izomorfizma $\mathrm{M}_n(C_0(\Delta)) \cong C_0(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$. Eksplicitno, ako je $[f_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(C_0(\Delta))$, tada imamo

$$\|[f_{i,j}]\|_n = \sup\{\|[f_{i,j}(s)]\|_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} : \ s \in \Delta\}. \tag{2.1}$$

Napomena 2.1.4 Ako su A i B C*-algebre tada je očito svaki $*$-homomorfizam $\phi : A \to B$ potpuna kontrakcija. Naime, $\phi_n : \mathrm{M}_n(A) \to \mathrm{M}_n(B)$ $(n \in \mathbb{N})$ je također $*$-homomorfizam, pa je kao takav kontrakcija. Nadalje, ako je ϕ injektivan, tada je on potpuna izometrija (jer su svi ϕ_n injektivni $*$-homomorfizmi, dakle izometrični). Također istaknimo da su za homomorfizam $\phi : A \to B$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) ϕ je kontrakcija;

(ii) ϕ je potpuna kontrakcija;

(iii) ϕ je $*$-homomorfizam.

Propozicija 2.1.5 Neka je X operatorski prostor.

(i) Svaki ograničen linearni funkcional $\varphi \in X^*$ je potpuno ograničen i vrijedi $\|\varphi\|_{cb} = \|\varphi\|$.

(ii) Općenitije, ako je A komutativna C*-algebra tada je svaki ograničen linearni operator $\phi : X \to A$ potpuno ograničen i vrijedi $\|\phi\|_{cb} = \|\phi\|$.

(iii) Također, svaki ograničen linearni operator $\phi : X \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ je potpuno ograničen i za njegovu cb-normu vrijedi

$$\|\phi\|_{cb} = \|\phi\|_n \le n\|\phi\|.$$

$\square$

Napomena 2.1.6 Neka je $X \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$ operatorski prostor.

(R1) $\mathrm{M}_n(X)$ je Banachov $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$-bimodul, uz očita djelovanja. Drugim riječima, vrijedi

$$\|S\mathbf{x}T\|_n \le \|S\|\|\mathbf{x}\|_n\|T\| \quad (S, T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathbf{x} \in \mathrm{M}_n(X)).$$

(R2) Za sve $\mathbf{x} \in \mathrm{M}_m(X)$ i $\mathbf{y} \in \mathrm{M}_n(X)$ vrijedi

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x} & 0 \\ 0 & \mathbf{y} \end{bmatrix} \right\|_{m+n} = \max\{\|\mathbf{x}\|_n, \|\mathbf{y}\|_n\}.$$

često ćemo gornju matricu označavati s $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$.

Istaknimo sada neke posljedice prethodne napomene.

- Iz (R1) slijedi da zamjenom redova ili stupaca ne mijenjamo normu matrice iz $\mathrm{M}_n(X)$. Općenitije, ako je $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ unitarna matrica tada za $\mathbf{x} \in \mathrm{M}_n(X)$ imamo
$$\|U\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| = \|U^*U\mathbf{x}\| \leq \|U\mathbf{x}\|.$$

- Dodavanjem (brisanjem) nul-redova ili nul-stupaca ne mijenjamo normu matrice iz $\mathrm{M}_n(X)$. Specijalno, norme $\|\cdot\|_{m,n}$ pravokutnih matrica nije potrebno specificirati, budući da na $\mathrm{M}_{m,n}(X)$ možemo gledati kao na potprostor od $\mathrm{M}_r(X)$, gdje je $r = \max\{m, n\}$.

- Ako su $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathrm{R}_n(X)$ i $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^\tau \in \mathrm{C}_n(X)$ tada je prema C*-identitetu
$$\|[x_1, \dots, x_n]\| = \left\| \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i x_i^* \right\|^{\frac{1}{2}},$$
$$\|[y_1, \dots, y_n]^\tau\| = \left\| \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n y_i^* y_i \right\|^{\frac{1}{2}}.$$

- Ako je X operatorski prostor tada su kanonski izomorfizmi
$$\mathrm{M}_n(\mathrm{M}_m(X)) \cong \mathrm{M}_m(\mathrm{M}_n(X)) \cong \mathrm{M}_{mn}(X)$$
izometrije.

- Ako je X operatorski prostor tada i $\mathrm{M}_n(X)$ postaje operatorski prostor ako ga opskrbimo sa strukturom operatorskog prostora s obzirom na koju su kanonski izomorfizmi $\mathrm{M}_m(\mathrm{M}_n(X)) \cong \mathrm{M}_{mn}(X)$ izometrije.

- Ako je $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ i $[\alpha_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, tada je $\|[\alpha_{i,j}T]\| = \|[\alpha_{i,j}]\|\|T\|$. Specijalno, za matricu $[x_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(X)$ imamo
$$\max_{1\leq i,j\leq n} \|x_{i,j}\| \leq \|[x_{i,j}]\|_n \leq n \max_{1\leq i,j\leq n} \|x_{i,j}\|,$$
odakle slijedi da niz matrica (x_k) u $\mathrm{M}_n(X)$ konvergira prema matrici x ako i samo ako (i,j)-ta vrijednost od x_k konvergira prema (i,j)-toj vrijednosti od x.

Primjer 2.1.7 Kanonski primjer ograničenog operatora koji nije potpuno ograničen je operator transponiranja $\phi : x \mapsto x^\tau$ na C*-algebri $\mathrm{K}(\ell^2)$ svih kompaktnih operatora na (separabilnom) Hilbertovom prostoru ℓ^2, pri čemu operator $x \in \mathrm{K}(\ell^2)$ poistovjećujemo s beskončnom matricom $[x_{i,j}]$, gdje je $x_{i,j} := \langle x\vec{e_j}, \vec{e_i}\rangle$ $(i,j \in \mathbb{N})$ i $(\vec{e_i})$ kananoska ortonormirana baza za ℓ^2. Kako bi to dokazali, najprije primijetimo da je ϕ izometrički linearni $*$-antiizomorfizam. Zaista, za vektore $\vec{z} = (z_i)$, $\vec{w} = (w_i) \in \mathrm{Ball}(\ell^2)$ imamo

$$|\langle \phi(x)\vec{z}, \vec{w}\rangle| = \Big|\sum_{i,j=1}^{\infty} x_{j,i} z_j \overline{w_i}\Big| = \Big|\sum_{i,j=1}^{\infty} x_{i,j} \overline{w_i} z_j\Big| \le \|[x_{i,j}]\|,$$

pa je ϕ kontrakcija. Nadalje, budući da je ϕ simetrija ($\phi^{-1} = \phi$) ona je i izometrija. Za fiksno $n \in \mathbb{N}$ neka su $(e_{i,j})$ standarne matrične jedinice za $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ i sa $\rho : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{K}(\ell^2)$ označimo ulaganje u gornji lijevi kut (tj. $\rho(x) := x \oplus 0$). Primijetimo da je ρ injektivni $*$-homomorfizam, dakle potpuna izometrija. Stavimo $x_n := [e_{j,i}] \in \mathrm{M}_n(\mathrm{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ i neka je $y_n := \rho_n(x) = [\rho(e_{j,i})] \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Npr. za $n = 2$ imamo

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada je x_n permutaciona matrica, pa je

$$\|y_n\|_n = \|\rho_n(x_n)\|_n = \|x_n\| = 1.$$

S druge strane,

$$\phi_n(y_n) = [\phi\rho(e_{j,i})] = [\rho(e_{i,j})] = \rho_n([e_{i,j}]),$$

pa je $\|\phi_n(y_n)\|_n = \|[e_{i,j}]\|$. Brisanjem nul-redaka i nul-stupaca vdimo da je

$$\|[e_{i,j}]\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\| = n,$$

gdje zadnja jednakost slijedi korištenjem C*-identiteta. Dakle $\|\phi_n\| \ge \|\phi_n(y_n)\|_n \ge n$, a kako je $n \in \mathbb{N}$ bio proizvoljan, zaključujemo da $\phi \notin \mathrm{CB}(\mathrm{K}(\ell^2))$.

Uvjeti (R1) i (R2) iz napomene 2.1.6 zovu se *Ruanovi aksiomi.* Ruanov teorem govori da uvjeti (R1) i (R2) karakteriziraju operatorsku strukturu na vektorskom prostoru. Preciznije, vrijedi

Teorem 2.1.8 (Ruan) Neka je X vektorski prostor i pretpostavimo da je za svako $n \in \mathbb{N}$ dana potpuna norma na $\mathrm{M}_n(X)$ koja zadovoljava (R1) i (R2). Tada je X potpuno izometrički izomorfan konkretnom operatorskom prostoru, tj. postoji Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ i zatvoren potprostor $Y \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$ takav da je $X \cong Y$ (potpuno izometrički).

□

Dokaz Ruanovog teorema može se naći npr. u [27].

Napomena 2.1.9 Direktna posljedica Ruanovog teorema je da su apstraktni operatorski prostori točno oni vektorski prostori X čije matrične norme zadovoljavaju (R1) i (R2).

Osim što je Ruanov teorem od velikog teorijskog značaja, on nam također omogućuje mnoge konstrukcije u kategoriji operatorskih prostora. Mi ćemo istaknuti samo jednu takvu konstrukciju.

Napomena 2.1.10 Neka je X operatorski prostor i $Y \subseteq X$ njegov zatvoren potprostor. Tada matrični prostor $\mathrm{M}_n(X/Y)$ možemo opskrbiti sa normom koja dolazi iz identifikacije $\mathrm{M}_n(X/Y) \cong \mathrm{M}_n(X)/\mathrm{M}_n(Y)$, pri čemu je $\mathrm{M}_n(X)/\mathrm{M}_n(Y)$ snabdjeven s kvocijentnom normom. Eskplicitno, za $[x_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(X)$ imamo

$$\|[x_{i,j} + Y]\|_n = \inf\{\|[x_{i,j} - y_{i,j}]\|_n : \ y_{i,j} \in Y\}.$$

Tada nije teško provjeriti da ovako definirane matrične norme zadovoljavaju Ruanove aksiome. Dakle, X/Y je operatorski prostor. Nadalje, primijetimo da je po definiciji matričnih normi (kanonski) kvocijentni operator $q : X \to X/Y$ potpuno kvocijentni operator.

U teoriji operatorskih algebri bitnu ulogu igraju i tzv. potpuno pozitivni operatori.

Definicija 2.1.11 Neka su A i B C^*-algebre. Za linearni operator $\phi : A \to B$ kažemo da je *potpuno pozitivan* ukoliko su svi inducirani operatori $\phi_n : \mathrm{M}_n(A) \to \mathrm{M}_n(B)$ pozitivni, tj. ako vrijedi $\phi_n([a_{i,j}]) \in \mathrm{M}_n(B)_+$ za sve $[a_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(A)_+$

Iz teorije potpuno pozitivnih operatora mi ćemo samo koristiti sljedeći jednostavan rezultat:

Propozicija 2.1.12 Neka su A i B unitalne C^*-algebre. Ako je $\phi : A \to B$ potpuno pozitivan operator, tada je on i potpuno ograničen, te vrijedi

$$\|\phi\|_{cb} = \|\phi\| = \|\phi(1)\|.$$

□

Na kraju ove točke istaknimo da za razliku od općih ograničenih operatora, potpuno pozitivni i potupno ograničeni operatori dijele niz dobrih svojstava. Među njima su posebno istaknuti tzv. Stinespringov teorem o reprezentaciji pozitivnog (odnosno potpuno ograničenog) operatora, te Arvesonov i Wittstockov teorem o proširenju potpuno pozitivnog (odnosno potpuno ograničenog) operatora. Svi ti rezultati (kao i mnogi drugi) mogu se naći npr. u [27] i [54].

2.2 Haagerupov tenzorski produkt

Kao što znamo, multilinearna preslikavanja možemo linearizirati tako da prijeđemo na tenzorski produkt, a odgovarajuću tenzorsku normu biramo tako ona da bude kompatibilna s uvjetima neprekidnosti danih preslikavanja. U slučaju potpuno ograničenih multilinearnih preslikavanja odgovarajući tenzorski produkt je Haagerupov tenzorski produkt.

Neka su X i Y operatorski prostori. Za $\mathbf{x} = [x_{i,j}] \in \mathrm{M}_{m,r}(X)$ i $\mathbf{y} = [y_{i,j}] \in \mathrm{M}_{r,n}(Y)$ definiramo

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} := \left[\sum_{k=1}^{r} x_{i,k} \otimes y_{k,j} \right] \in \mathrm{M}_{m,n}(X \otimes Y). \tag{2.2}$$

Primijetimo da za svaku matricu $S \in \mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ vrijedi

$$(\mathbf{x} \cdot S) \odot \mathbf{y} = \mathbf{x} \odot (S \cdot \mathbf{y}). \tag{2.3}$$

Definicija 2.2.1 Neka su X i Y operatorski prostori. *Haagerupova norma* $\|\cdot\|_h$ na $X \otimes Y$ definirana je s

$$\begin{aligned} \|t\|_h : &= \inf\{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| : \ t = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}, \ \mathbf{x} \in \mathrm{R}_n(X), \ \mathbf{y} \in \mathrm{C}_n(X)\} & (2.4) \\ &= \inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i^* y_i \right\|^{\frac{1}{2}} : \ t = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}. & (2.5) \end{aligned}$$

Napomenimo da na prvi pogled nije jasno da je $\|\cdot\|_h$ zaista norma na $X \otimes Y$. Ipak, vrijedi:

Propozicija 2.2.2 Ako su X i Y operatorski prostori tada je $\|\cdot\|_h$ norma na $X \otimes Y$.

□

U dokazu prethodne propozicije koristi se sljedeća tvrdnja koja ukratko kaže da se infimum u (2.4) postiže.

Lema 2.2.3 Ako su X i Y operatorski prostori, te $t \in X \otimes Y$, $t \neq 0$. Tada postoje $\mathbf{x} \in \mathrm{R}_n(X)$ i $\mathbf{y} \in \mathrm{C}_n(Y)$ takve da je

$$t = \mathbf{x} \odot \mathbf{y} \quad \text{i} \quad \|t\|_h = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

Štoviše, matrice $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ možemo izabrati tako da su njihove komponente linearno nezavisne.

□

Definicija 2.2.4 Ako su X i Y operatorski prostori tada normirani prostor $(X \otimes Y, \|\cdot\|_h)$ označavamo s $X \otimes^h Y$. Njegovo upotpunjenje zovemo *Haagerupov tenzorski produkt* od X i Y i označavamo ga s $X \otimes_h Y$.

U ovoj radnji ćemo također koristiti i sljedeći rezultat, čiji se dokaz može naći npr. u [19]:

Lema 2.2.5 Neka su X i Y operatorski prostori. Tada za svako $n, d \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ postoji konstanta $C(\varepsilon, n, d)$ koja ovisi samo o tim varijablama (ali ne o X i Y) sa sljedećim svojstvom: Ako su $\mathbf{x} \in \mathrm{R}_n(X)$ i $\mathbf{y} \in \mathrm{C}_n(Y)$ s $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \le d$ i ako je $\|\mathbf{x} \odot \mathbf{y}\|_h \le 1$, tada postoji invertibilna matrica $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ takva da je $\|S\|, \|S^{-1}\| \le C(\varepsilon, n, d)$ i

$$\|\mathbf{x} \cdot S^{-1}\|, \|S \cdot \mathbf{y}\| \le 1 + \varepsilon.$$

□

Ako su X i Y operatorski prostori tada možemo uvesti norme $\|\cdot\|_{h,n}$ na $\mathrm{M}_n(X \otimes Y)$ tako da stavimo

$$\|\mathbf{t}\|_{h,n} := \inf\{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| : \ \mathbf{x} \in \mathrm{M}_{n,k}(X), \ \mathbf{y} \in \mathrm{M}_{k,n}(Y), \mathbf{t} = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}\} \quad (\mathbf{t} \in \mathrm{M}_n(X \otimes Y)).$$

Ako je $t_{i,j}$ (i,j)-ta vrijednost od $\mathbf{t}$, te ako su $\mathbf{x}_i \in \mathrm{R}_k(X)$ i $\mathbf{y}_j \in \mathrm{C}_k(Y)$ redom i-ti redak od $\mathbf{x}$ i j-ti stupac od $\mathbf{y}$ tada je

$$t_{i,j} = \mathbf{x}_i \odot \mathbf{y}_j,$$

pa je $\|t_{i,j}\|_{h,n} \le \|\mathbf{x}_i\|\|\mathbf{y}_j\|$, odakle slijedi da je

$$\|t_{i,j}\|_{h,n} \le \|\mathbf{t}\|_h.$$

Specijalno, $\|\mathbf{t}\|_h = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{t} = 0$. Također nije teško vidjeti da je $\|\cdot\|_{h,n}$ zaista norma na $\mathrm{M}_n(X \otimes Y)$. Slično kao i prije, normirani prostor $(\mathrm{M}_n(X \otimes Y), \|\cdot\|_{h,n})$ označavamo s $\mathrm{M}_n(X \otimes^h Y)$, a njegovo upotpunjenje s $\mathrm{M}_n(X \otimes_h Y)$. Nije teško provjeriti da norme $\|\cdot\|_{h,n}$ $(n \in \mathbb{N})$ zadovoljavaju Ruanove aksiome (R1) i (R2) (napomena 2.1.6). Prema Ruanovom teoremu (teorem 2.1.8) imamo

Propozicija 2.2.6 Ako su X i Y operatorski prostori tada je i $X \otimes_h Y$ operatorski prostor.

□

Kao što smo već napomenuli, Haagerupov tenzorski produkt linearizira potpuno ograničene bilinearne operatore.

Definicija 2.2.7 Neka su X, Y i Z operatorski prostori i neka je $\Phi : X \times Y \to Z$ bilinearni operator. Za svako $n \in \mathbb{N}$ definiramo n-te amplifikacije $\Phi_n : \mathrm{M}_n(X) \otimes \mathrm{M}_n(Y) \to \mathrm{M}_n(Z)$ s

$$\Phi_n([x_{i,j}], [y_{i,j}]) := \Big[\sum_{k=1}^{n} \Phi(x_{i,k}, y_{k,j})\Big].$$

Kažemo da je Φ *potpuno ograničen bilinearni operator* ukoliko je

$$\|\Phi\|_{cb} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Phi_n\| < \infty$$

i u tom slučaju za $\|\Phi\|_{cb}$ kažemo da je *cb*-norma od Φ. Nadalje, za Φ kažemo da je potpuna kontrakcija ako je $\|\Phi\|_{cb} \leq 1$. Skup svih potpuno ograničenih bilinearnih operatora s $X \times Y$ u Z označavamo s $\mathrm{CB}(X \times Y, Z)$.

Napomena 2.2.8 Analogno se definira pojam potpuno ograničenog multilinearnog operatora $\Phi : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$, gdje su $X_1, \ldots, X_n$ i Y operatorski prostori.

Primjer 2.2.9 Neka su X i Y operatorski prostori te $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Ako su $\phi : X \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ i $\psi : Y \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ potpuno ograničeni operatori tada je s

$$\Phi : X \times Y \to \mathrm{B}(\mathcal{H}), \quad \Phi(x, y) := \phi(x)\psi(y)$$

definiran potpuno ograničen bilinearni operator. Zaista, za matrice $[x_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(X)$ i $[y_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(Y)$ imamo

$$\left\| \left[\sum_{k=1}^{n} \phi(x_{i,k})\psi(y_{k,j}) \right] \right\|_n \leq \|[\phi(x_{i,j})]\|_n \|[\psi(y_{i,j})]\|_n \leq \|\phi\|_{cb} \|\psi\|_{cb} \|[x_{i,j}]\|_n \|[y_{i,j}]\|_n,$$

budući da je $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ Banachova algebra.

Neka su X, Y i Z operatorski prostori. Prema univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta, za svaki bilinearni operator $\Phi : X \times Y \to Z$ postoji jedinstven linearni operator $\Phi_* : X \otimes Y \to Z$ takav da vrijedi

$$\Phi_*(x \otimes y) = \Phi(x, y) \quad (x \in X, y \in Y). \tag{2.6}$$

Ako je $(\Phi_*)_n : \mathrm{M}_n(X \otimes Y) \to \mathrm{M}_n(Z)$ n-ta amplifikacija od Φ_*, tada primijetimo da je

$$\Phi_n(x, y) = (\Phi_*)_n(x \odot y) \quad (\mathbf{x} \in \mathrm{M}_n(X),\ \mathbf{y} \in \mathrm{M}_n(Y)). \tag{2.7}$$

Propozicija 2.2.10 Neka su X, Y i Z operatorski prostori. Bilinearni operator $\Phi : X \times Y \to Z$ je potpuno ograničen ako i samo ako je operator $\Phi_* : X \otimes^h Y \to Z$ potpuno ograničen. U tom slučaju vrijedi $\|\Phi_*\|_{cb} = \|\Phi\|_{cb}$ i Φ_* se na jedinstven način proširuje do potpuno ograničenog operatora $X \otimes_h Y \to Z$ (kojeg također označavamo s Φ_*). Dakle, preslikavanje $\Phi \mapsto \Phi_*$ definira izometrički izomorfizam

$$\mathrm{CB}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{CB}(X \otimes_h Y, Z).$$

□

Korolar 2.2.11 Neka su X i Y operatorski prostori. Bilinearni funkcional $\Phi : X \times Y \to \mathbb{C}$ je potpuno ograničen ako i samo ako je inducirani linearni funkcional $\Phi_* : X \otimes_h Y \to \mathbb{C}$ ograničen. U tom slučaju imamo $\|\Phi_*\| = \|\Phi\|_{cb}$. Dakle, preslikavanje $\Phi \mapsto \Phi_*$ definira izometrički izomorfizam

$$\mathrm{CB}(X \times Y, \mathbb{C}) \cong (X \otimes_h Y)^*.$$

□

Napomena 2.2.12 Iz korolara 2.2.11 slijedi da dual $(X \otimes_h Y)^*$ možemo identificirati s prostorom potpuno ograničenih bilinearnih funkcionala na $X \times Y$.

Dokazi tih rezultata, kao i mnogi drugi rezultati vezani uz potpuno ograničene multilinearne operatore, mogu se naći npr. u [62].

Također istaknimo još neka bitna svojstva Haagerupovog tenzorskog produkta koja ćemo koristiti u ovoj radnji.

Teorem 2.2.13 Haagerupov tenzorski produkt je *funktorijalan*, tj. ako su $\phi_1 : X_1 \to Y_1$ i $\phi_2 : X_2 \to Y_2$ potpuno ograničeni operatori između operatorskih prostora, tada je i inducirani operator $\phi_1 \otimes \phi_2 : X_1 \otimes_h X_2 \to Y_1 \otimes_h Y_2$ potpuno ograničen i vrijedi

$$\|\phi_1 \otimes \phi_2\|_{cb} \leq \|\phi_1\|_{cb}\|\phi_2\|_{cb}.$$

Specijalno, ako su ϕ_1 i ϕ_2 potpune kontrakcije onda je i $\phi_1 \otimes \phi_2$ potpuna kontrakcija. Nadalje, vrijedi

(i) Haagerupov tenzorski produkt je *injektivan*. Drugim riječima, ako su ϕ_1 i ϕ_2 potpune izometrije tada je i $\phi_1 \otimes \phi_2$ potpuna izometrija.

(ii) Haagerupov tenzorski produkt je *projektivan*. Drugim riječima, ako su ϕ_1 i ϕ_2 potpuno kvocijentni operatori tada je i $\phi_1 \otimes \phi_2$ potpuno kvocijentni operator.

□

Ako je A C*-algebra i $X \subseteq A$ operatorski prostor tada definiramo

$$\mathrm{R}_\infty(X) := \left\{ \mathbf{x} := [x_1, x_2, \ldots] : \sum_{i=1}^{\infty} x_i x_i^* \text{ konvergira u normi od } X \right\}$$

te

$$\mathrm{C}_\infty(X) := \left\{ \mathbf{y} := [y_1, y_2, \ldots]^\tau : \sum_{i=1}^{\infty} y_i^* y_i \text{ konvergira u normi od } X \right\}$$

Za $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots] \in \mathrm{R}_\infty(X)$ i $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots]^\tau \in \mathrm{C}_\infty(X)$ stavljamo

$$\|\mathbf{x}\| := \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i x_i^* \right\|^{\frac{1}{2}} \quad \text{i} \quad \|\mathbf{y}\| := \left\| \sum_{i=1}^{\infty} y_i^* y_i \right\|^{\frac{1}{2}}.$$

Ako je B (neka druga) C*-algebra i $Y \subseteq B$ operatorski prostor, tada za $\mathbf{x} \in \mathrm{R}_\infty(X)$ i $\mathbf{y} \in \mathrm{C}_\infty(Y)$ definiramo

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i. \tag{2.8}$$

Primijetimo da je $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \in X \otimes_h Y$, budući da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ $m \geq n$ imamo

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} x_i \otimes y_i \right\|_h \leq \left\| \sum_{i=n}^{m} x_i x_i^* \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=n}^{m} y_i^* y_i \right\|^{\frac{1}{2}}.$$

Definicija 2.2.14 Neka je A C*-algebra, neka su $V \subseteq X \subseteq A$ operatorski prostori i $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots]^\tau \in \mathrm{C}_\infty(X)$. Kažemo da su komponente od $\mathbf{y}$ *jako nezavisne nad* V ako za svaki niz $\vec{\lambda} := (\lambda_i) \in \ell^2$ iz

$$\vec{\lambda} \cdot \mathbf{y} := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i = 0$$

slijedi $\lambda_i = 0$ za sve $i \in \mathbb{N}$. Ako je $V = \{0\}$, onda samo kažemo da su komponente od $\mathbf{y}$ *jako nezavisne*. Analogno definiramo pojam jake nezavisnosti (nad V) za elemente $\mathbf{x} \in \mathrm{R}_\infty(X)$.

Imamo sljedeći bitan rezultat o reprezentaciji tenzora iz $X \otimes_h Y$:

Teorem 2.2.15 Neka su A i B C*-algebre, $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$ operatorski prostori, te $t \in X \otimes_h Y$ s $\|t\|_h < 1$.

(i) Postoje matrice $\mathbf{x} \in \mathrm{R}_\infty(X)$ i $\mathbf{y} \in \mathrm{C}_\infty(Y)$ takve da je

$$t = \mathbf{x} \odot \mathbf{y} \quad \text{i} \quad \|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| < 1.$$

(ii) Štoviše, ako je V zatvoren potprostor od Y, tada postoji particija $\mathbb{N} = N_1 \sqcup N_1$ i reprezentacija

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i,$$

takva da vrijedi

(a) $y_i \in V$ za $i \in N_1$;

(b) komponente od $[y_i]_{i \in N_2}$ su jako nezavisne nad V.

Specijalno (za $V = \{0\}$), postoje $\mathbf{x} \in \mathrm{R}_\infty(X)$ i $\mathbf{y} \in \mathrm{C}_\infty(Y)$ takve da je $t = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ s $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| < 1$, pri čemu su komponente od $\mathbf{y}$ jako nezavisne.

$\square$

Propozicija 2.2.16 Neka su A i B C*-algebre, te $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$ operatorski prostori. Pretpostavimo da su $\mathbf{x} \in \mathrm{R}_\infty(A)$ i $\mathbf{y} \in \mathrm{C}_\infty(B)$ takve da je $t := \mathbf{x} \odot \mathbf{y} \in X \otimes_h Y$.

(i) Ako su komponente od $\mathbf{x}$ jako nezavisne tada su sve komponente od $\mathbf{y}$ elementi iz Y.

(ii) Ako su komponente od $\mathbf{y}$ jako nezavisne tada su sve komponente od $\mathbf{x}$ elementi iz X.

$\square$

Koristeći prethodnu propoziciju, nije teško dokazati sljedeće bitno svojstvo Haagerupovog tenzorskog produkta:

Teorem 2.2.17 Neka su $\phi_i : X_i \to Y_i$ $(1 \leq i \leq 2)$ potpuno ograničeni operatori između operatorskih prostora. Ako su $Z_i \subseteq Y_i$ $(1 \leq i \leq 2)$ zatvoreni potprostori, tada vrijedi

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)^{-1}(Z_1 \otimes_h Z_2) = \ker \phi_1 \otimes_h X_2 + \phi_1^{-1}(Z_1) \otimes_h \phi_2^{-1}(Z_2) + X_1 \otimes_h \ker \phi_2. \quad (2.9)$$

$\square$

Istaknimo sljedeće dvije direktne posljedice teorema 2.2.17 i teorema 2.2.13:

Korolar 2.2.18 Neka su $Y_i \subseteq X_i$ operatorski prostori, $q_i : X_i \to X_i/Y_i$ kvocijentni operatori $(1 \leq i \leq 2)$ i $q_1 \otimes q_2 : X_1 \otimes_h X_2 \to (X_1/Y_1) \otimes_h (X_2/Y_2)$ inducirani operator. Tada je

$$\ker(q_1 \otimes q_2) = Y_1 \otimes_h X_2 + X_1 \otimes_h Y_2.$$

Nadalje, imamo potpuni izometrički izomorfizam operatorskih prostora

$$(X_1 \otimes_h X_2)/(Y_1 \otimes_h X_2 + X_1 \otimes_h Y_2) \cong (X_1/Y_1) \otimes_h (X_2/Y_2).$$

$\square$

Korolar 2.2.19 Ako su $q_i : X_i \to X_i/Y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ kvocijentni operatori operatorskih prostora i Z zatvoren potrostor od $X_1 \otimes_h X_2$ koji sadrži $Y_1 \otimes_h X_2 + X_1 \otimes_h Y_2$, tada je $(q_1 \otimes q_2)(Z)$ zatvoren potprostor od $(X_1/Y_1) \otimes_h (X_2 \otimes_h Y_2)$ i vrijedi

$$(q_1 \otimes q_2)^{-1}((q_1 \otimes q_2)(Z)) = Z.$$

$\square$

2.3 Banachova algebra $A \otimes_h B$

Neka su A i B C*-algebre. Tada njihov algebarski tenzorski produkt $A \otimes B$ dobiva strukturu algebre uz množenje definirano na elementarnim tenzorima s

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) := (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2), \quad a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B.$$

Štoviše, s obzirom na tu operaciju $A \otimes_h B$ postaje Banachova algebra. Preciznije, vrijedi:

Propozicija 2.3.1 Neka su A i B C*-algebre. Tada je Haagerupova norma tenzorska i submultiplikativna, tj. vrijedi

$$\|a \otimes b\|_h = \|a\|\|b\| \quad \text{i} \quad \|tu\|_h \leq \|t\|_h \|u\|_h \quad (a \in A,\ b \in B,\ t, u \in A \otimes^h B).$$

Specijalno, upotpunjeni Haagerupov tenzorski produkt dviju C*-algebri je Banachova algebra.

□

Napomena 2.3.2 Općenito Haagerupov tenzorski produkt $A \otimes_h B$ C*-algebri A i B nije C*-algebra, osim u trivijalnom slučaju kada je $A = \mathbb{C}$ ili $B = \mathbb{C}$. Dokaz te činjenice može se naći u [17].

Budući da je za C*-algebre A i B Haagerupov tenzorski produkt $A \otimes_h B$ Banacohva algebra, ima smisla govoriti o njegovoj strukturi ideala. Analiza strukture ideala od $A \otimes_h B$ je detaljno provedena u [4] (također vidjeti i [11]). Mi ćemo samo iskazati osnovne rezultate iz tog članka koje ćemo koristiti. Najprije iskažimo reformulaciju korolara 2.2.18 i 2.2.19 za C*-slučaj.

Teorem 2.3.3 Neka su A i B C*-algebre, $I \in \mathrm{Id}(A)$ i $J \in \mathrm{Id}(B)$, te neka su redom $q_I : A \to A/I$ i $q_J : A \to A/J$ kvocijentna preslikavanja.

(i)
$$\ker(q_I \otimes q_J) = I \otimes_h B + A \otimes_h J.$$

Nadalje, ako je K zatvoren obostrani ideal u $A \otimes_h B$ koji sadrži $I \otimes_h B + A \otimes_h J$, tada je ideal $(q_I \otimes q_J)(K)$ zatvoren i

$$(q_I \otimes q_J)^{-1}(q_I \otimes q_J)(K) = K.$$

(ii)
$$\ker(\mathrm{id}_A \otimes q_J) = A \otimes_h J.$$

Nadalje, ako je K zatvoren obostrani ideal u $A \otimes_h B$ koji sadrži $A \otimes_h J$, tada je ideal $\mathrm{id}_A \otimes q_J)(K)$ zatvoren i

$$(\mathrm{id}_A \otimes q_J)^{-1}(\mathrm{id}_A \otimes q_J)(K) = K.$$

(iii)
$$\ker(q_I \otimes \mathrm{id}_B) = I \otimes_h B.$$

Nadalje, ako je K zatvoren obostrani ideal u $A \otimes_h B$ koji sadrži $I \otimes_h B$, tada je ideal $(q_I \otimes \mathrm{id}_B)(K)$ zatvoren i

$$(q_I \otimes \mathrm{id}_B)^{-1}(q_I \otimes \mathrm{id}_B)(K) = K.$$

□

Kao i u slučaju C*-algebri, pod idealom u $A \otimes_h B$ smatramo zatovren obostrani ideal, te s $\mathrm{Id}(A \otimes_h B)$ označavamo skup svih ideala u $A \otimes_h B$. Za ideal $K \in \mathrm{Id}(A \otimes_h B)$ kažemo da je *produktni ideal* ako postoje ideali $I \in \mathrm{Id}(A)$ i $J \in \mathrm{Id}(B)$ takvi da vrijedi $K = I \otimes_h J$.

Teorem 2.3.4 Neka su A i B C*-algebre.

(i) Konačna algebarska suma produktnih ideala u $A \otimes_h B$ je (zatvoren) ideal u $A \otimes_h B$. Drugim riječima, ako su $I_1, \ldots, I_n \in \mathrm{Id}(A)$ i $J_1, \ldots, J_n \in \mathrm{Id}(B)$ tada je njihova algebarska suma $\sum_{i=1}^{n} I_i \otimes_h J_i$ (zatvoren) ideal u $A \otimes_h B$

(ii) Ako je $K \in \mathrm{Id}(A \otimes_h B)$ koji nije nul-ideal, tada postoje $a \in A$ i $b \in B$ takvi da je $a, b \neq 0$ i $a \otimes b \in K$. Dakle, K sadrži netrivijalan produktni ideal.

□

Za ideal $K \in \mathrm{Id}(A \otimes_h B)$ kažemo da je primitivan, ako je on jezgra neke ireducibilne $*$-reprezentacije od $A \otimes_h B$. Pod *$*$-reprezentacijom* od $A \otimes_h B$ smatramo ograničeni homomorfizam algebri $\pi : A \otimes_h B \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ (gdje je $\mathcal{H}_\pi$ Hilbertov prostor) za kojeg vrijedi

$$\pi(a^* \otimes b^*) = \pi(a \otimes b)^* \quad (a \in A,\ b \in B).$$

Ako je njena slika $\pi(A \otimes_h B)$ ultraslabo gusta u $\mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ onda kažemo da je π *ireducibilna*. Skup svih primitivnih ideala u $A \otimes_h B$ označavamo s $\mathrm{Prim}(A \otimes_h B)$.

Napomena 2.3.5 U [4] je pokazano da je $*$-reprezentacija π od $A \otimes_h B$ ireducibilna ako i samo ako postoje reprezentacije (C*-algebri) π_1 od A i π_2 od B na $\mathcal{H}_\pi$ takve da vrijedi:

(i) $\pi(a \otimes b) = \pi_1(a)\pi_2(b) = \pi_2(b)\pi_1(a)$, za sve $a \in A,\ b \in B$;

(ii) bikomutanti $\pi_1(A)''$ i $\pi_2(B)''$ su faktori (tj. centar im je jednak $\mathbb{C}1_{\mathcal{H}_\pi}$);

(iii) algebra $\pi_1(A)\pi_2(B)$ je ultrasabo gusta u $\mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$.

Teorem 2.3.6 Neka su A i B C*-algebre i neka je $K \in \mathrm{Id}(A \otimes_h B)$.

(i) Ideal K je maksimalan ako i samo ako postoje maksimalni ideali M u A i N u B takvi da je

$$K = M \otimes_h B + A \otimes_h N.$$

(ii) Ako je $K \in \mathrm{Prim}(A \otimes_h B)$ tada postoje prim ideali $P \in \mathrm{Prime}(A)$ i $Q \in \mathrm{Prime}(B)$ takvi da je

$$K = P \otimes_h B + A \otimes_h Q.$$

Nadalje, ako su $P \in \mathrm{Prim}(A)$ i $Q \in \mathrm{Prim}(B)$ tada je

$$P \otimes_h B + A \otimes_h Q \in \mathrm{Prim}(A \otimes_h B).$$

Specijalno, ako su A i B separabilne, imamo

$$\mathrm{Prim}(A \otimes_h B) = \{P \otimes_h B + A \otimes_h Q : \ P \in \mathrm{Prim}(A), \ Q \in \mathrm{Prim}(B)\}.$$

□

Definicija 2.3.7 Za ideal $K \in \mathrm{Id}(A \otimes_h B)$ kažemo da je *gornji* ako je on jednak presjeku primitivnih ideala koji ga sadrže.

Korolar 2.3.8 Ako su A i B C*-algebre, te $I \in \mathrm{Id}(A)$ i $J \in \mathrm{Id}(B)$ tada je ideal $I \otimes_h B + J \otimes_h B$ gornji. Štoviše,

$$I \otimes_h B + J \otimes_h B = \bigcap \{P \otimes_h B + A \otimes_h Q : \ P \in \mathrm{Prim}(A/I), \ Q \in \mathrm{Prim}(B/J).\} \quad (2.10)$$

Specijalno, $A \otimes_h B$ je poluprosta Banachova algebra, tj. presjek svih primitivnih ideala od $A \otimes_h B$ je nul-ideal.

Dokaz. Označimo desnu stranu od (2.10) s K. Očito je

$$I \otimes_h B + J \otimes_h B \subseteq K.$$

Pretpostavimo da je gornja inkluzija striktna, te neka su $q_I : A \to A/I$ i $q_J : B \to B/J$ pripadna kvocijentna preslikavanja. Prema teoremu 2.3.3 $(q_I \otimes q_J)(K)$ je netrivijalni ideal u $(A/I) \otimes_h (B/J)$, pa prema teoremu 2.3.4 (ii) on sadrži netrivijalni elementarni tenzor. Dakle, postoje $a \in A$ i $b \in B$ takvi da je

$$0 \neq q_I(a) \otimes q_J(b) \in (q_I \otimes q_J)(K).$$

Specijalno, $a \in A \setminus I$ i $b \in B \setminus J$ i $a \otimes b \in (q_I \otimes q_J)^{-1}((q_I \otimes q_J)(K)) = K$. Kako je svaki ideal C*-algebre jednak presjeku primitivnih ideala koji ga sadrže (propozicija 1.4.2) postoje $P \in \mathrm{Prim}(A/I)$ i $Q \in \mathrm{Prim}(B/J)$ takvi da $a \notin P$ i $b \notin Q$. Promotrimo kvocijentno preslikavanje

$$q_P \otimes q_Q : A \otimes_h B \to (A/P) \otimes_h (A/Q) \cong (A \otimes_h B)/(P \otimes_h B + A \otimes_h Q).$$

Kako je $a \otimes b \in K \subseteq P \otimes_h B + A \otimes_h Q$, to je

$$0 = (q_P \otimes q_Q)(a \otimes b) = q_P(a) \otimes q_Q(b),$$

odakle slijedi da je $a \in P$ ili $b \in Q$; kontradikcija. □

2.4 Kanonska kontrakcija $\Theta_A : M(A) \otimes_h M(A) \to \mathrm{ICB}(A)$

Posebno bitnu ulogu u ovoj radnji igrat će operatori koji čuvaju ideale od A. Takvi operatori se dobro ponašaju prema teoriji reprezentacija od A.

Definicija 2.4.1 Neka je A C*-algebra. Za linearni operator $\phi : A \to A$ kažemo da *čuva ideale* od A ukoliko vrijedi

$$\phi(J) \subseteq J \quad \text{za sve } J \in \mathrm{Id}(A).$$

S $\mathrm{IB}(A)$ i $\mathrm{ICB}(A)$ redom označavamo skup svih ograničenih i skup svih potpuno ograničenih operatora na A koji čuvaju ideale od A.

Napomena 2.4.2 Ako je $J \in \mathrm{Id}(A)$ i $q_J : A \to A/J$ kvocijentni $*$-epimorfizam, tada svaki operator $\phi \in \mathrm{IB}(A)$ inducira operator $\phi_J \in \mathrm{IB}(A/J)$ takav da sljedeći dijagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & A \\ {\scriptstyle q_J}\big\downarrow & & {\scriptstyle q_J}\big\downarrow \\ A/J & \xrightarrow{\phi_J} & A/J \end{array}$$

komutira. S Q_J označavamo preslikavanje $\mathrm{IB}(A) \to \mathrm{IB}(A/J)$ dano s $Q_J : \phi \mapsto \phi_J$.

Istaknimo neka osnovna svojstva operatora iz $\mathrm{IB}(A)$ (odnosno iz $\mathrm{ICB}(A)$).

Napomena 2.4.3 (i) Koristeći činjenicu da za svaki element $a \in A$ vrijedi $\|a\| = \sup\{\|q_P(a)\| : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\}$, nije teško provjeriti da za svaki $\phi \in \mathrm{IB}(A)$ vrijedi

$$\|\phi\| = \sup\{\|\phi_P\| : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\}. \tag{2.11}$$

Štoviše, ako je $\phi \in \mathrm{ICB}(A)$, tada slična formula vrijedi i za njegovu cb-normu:

$$\|\phi\|_{cb} = \sup\{\|\phi_P\|_{cb} : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\}. \tag{2.12}$$

Specijalno, ako je A n-subhomogena (definicija 1.10.12), tada iz (2.12) i propozicije 2.1.5 (iii) slijedi da je $\mathrm{ICB}(A) = \mathrm{IB}(A)$ i $\|\phi\|_{cb} \le n\|\phi\|$ za sve $\phi \in \mathrm{IB}(A)$.

(ii) Svaki operator $\phi \in \mathrm{IB}(A)$ je $Z(M(A))$-bimodularan, tj. vrijedi

$$\phi(za) = z\phi(a) \quad \text{za sve } z \in Z(M(A)) \text{ i } a \in A. \tag{2.13}$$

Zaista, ako je $P \in \mathrm{Prim}(A)$ tada prema Dauns-Hofmannovom teoremu imamo $q_P(za) = \Psi_A(z)(P)q_P(a)$. Kako je $\Psi_A(z)(P) \in \mathbb{C}$, slijedi

$$\begin{aligned} q_P(\phi(za)) &= \phi_P(q_P(za)) = \phi_P(\Psi_A(z)(P)q_P(a)) = \Psi_A(z)(P)\phi_P(q_P(a)) \\ &= \Psi_A(z)(P)q_P(\phi(a)) = q_P(z\phi(a)). \end{aligned}$$

Budući da je $P \in \mathrm{Prim}(A)$ bio proizvoljan, tvrdnja je dokazana.

Klasa operatora koji čuvaju ideale od A je dosta široka. Među njima su posebno istaknuti tzv. elementarni operatori koje dobivamo na sljedeći način:

Ako je $t \in M(A) \otimes M(A)$ s reprezentacijom $t = \mathbf{a} \odot \mathbf{b}$, gdje su $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_d] \in \mathrm{R}_d(M(A))$ i $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_d]^\tau \in \mathrm{C}_d(M(A))$, tada definiramo operator $\Theta_A(t) : A \to A$ s

$$\Theta_A(t)(x) := \sum_{i=1}^{d} a_i x b_i \quad (x \in A). \tag{2.14}$$

Definicija 2.4.4 Neka je A C*-algebra. Za operator $T : A \to A$ kažemo da je *elementarni operator* na A ako postoji $t \in M(A) \otimes M(A)$ takav da je $T = \Theta_A(t)$. Skup svih elementarnih operatora na A označavamo s $\mathrm{E}(A)$. Za $T \in \mathrm{E}(A)$ definiramo *duljinu* $\ell(T)$ od T kao najmanji rang tenzora t za kojeg vrijedi $T = \Theta_A(t)$.

Napomena 2.4.5 Očito je $\mathrm{E}(A) \subseteq \mathrm{IB}(A)$. Štoviše, primijetimo da je svaki elementarni operator potpuno ograničen s

$$\|\Theta_A(t)\|_{cb} \leq \|t\|_h \quad (t \in A \otimes A).$$

Zaista, ako je $t = \mathbf{a} \odot \mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \in \mathrm{R}_d(M(A))$, $\mathbf{b} \in \mathrm{C}_d(M(A))$), te ako za $x \in A$ i $k \in \mathbb{N}$ s $\mathbf{x}^{(k)}$ označimo dijagonalnu matricu iz $\mathrm{M}_k(A)$ čije su sve vrijednosti na dijagonali jednake x, tada najprije dobivamo

$$\|\Theta_A(t)(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{d} a_i x b_i \right\| = \|\mathbf{a}\mathbf{x}^{(d)}\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{x}^{(d)}\|\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\|x\| \leq \|t\|_h\|x\|. \tag{2.15}$$

Nadalje, neka je $n \in \mathbb{N}$. Budući da vrijedi jednakost multiplikatorskih algebri $M(\mathrm{M}_n(A)) = \mathrm{M}_n(M(A))$, primijetimo da za inducirani operator $\Theta_A(t)_n : \mathrm{M}_n(A) \to \mathrm{M}_n(A)$ vrijedi

$$\Theta_A(t)_n = \Theta_{\mathrm{M}_n(A)}([\mathbf{a}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{a}_d^{(n)}] \odot [\mathbf{b}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{b}_d^{(n)}]^\tau) \in \mathrm{E}(\mathrm{M}_n(A)),$$

pa iz (2.15) slijedi

$$\|(\Theta_A(t))_n\| \leq \|[\mathbf{a}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{a}_d^{(n)}]\|\|[\mathbf{b}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{b}_d^{(n)}]^\tau\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \leq \|t\|_h.$$

Kako je $\|\Theta_A(t)\|_{cb} \leq \|t\|_h$ za sve $t \in M(A) \otimes M(A)$, s $\Theta_A : t \mapsto \Theta_A(t)$ je definirana kontrakcija s $M(A) \otimes^h M(A)$ u $\mathrm{ICB}(A)$, pa ju možemo po neprekidnosti proširiti do kontrakcije $A \otimes_h A \to \mathrm{ICB}(A)$ koju ćemo također označavati s Θ_A.

Definicija 2.4.6 Neka je A C*-algebra. Za kontrakciju $\Theta_A : M(A) \otimes_h M(A) \to \mathrm{ICB}(A)$ kažemo da je *kanonska kontrakcija* s $M(A) \otimes_h M(A)$ u $\mathrm{ICB}(A)$.

Napomena 2.4.7 Za razliku od općenitih operatora iz $\mathrm{ICB}(A)$, operatori iz slike $\mathrm{Im}\,\Theta_A$ od Θ_A dijele još neka dobra dodatna svojstva:

(i) Za ultraslabo proširenje ϕ^{**} operatora $\phi \in \operatorname{Im}\Theta_A$ na A^{**} vrijedi $\phi^{**} \in \mathrm{ICB}(A^{**})$. Preciznije, neka je $t \in M(A) \otimes_h M(A)$. Kako je $A \subseteq M(A) \subseteq A^{**}$, imamo $M(A) \otimes_h M(A) \subseteq A^{**} \otimes_h A^{**}$ (injektivnost Haagerupovog tenzorskog produkta; teorem 2.2.13 (i)), odakle slijedi jednakost operatora

$$\Theta_A(t)^{**} = \Theta_{A^{**}}(t)$$

na A^{**}, gdje je naravno $\Theta_{A^{**}} : A^{**} \otimes_h A^{**} \to \mathrm{ICB}(A^{**})$ kanonska kontrakcija i $\Theta_A(t)^{**}$ ultraslabo proširenje od $\Theta_A(t)$ na A^{**}. Specijalno, $\Theta_A(t)^{**} \in \mathrm{ICB}(A^{**})$. Nadalje, koristeći teorem Kaplanskog o gustoći (teorem 1.3.6) dobivamo $\|\Theta_{A^{**}}(t)\| = \|\Theta_A(t)\|$, a nakon tenzoriranja s $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ i

$$\|\Theta_{A^{**}}(t)\|_{cb} = \|\Theta_A(t)\|_{cb}.$$

Specijalno je

$$\|\Theta_{M(A)}(t)\|_{cb} = \|\Theta_A(t)\|_{cb}.$$

(ii) Pretpostavimo da je A σ-unitalna. Prema nekomutativnom Tietzeovom teoremu (teorem 1.1.48) proširenje $q_J^{\beta} : M(A) \to M(A/J)$ od q_J je surjektivno, odakle slijedi da sljedeći dijagram

$$\begin{array}{ccc} M(A) \otimes_h M(A) & \xrightarrow{\Theta_A} & \mathrm{ICB}(A) \\ {\scriptstyle q_J^{\beta}\otimes q_J^{\beta}}\big\downarrow & & {\scriptstyle Q_J}\big\downarrow \\ M(A/J) \otimes_h M(A/J) & \xrightarrow{\Theta_{A/J}} & \mathrm{ICB}(A/J). \end{array}$$

komutira. Zaista, za $t = \sum_{i=1}^{d} a_i \otimes b_i \in M(A) \otimes M(A)$ i $x \in A$ imamo

$$\begin{aligned} \Theta_{A/J}((q_J^{\beta} \otimes q_J^{\beta})(t))(q_J(x)) &= \sum_{i=1}^{d} q_J^{\beta}(a_i) q_J(x) q_J^{\beta}(b_i) \\ &= q_J(\sum_{i=1}^{d} a_i x b_i) = q_J(\Theta_A(t)(x)) \\ &= Q_J(\Theta_A(t))(q_J(x)). \end{aligned}$$

Prirodno je pitati se uz koje uvjete na A će Θ_A biti izometrija ili barem injekcija. Primijetimo da ako je Θ_A injektivna tada A (pa onda i $M(A)$, prema propoziciji 1.4.6) mora biti prim C*-algebra. Zaista, u protivnom bi postojali netrivijalni ortogonalni ideali $I, J \in \mathrm{Id}(A)$. Ako su $a \in I \setminus \{0\}$ i $b \in J \setminus \{0\}$, tada je očito $a \otimes b \neq 0$ u $A \otimes_h A$, dok je $\Theta_A(a \otimes b) = 0$ u $\mathrm{ICB}(A)$. Mathieu je u [49] dokazao i obrat te tvrdnje, tj. ako je A prim tada je Θ_A injekcija. Interesantno je (i vrlo netrivijalno) da je uvjet da je A prim ujedno i dovoljan za izometričnost od Θ_A. Preciznije, vrijedi:

Teorem 2.4.8 (Haagerup, Mathieu) Neka je A C*-algebra. Tada je ekvivalentno:

(i) A je prim;

(ii) Θ_A je injektivna;

(iii) Θ_A je izometrija.

□

Prethodni rezultat najprije je dokazao Haagerup u svom neobjavljenom radu [37] za slučaj $A = \mathrm{B}(\mathcal{H})$, a zatim ga je Mathieu poopćio na sve prim C*-algebre. Dokaz teorema 2.4.8 može se naći u [5] (gdje se ujedno nalazi i orginalan Haagerupov dokaz za $\mathrm{B}(\mathcal{H})$).

Kao direktnu posljedicu teorema 2.4.8 i formule (2.12), dobivamo sljedeću bitnu formulu po kojoj možemo računati cb-normu operatora iz $\operatorname{Im}\Theta_A$:

Korolar 2.4.9 Neka je A C*-algebra i $t \in M(A) \otimes_h M(A)$. Tada vrijedi

$$\|\Theta_A(t)\|_{cb} = \sup\{\|(q_{P_*} \otimes q_{P_*})(t)\|_h : \ P \in \operatorname{Prim}(A)\}, \tag{2.16}$$

gdje je za $P \in \operatorname{Prim}(A)$ s P_* označen jedinstven primitivni ideal od $M(A)$ takav da je $P_* \cap A = P$ (vidjeti teorem 1.2.4). Specijalno, ako je A unitalna, imamo

$$\|\Theta_A(t)\|_{cb} = \sup\{\|(q_P \otimes q_P)(t)\|_h : \ P \in \operatorname{Prim}(A)\}. \tag{2.17}$$

□

2.5 Centralni Haagerupov tenzorski produkt

Neka je A C*-algebra. Kako bismo izbjegli dodatne komplikacije (vidjeti primjer 2.5.19), u ovoj točki ćemo pretpostaviti da je A unitalna. Ukoliko A nije prim, tada samo vidjeli da kanonska kontrakcija Θ_A nije injektivna. Primijetimo da se u jezgri od Θ_A svakako nalaze tenzori oblika

$$az \otimes b - a \otimes zb \quad (a, b \in A, \ z \in Z(A)), \tag{2.18}$$

što nas motivira za sljedeću definiciju:

Definicija 2.5.1 Neka je A unitalna C*-algebra i neka je J_A zatvoreni ideal u $A \otimes_h A$ generiran sa svim tenzorima oblika (2.18). Banachova algebra $(A \otimes_h A)/J_A$ snabdjevena s kvocijentnom normom $\|\cdot\|_{Z,h}$ zove se centralni Haagerupov tenzorski produkt od A i označava s $A \otimes_{Z,h} A$.

Budući da je $J_A \subseteq \ker\Theta_A$, kontrakcija Θ_A inducira kontrakciju $\Theta_A^Z : A \otimes_{Z,h} A \to \mathrm{ICB}(A)$ danu s

$$\Theta_A^Z(t + J_A) = \Theta(t), \quad (t \in A \otimes_h A). \tag{2.19}$$

Napomena 2.5.2 Radi jednostavnosti oznaka, često ćemo samo pisati $\Theta_A^Z(t)$ umjesto $\Theta_A^Z(t + J_A)$ i $\|t\|_{Z,h}$ umjesto $\|t + J_A\|_{Z,h}$

U ovoj točki iznosimo rezultate iz [66] i [12], vezane uz problem karakterizacije unitalnih C*-algebri A za koje je Θ_A^Z izometrija odnosno injekcija.

Najprije se prisjetimo, ako je $J \in \mathrm{Id}(A)$ i $q_J : A \to A/J$ pripadni kvocijentni operator, tada je prema teoremu 2.2.13 inducirani operator $q_J \otimes q_J : A \otimes_h A \to (A/J) \otimes_h (A/J)$ također kvocijentni. Nadalje, iz teorema 2.3.3 slijedi

$$\ker(q_J \otimes q_J) = J \otimes_h A + A \otimes_h J.$$

Teorem 2.5.3 Neka je A unitalna C*-algebra i $t \in A \otimes_h A$. Tada vrijedi

$$\|t\|_{Z,h} = \sup\{\|(q_G \otimes q_G)(t)\|_h : \ G \in \mathrm{Glimm}(A)\}. \tag{2.20}$$

Specijalno, imamo

$$J_A = \bigcap \{G \otimes_h A + A \otimes_h G : \ G \in \mathrm{Glimm}(A)\}.$$

Dokaz. Primijetimo da je formulu (2.20) dovoljno dokazati na tenzorima iz algebarskog tenzorskog produkta $A \otimes A$. Neka je $t \in A \otimes A$ i označimo desnu stranu od (2.20) s α. Primijetimo da je

$$J_A \subseteq G \otimes_h A + A \otimes_h G, \quad \text{za sve } G \in \mathrm{Glimm}(A)$$

Zaista, neka su $a, b \in A$, $z \in Z(A)$ i $G \in \mathrm{Glimm}(A)$. Prema propoziciji 1.6.5, postoji maksimalan ideal J od $Z(A)$ takav da je $G = A[J] = JA$ i neka je $\varphi \in Z(A)^\wedge$ karakter na $Z(A)$ s jezgrom J. Tada je $z - \varphi(z)1 \in J$, pa imamo

$$\begin{aligned} az \otimes b - a \otimes zb &= ((z - \varphi(z)1)a) \otimes b - a \otimes ((z - \varphi(z)1)b) \\ &\in G \otimes_h A + A \otimes_h G. \end{aligned}$$

Zato je $\|t\|_{Z,h} \geq \alpha$. Neka je $t = \mathbf{a} \odot \mathbf{b}$ neka reprezentacija od t, gdje su $\mathbf{a} = [a_i] \in \mathrm{C}_n(A)$ i $\mathbf{b} = [b_i]^\tau \in \mathrm{R}_n(A)$. Tada je za $G \in \mathrm{Glimm}(A)$

$$(q_G \otimes q_G)(t) = [a_i + G] \odot [b_i + G]^\tau,$$

pa prema lemi 2.2.5 za dano $\varepsilon > 0$ postoji invertibilna matrica $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ takva da je za $[a_i'] := [a_i]S^{-1}$ i $[b_i']^\tau := S[b_i]^\tau$

$$\left\| \sum_{i=1}^n (a_i' a_i'^* + G) \right\|, \quad \left\| \sum_{i=1}^n (b_i'^* b_i' + G) \right\| < \alpha + \varepsilon.$$

Kako su funkcije norme $G' \mapsto \|a + G'\|$ $(a \in A)$ odozgo poluneprekidne na $\mathrm{Glimm}(A)$ (propozicija 1.6.6), postoji otvorena okolina U oko G takva da je

$$\left\| \sum_{i=1}^n (a_i' a_i'^* + G') \right\|, \quad \left\| \sum_{i=1}^n (b_i'^* b_i' + G') \right\| < \alpha + \varepsilon.$$

Kako je A unitalna, Glimm(A) je kompaktan Hausdorffov prostor, pa postoji konačan otvoreni pokrivač $\{U_j\}_{1\le j\le m}$ od Glimm(A) i invertibilne matrice $\{S_j\}_{1\le j\le m}$ iz $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ takve da je za $G \in U_j$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^j a_i^{j*} + G)\right\|, \quad \left\|\sum_{i=1}^{n}(b_i^{j*} b_i^j + G)\right\| < \alpha + \varepsilon,$$

gdje je $[a_i^j] := [a_i]S_j^{-1}$ i $[b_i^j]^\tau = S_j[b_i]^\tau$. Neka je $\{z_j\}_{1\le j\le m}$ particija jedinice na Glimm(A) podređena pokrivaču $\{U_j\}_{1\le j\le m}$ i stavimo

$$u := \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i^j z_j^{\frac{1}{2}} \otimes z_j^{\frac{1}{2}} b_i^j.$$

Tada je

$$u = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^j \otimes b_i^j\right)(z_j^{\frac{1}{2}} \otimes z_j^{\frac{1}{2}}) = \sum_{j=1}^{m} t(z_j^{\frac{1}{2}} \otimes z_j^{\frac{1}{2}}),$$

pa je

$$\begin{aligned} t - u &= t\left(1 - \sum_{j=1}^{m}(z_j^{\frac{1}{2}} \otimes z_j^{\frac{1}{2}})\right) = t\left(\sum_{j=1}^{m}(z_j \otimes 1 - z_j^{\frac{1}{2}} \otimes z_j^{\frac{1}{2}})\right) \\ &= t\left(\sum_{j=1}^{m}(z_j^{\frac{1}{2}} \otimes 1)(z_j^{\frac{1}{2}} \otimes 1 - 1 \otimes z_j^{\frac{1}{2}})\right). \end{aligned}$$

Dakle $t - u \in J_A$. Nadalje, za proizvoljni $G \in$ Glimm(A) imamo

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} z_j a_i^j a_i^{j*} + G\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{m}(z_j + G)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^j a_i^{j*} + G\right)\right\| < \alpha + \varepsilon$$

i

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} z_j b_i^{j*} b_i^j + G\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{m}(z_j + G)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{j*} b_i^j + G\right)\right\| < \alpha + \varepsilon.$$

Kako je

$$\bigcap\{G : \ G \in \mathrm{Glimm}(A)\} = \{0\},$$

koristeći propoziciju 1.1.23 dobivamo

$$\|t\|_{Z,h} \le \|u\|_h \le \left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} z_j a_i^j a_i^{j*}\right\|^{\frac{1}{2}} \left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} z_j b_i^{j*} b_i^j\right\|^{\frac{1}{2}} \le \alpha + \varepsilon,$$

kao što smo i htjeli. □

Propozicija 2.5.4 Neka je A C*-algebra. Za svako $t \in A \otimes_h A$ je funkcija

$$\mathrm{Id}(A) \times \mathrm{Id}(A) \to \mathbb{R}_+, \quad (I, J) \mapsto \|t + (I \otimes_h A + A \otimes_h J)\| = \|(q_I \otimes q_J)(t)\|_h$$

neprekidna u produktnoj τ_s-topologiji na $\mathrm{Id}(A) \times \mathrm{Id}(A)$.

Dokaz. Neka je $\Phi : \mathrm{Id}(A) \times \mathrm{Id}(A) \to \mathrm{Id}(A \otimes_h A)$ funkcija definirana s

$$\Phi(I, J) = I \otimes_h A + A \otimes_h J.$$

Tvrdnja 1: Funkcija $(I, J) \mapsto \|t + \Phi(I, J)\|$ je odozgo poluneprekidna.

Zaista, neka je (I_α, J_α) konvergentna mreža u $\mathrm{Id}(A) \times \mathrm{Id}(A)$ i $I, J \in \mathrm{Id}(A)$ takvi da $I_\alpha \xrightarrow{\tau_s} I$ i $J_\alpha \xrightarrow{\tau_s} J$. Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pokazati da je

$$\|t + \Phi(I_\alpha, J_\alpha)\| < \|t + \Phi(I, J)\| + \varepsilon$$

za dovoljno velike α. Neka su $c_1, \ldots, c_r \in I$, $d_1, \ldots, c_r \in A$, $e_1, \ldots, e_s \in A$ i $f_1, \ldots, f_s \in J$ takvi da je za

$$u := \sum_{j=1}^{r} c_j \otimes d_j + \sum_{k=1}^{s} e_k \otimes f_k \in I \otimes A + A \otimes J$$

$$\|t - u\|_h < \|t + \Phi(I, J)\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Izaberimo $\delta > 0$ takav da je

$$\delta \left(\sum_{j=1}^{r} \|d_j\| + \sum_{k=1}^{s} \|e_k\| \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako $I_\alpha \xrightarrow{\tau_s} I$ i $J_\alpha \xrightarrow{\tau_s} J$, postoji α_0 takav da

$$\|c_j + I_\alpha\| < \delta \quad i \quad \|f_k + J_\alpha\| < \delta,$$

za sve $\alpha \geq \alpha_0$, $1 \leq j \leq r$ i $1 \leq k \leq s$. Za $\alpha \geq \alpha_0$ imamo

$$\begin{aligned}
\|t + \Phi(I_\alpha, J_\alpha)\| &\leq \|t - u\| + \|u + \Phi(I_\alpha, J_\alpha)\| \\
&< \|t + \Phi(I, J)\| + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{r} \|(c_j + I_\alpha) \otimes (d_j + J_\alpha)\| \\
&+ \sum_{k=1}^{s} \|(e_k + I_\alpha) \otimes (f_k + J_\alpha)\| \\
&< \|t + \Phi(I, J)\| + \frac{\varepsilon}{2} + \delta \sum_{j=1}^{r} \|d_j + J_\alpha\| + \sum_{k=1}^{s} \|e_k + I_\alpha\| \\
&\leq \|t + \Phi(I, J)\| + \frac{\varepsilon}{2} + \delta \left(\sum_{j=1}^{r} \|d_j\| + \sum_{k=1}^{s} \|e_k\| \right) \\
&< \|t + \Phi(I, J)\| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tvrdnja 2: Funkcija $(I, J) \mapsto \|t + \Phi(I, J)\|$ je odozdo poluneprekidna.

Kak je uniformni limes odozdo poluneprekidnih funkcija odozdo poluneprekidna, dovoljno je dokazati da je funkcija $(I, J) \mapsto \|t + \Phi(I, J)\|$ odozdo poluneprekidna na tenzorima iz $A \otimes A$. Stoga, neka je $t \in A \otimes A$ s reprezentacijom $t = \mathbf{a} \odot \mathbf{b}$, gdje su $\mathbf{a} = [a_i] \in \mathrm{R}_n(A)$ i $\mathbf{b} = [b_i]^\tau \in \mathrm{C}_n(A)$. Pretpostavimo da postoje $I_0, J_0 \in \mathrm{Id}(A)$ takvi da $(I, J) \mapsto \|t + \Phi(I, J)\|$ nije odozdo poluneprekidna u (I_0, J_0). Tada postoje mreže (I_α) i (J_α) u $\mathrm{Id}'(A)$ takve da $I_\alpha \xrightarrow{\tau_s} I_0$ i $J_\alpha \xrightarrow{\tau_s} J_0$ i

$$\sup_\alpha \|t + \Phi(I_\alpha, J_\alpha)\| < \|t + \Phi(I_0, J_0)\|.$$

Reskalirajući t, možemo pretpostaviti da je

$$\sup_a \|t + \Phi(I_\alpha, J_\alpha)\| \leq 1 < \|t + \Phi(I_0, J_0)\|.$$

Izaberimo $\varepsilon > 0$ takav da je

$$(1 + \varepsilon)^2 < \|t + \Phi(I_0, J_0)\| \tag{2.21}$$

i stavimo

$$d := \max\{\|[a_i]\|, \|[b_i]^\tau\|\}.$$

Neka su $q_{I_\alpha} : A \to A/I_\alpha$, $q_{J_\alpha} : A \to A/J_\alpha$, $q_{I_0} : A \to A/I_0$ i $q_{J_0} : A \to A/J_0$ odgovarajući kvocijentni operatori. Tada je

$$\max\{\|[q_{I_\alpha}(a_i)]\|, \|[q_{J_\alpha}(b_i)]^\tau\|\} \leq d, \tag{2.22}$$

za sve α i

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} q_{I_\alpha}(a_i) \otimes q_{J_\alpha}(b_i) \right\|_h = \|t + \Phi(I_\alpha, J_\alpha)\| \leq 1$$

u $(A/I_\alpha) \otimes_h (A/J_\alpha)$. Neka je $C := C(\varepsilon, n, d) > 0$ konstanta kao u lemi 2.2.5. Tada postoje invertibilne matrice $S_\alpha \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ takve da je $\|S_\alpha\| \le C$, $\|S_\alpha^{-1}\| \le C$, te

$$\max\{\|[q_{I_\alpha}(a_i)]S_\alpha^{-1}\|, \|S_\alpha[q_{J_\alpha}(b_i)]^\tau\|\} \le 1 + \varepsilon.$$

Kako je skup svih invertibilnih matrica $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ s $\|S\|, \|S^{-1}\| \le C$ kompaktan, prelaskom na podmrežu, možemo pretpostaviti da postoji invertibilna matrica $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, takva da je $\|S\|, \|S^{-1}\| \le C$ i $S_\alpha \longrightarrow S$ (pa onda i $S_\alpha^{-1} \to S^{-1}$) u $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Stavimo $a_\alpha := [q_{I_\alpha}(a_i)] \in \mathrm{R}_n(A/I_\alpha)$. Iz (2.22) slijedi

$$\|a_\alpha S_\alpha^{-1} - a_\alpha S^{-1}\| \le \|S_\alpha^{-1} - S^{-1}\| \longrightarrow 0,$$

pa onda i $\|a_\alpha S_\alpha^{-1}\| - \|a_\alpha S^{-1}\| \longrightarrow 0$. Stavimo $[c_i] := [a_i]S^{-1} \in \mathrm{R}_n(A)$. Kako $I_\alpha \xrightarrow{\tau_s} I_0$, imamo

$$\begin{aligned} \|[q_{I_0}(a_i)]S^{-1}\| &= \|([q_{I_0}(a_i)]S^{-1})([q_{I_0}(a_i)]S^{-1})^*\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| q_{I_0}\left(\sum_{i=1}^n c_i c_i^*\right)\right\|^{\frac{1}{2}} = \lim_\alpha \left\| q_{I_\alpha}\left(\sum_{i=1}^n c_i c_i^*\right)\right\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_\alpha \|(a_\alpha S^{-1})(a_\alpha S^{-1})^*\|^{\frac{1}{2}} = \lim_\alpha \|a_\alpha S^{-1}\| \\ &= \lim_\alpha \|a_\alpha S_\alpha^{-1}\| \le 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Slično bismo dobili i $\|S[q_{J_0}(b_i)]^\tau\| \le 1 + \varepsilon$. Dakle,

$$\|t + \Phi(I_0, J_0)\| = \left\| \sum_{i=1}^n q_{I_0}(a_i) \otimes q_{J_0}(b_i) \right\|_h \le \|[q_{I_0}(a_i)]S^{-1}\| \|S[q_{J_0}(b_i)]^\tau\| \le (1+\varepsilon)^2;$$

kontradikcija s (2.21). □

Koristeći prethodnu propoziciju, sada možemo dobiti pojačanu verziju formule (2.17)

Propozicija 2.5.5 Neka je A unitalna C*-algebra i neka je $t \in A \otimes_h A$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \|\Theta_A(t)\|_{cb} &= \sup\{\|(q_J \otimes q_J)(t)\|_h : \ J \in \mathrm{Primal}(A)\} && (2.23) \\ &= \sup\{\|(q_J \otimes q_J)(t)\|_h : \ J \in \mathrm{MinPrimal}(A)\}. && (2.24) \end{aligned}$$

Dokaz. Označimo sa D dijagonalu u $\mathrm{Primal}(A) \times \mathrm{Primal}(A)$, s produktnom τ_s-topologijom. Kako je $\mathrm{Primal}(A)$ τ_s-kompaktan (napomena 1.5.6), slijedi i da je D kompaktan. Prema propoziciji 2.5.4, funkcija $(J, J) \mapsto \|(q_J \otimes q_J)(t)\|_h$ je neprekidna na D, pa stoga postiže svoj maksimum; očito u nekom (R, R) gdje je $R \in \mathrm{MinPrimal}(A)$. Kako je $\mathrm{MinPrimal}(A) \subseteq \overline{\mathrm{Prim}(A)}^{\tau_s}$ (korolar 1.5.9), imamo

$$\|(q_R \otimes q_R)(t)\|_h = \sup\{\|(q_P \otimes q_P(t))\|_h : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\}.$$

Sada tvrdnja slijedi iz korolara 2.4.9. □

Teorem 2.5.6 (Somerset) Neka je A unitalna C*-algebra. Ako je svaki Glimmov ideal u A primalan tada je $\Theta_A^Z : A \otimes_{Z,h} A \to \mathrm{ICB}(A)$ izometrija.

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz teorema 2.20 i propozicije 2.5.5. □

Kako bismo dali karakterizaciju C*-algebri A za koje je Θ_A^Z injektivna, koristit ćemo sljedeću lemu.

Lema 2.5.7 Neka je A unitalna C*-algebra i neka je $R \in \mathrm{Id}(A)$. Tada je R 2-primalan ako i samo ako je

$$\ker \Theta_A \subseteq R \otimes_h A + A \otimes_h R.$$

Dokaz. Pretpostavimo da R nije 2-primalan. Tada postoje ortogonalni ideali $I, J \in \mathrm{Id}(A)$ takvi da $I \nsubseteq R$ i $J \nsubseteq R$. Neka su $a \in I \setminus R$ i $b \in I \setminus R$. Tada je $a \otimes b \in \ker \Theta_A$ i $a \otimes b \notin R \otimes_h A + A \otimes_h R$. Dakle, $\ker \Theta_A \nsubseteq R \otimes_h A + A \otimes_h R$.

Obratno, neka je $R \in \mathrm{Primal}_2(A)$ i neka je $t \in A \otimes_h A$ takav da $t \notin R \otimes_h A + A \otimes_h R$. Prema korolaru 2.3.8 postoje $P, Q \in \mathrm{Prim}(A/R)$ takvi da $t \notin P \otimes_h A + A \otimes_h Q$. No, $S := P \cap Q$ je primalan, budući je R 2-primalan i $t \notin S \otimes_h A + A \otimes_h S$. Dakle $\|(q_S \otimes q_S)(t)\|_h > 0$, pa je prema propoziciji 2.5.5 $\Theta_A(t) \neq 0$. Dakle, $\ker \Theta_A \subseteq R \otimes_h A + A \otimes_h R$. □

Korolar 2.5.8 Neka je A unitalna C*-algebra. Tada je

$$\ker \Theta_A = \bigcap \{R \otimes_h A + A \otimes_h R : \ R \in \mathrm{Primal}_2(A)\}. \tag{2.25}$$

Nadalje, Θ_A^Z je injektivna ako i samo ako je svaki Glimmov ideal u A 2-primalan.

Dokaz. Označimo desnu stranu od (2.25) s K. Prema lemi 2.5.7 $\ker \Theta_A \subseteq K$. S druge strane, ako je $t \in K$ onda je specijalno i $t \in \bigcap \{J \otimes_h A + A \otimes_h J : \ J \in \mathrm{Primal}(A)\}$. Iz propozicije 2.5.5 slijedi $\Theta_A(t) = 0$. Dakle, $\ker \Theta_A = R$.

Ako je svaki Glimmov ideal u A 2-primalan, tada je prema teoremu 2.5.3 $K = J_A$, pa je Θ_A^Z injektivna. Obratno, ako je G Glimmov ideal u A koji nije 2-primalan, tada je prema lemi 2.5.7 $\ker \Theta_A \nsubseteq G \otimes_h A + A \otimes_h G$, pa Θ_A^Z nije injektivna. □

Napomena 2.5.9 Neka je A unitalna C*-algebra. Tada su $A \otimes_{Z,h} A$ i $(A \otimes_h A)/\ker \Theta_A$ poluproste Banachove algebre. Zaista, kako je za svaki ideal $J \in \mathrm{Id}(A)$ ideal $J \otimes_h A + A \otimes_h J \in \mathrm{Id}(A \otimes_h A)$ gornji (vidjeti definiciju 2.3.7 i korolar 2.3.8), prema teoremu 2.5.3 i korolaru 2.5.8 J_A i $\ker \Theta_A$ su gornji ideali u $A \otimes_h A$. Kako je $A \otimes_h A$ poluprosta Banachova algebra, takve su i $A \otimes_{Z,h} A = (A \otimes_h A)/J_A$ te $(A \otimes_h A)/\ker \Theta_A$.

Sada nam je cilj dokazati obrat teorema 2.5.6. Najprije ćemo trebati par pomoćnih rezultata.

Lema 2.5.10 Neka je $T_{(n)} : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (elementarni) operator dan s

$$T_{(n)}x := \sum_{j=1}^{n} (I_n - e_{j,j})xe_{j,j} = x - \sum_{j=1}^{n} e_{j,j}xe_{j,j},$$

gdje je I_n jedinična matrica u $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Tada je

$$\|T_{(n)}\|_{cb} = \|T_{(n)}\| = \frac{2(n-1)}{n}.$$

Dokaz. Stavimo $T := T_{(n)}$, te primijetimo da je $Te_{i,j} = (1 - \delta_{i,j})e_{i,j}$ i $TI_n = 0$. Operator T možemo napisati u obliku

$$Tx = \frac{n-1}{n}x - Sx,$$

gdje je

$$Sx := \sum_{j=1}^{n} (e_{j,j} - \frac{1}{n}I_n)x(e_{j,j} - \frac{1}{n}I_n)$$

potpuno pozitivan operator. Prema propoziciji 2.1.12 imamo

$$\|S\|_{cb} = \|S\| = \|S(I)\| = \frac{n-1}{n}.$$

Zato je $\|T\| \leq \|T\|_{cb} \leq \frac{2(n-1)}{n}$.

Dokažimo da je i $\|T\| \geq \frac{2(n-1)}{n}$. Neka je $\vec{\xi} \in \mathbb{C}^n$ jedinični vektor čije su sve komponente jednake $\frac{1}{\sqrt{n}}$ i promotrimo projektor $\vec{\xi}^* \otimes \vec{\xi}$ ranga 1 s $\mathbb{C}^n$ na potprostor razapet s vektorom $\vec{\xi}$. Ako na $\vec{\xi}^* \otimes \vec{\xi}$ gledamo kao na matricu u kanonskoj bazi za $\mathbb{C}^n$, tada je svaka njena komponenta jednaka $\frac{1}{n}$. Zato je $\langle T(\vec{\xi}^* \otimes \vec{\xi})\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle = \frac{n-1}{n}$, pa je

$$\langle T(2\vec{\xi}^* \otimes \vec{\xi} - I_n)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle = 2\langle T(\vec{\xi}^* \otimes \vec{\xi})\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle = \frac{2(n-1)}{n}.$$

Kako je $2(\vec{\xi}^* \otimes \vec{\xi}) - I_n$ unitaran operator, on je norme 1, pa je $\|T\| \geq \frac{2(n-1)}{n}$. $\square$

Lema 2.5.11 Neka su A i B C*-algebre, te neka su $b_1, \ldots, b_n \in A_+$ ortogonalni pozitivni elementi norme 1 i $d_1, \ldots, d_n \in B$ ortogonalni pozitivni elementi norme ne veće od 1. Stavimo $X := \mathrm{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$ i $Y := \mathrm{span}\{d_1, \ldots, d_n\}$, te neka je $\phi : X \to Y$ linearni operator dan s $\phi(b_j) := d_j$ $(1 \leq j \leq n)$. Tada vrijedi:

(i) Operator ϕ je potpuna kontrakcija;

(ii) Inducirani operator $\phi \otimes \phi : X \otimes_h X \to Y \otimes_h Y$ je (potpuna) kontrakcija;

(iii) Ako je $\|d_j\| = 1$ za sve $1 \leq j \leq n$ tada je $\phi \otimes \phi : X \otimes_h X \to Y \otimes_h Y$ (potpuna) izometrija.

Dokaz. (i) Neka su $C \subseteq A$ i $D \subseteq B$ komutativne C*-podalgebre redom generirane s X i Y, te neka su K_X i K_Y lokalno kompaktni Hausdorffovi prostori takvi da je $C \cong C_0(K_X)$ i $D \cong C_0(K_Y)$. Tada su $b_1, \ldots, b_n$ pozitivne funkcije s disjunktnim nosačima, pa je očito

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \right\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \|b_i\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

za sve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Koristeći sličan argument za elemente $d_1, \ldots, d_n$, dobivamo

$$\left\| \phi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i \right\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \|d_i\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \right\|,$$

pa je $\|\phi\| \leq 1$. Kako je operatorski prostor Y sadržan u komutativnoj C*-algebri D, imamo $\|\phi\|_{cb} = \|\phi\| \leq 1$ (propozicija 2.1.5).

(ii) Tvrdnja direktno slijedi iz (i) i teorema 2.2.13, jer je $\|\phi \otimes \phi\|_{cb} \leq \|\phi\|_{cb}^2 \leq 1$.

(iii) Prema (ii) je $\|(\phi \otimes \phi)^{-1}\|_{cb} = \|\phi^{-1} \otimes \phi^{-1}\|_{cb} \leq 1$, pa je $\phi \otimes \phi$ potpuna izometrija.
□

Lema 2.5.12 Neka je B C*-algebra i neka su $b_1, \ldots, b_n \in B$ pozitivni ortogonalni elementi. Stavimo

$$t := \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) - \sum_{j=1}^n b_j \otimes b_j \in B \otimes B.$$

(i) Ako je $\|b_j\| \leq 1$ za sve $1 \leq j \leq 1$, tada je $\|t\|_h \leq \frac{2(n-1)}{n}$.

(ii) Ako je $\|b_j\| = 1$ za sve $1 \leq j \leq 1$, tada je $\|t\|_h = \frac{2(n-1)}{n}$.

Dokaz. Stavimo $Y := \mathrm{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$ i neka je $\mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ podalgebra dijagonalnih matrica u $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Definirajmo operator $\phi : \mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \to Y$ s $\phi(e_{j,j}) = b_j$ $(1 \leq j \leq 1)$. Koristeći injektivnost Haagerupovog tenzorskog produkta (teorem 2.2.13), teorem 2.4.8 i lemu 2.5.10 imamo

$$\left\| I_n \otimes I_n - \sum_{j=1}^n e_{j,j} \otimes e_{j,j} \right\|_h = \|T\|_{cb} = \frac{2(n-2)}{n}.$$

Kako je

$$u = (\phi \otimes \phi) \left(I_n \otimes I_n - \sum_i^n e_{j,j} \otimes e_{j,j} \right),$$

tvrdnje (i) i (ii) sada direktno slijede iz leme 2.5.11. □

Sada napokon dolazimo do glavnog rezultata ove točke.

Teorem 2.5.13 (Archbold, Somerset i Timoney) Neka je A unitalna C*-algebra. Kontrakcija $\Theta_A^Z : A \otimes_{Z,h} A \to \mathrm{ICB}(A)$ je izometrija ako i samo ako je svaki Glimmov ideal u A primalan.

Dokaz. Ako je svaki Glimmovi ideal u A primalan, tada je prema teoremu 2.5.6 Θ_A^Z izometrija.

Obratno, pretpostavimo da A sadrži Glimmov ideal G koji nije n-primalan, za neko $n \geq 2$. Smanjujući n, ako je potrebno, možemo pretpostaviti da je G $(n-1)$-priman ali da nije n-primalan (gdje naravno koristimo standardnu konvenciju da su svi ideali u A 1-primalni). Prema napomeni 1.5.3, postoje primitivni ideali $P_1, \ldots, P_n \in \mathrm{Prim}(A/G)$ takvi da ideal $J := \bigcap_{j=1}^n P_j$ nije primalan. Kako je G $(n-1)$-primalan, prema istoj napomeni slijedi da je ideal

$$R_j := \bigcap_{1 \leq k \leq n, k \neq j} P_j$$

primalan za svako $1 \leq j \leq n$. Budući da su svi $R_1, \ldots, R_n$ primalni a J nije, slijedi

$$P_j \nsubseteq P_k \quad \text{za sve } j \neq k. \tag{2.26}$$

Kako J nije n-primalan, prema napomeni 1.5.1 postoje otvorene okoline U_j od P_j u $\mathrm{Prim}(A)$ $(1 \leq j \leq n)$ čiji je presjek prazan skup. Neka su $J_1, \ldots, J_n \in \mathrm{Id}(A)$ takvi da je $U_j = \mathrm{Prim}(J_j)$ (dakle, $U_j = \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : \ J_j \nsubseteq Q\}$). Stavimo $I_j := J_j R_j$ $(1 \leq j \leq n)$. Primijetimo da nikoji ideal I_j nije sadržan u J. Zaista, u protivnom bi za neko $1 \leq j \leq n$ imali $J_j R_j \subseteq P_j$, a kako je primitivni ideal P_j prim (propozicija 1.4.2) slijedi $J_j \subseteq P_j$ ili $R_j \subseteq P_j$. Kako je $P_j \in U_j$, slijedi $J_j \nsubseteq P_j$, pa je nužno $R_j \subseteq P_j$. Kako je P_j prost i kako je $R_j = \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq j} P_k$ mora biti $P_k \subseteq P_j$ za neko $k \neq j$, što je kontradikcija s (2.26).

Neka je $q_J : A \to A/J$ pripadni kvocijenti operator i stavimo $\dot{I}_J := q_J(I_j)$. Budući da $I_j \nsubseteq J$, svaki $\dot{I}_j$ je ne-nul ideal u A/J. Kako je $R_j R_k = J$ za $k \neq j$, slijedi $\dot{I}_j \dot{I}_k = 0$ za $k \neq j$.

Za svako $1 \leq j \leq n$ izaberimo pozitivni element $\dot{d}_j \in \dot{I}_j$ norme 1 i neka je $g_j \in I_j$ pozitivni element norme 1 takav da je $q_J(g_j) = \dot{d}_j^{\frac{1}{3}}$. Kako je $\dot{d}_j^{\frac{1}{3}} \dot{d}_k^{\frac{1}{3}} = 0$, prema propoziciji 1.1.26 postoje ortogonalni pozitivni elementi $c_j \in A$ $(1 \leq j \leq n)$ norme 1 takvi da je $q_J(c_j) = q_J(g_j) = \dot{d}_j^{\frac{1}{3}}$. Stavimo $b_j := c_j g_j c_j \in I_{j_+}$. Tada je $b_j b_k = 0$, $q_J(b_j) = \dot{d}_j$ i $\|b_j\| = 1$ $(1 \leq j, k \leq n, \ j \neq k)$.

Neka je

$$t := \left(\sum_{j=1}^n b_j\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n b_j\right) - \sum_{j=1}^n b_j \otimes b_j = \sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^n b_k\right) - b_j\right) \otimes b_j$$

kao u lemi 2.5.12. Primijetimo da kanonski kvocijentni operator $A/G \to A/J$, $a + G \mapsto a + J$ inducira (potpuno) kvocijentni operator $(A/G) \otimes_h (A/G) \to (A/J) \otimes_h$

(A/J). Iz teorema 2.5.3 slijedi $\|t\|_{Z,h} \geq \|(q_G \otimes q_G)(t)\|_h$. Budući da elementi $\dot{d}_1 = q_J(b_1), \ldots, \dot{d}_n = g_J(b_n)$ zadovoljavaju uvjete leme 2.5.12, imamo

$$\begin{aligned}
\|t\|_{Z,h} &\geq \|(q_G \otimes q_G)(t)\|_h \geq \|(q_J \otimes q_J)(t)\|_h \\
&= \left\| \left(\sum_{j=1}^n \dot{d}_j \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n \dot{d}_j \right) - \sum_{j=1}^n \dot{d}_j \otimes \dot{d}_j \right\|_h = \frac{2(n-1)}{n}.
\end{aligned}$$

S druge strane, prema (2.17) znamo da je

$$\|\Theta_A^Z(t)\|_{cb} = \|\Theta_A(t)\|_{cb} = \{\|(q_P \otimes q_P)(t)\|_h : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\}.$$

Uzmimo proizvoljni $P \in \mathrm{Prim}(A)$. Kako je $\bigcap_{j=1}^n U_j = \emptyset$, postoji $1 \leq k \leq n$ takav da $P \notin U_k$. Tada je $b_k \in I_k \subseteq J_k \subseteq P$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $k = n$. Prema lemi 2.5.12, imamo

$$\begin{aligned}
\|(q_P \otimes q_P)(t)\|_h &= \left\| \left(\sum_{j=1}^n b_j + P \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n b_j + P \right) - \sum_{j=1}^n (b_j + P) \otimes (b_j + P) \right\|_h \\
&= \left\| \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j + P \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j + P \right) - \sum_{j=1}^{n-1} (b_j + P) \otimes (b_j + P) \right\|_h \\
&\leq \frac{2(n-2)}{n-1}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\|\Theta_A^Z(t)\|_{cb} \leq \frac{2(n-2)}{n-1} < \frac{2(n-1)}{n} = \|t\|_{Z,h},$$

pa Θ_A^Z nije kontrakcija. $\square$

Napomena 2.5.14 Primijetimo da iz dokaza teorema 2.5.13 slijedi i jača tvrdnja: Ako je A unitalna C*-algebra koja sadrži Glimmov ideal koji nije n-primalan, tada postoji tenzor $t \in A \otimes A$ ranga ne većeg od n takav da za pripadni elementarni operator $T := \Theta_A(t)$ vrijedi $\|T\|_{cb} < \|t\|_{Z,h}$.

Sljedeći primjer vjerno dočarava dokaz prethodnog teorema.

Primjer 2.5.15 ("Algebra s četiri žbice") Neka je

$$\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 0 \text{ i } x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Očito se $\mathcal{T}$ sastoji od 4 polupravca i označimo ih redom sa R_1, R_2, R_3, R_4 (s obzirom na desnu orijentaciju) tako da je $R_1 = \{(x, 0) : \ x \geq 1\}$. Sada ćemo konstruirati četverotočkovnu kompkatifikaciju $\mathcal{T}'$ od $\mathcal{T}$, na sljedeći način: Dodajmo četiri nove točke ω_i $(1 \leq i \leq 4)$ prostoru $\mathcal{T}$ i proglasimo za baznu otvorenu okolinu točke ω_i

svaki skup oblika

$$\{\omega_i\} \cup \bigcup_{j\neq i}\{s \in R_j : \ |s| > r\},$$

gdje je $r > 1$. Tada npr. niz $((n, 0))$ u polupravcu R_1 konvergira u $\mathcal{T}'$ prema svakoj točki ω_2, ω_3 i ω_4 (ali ne i prema ω_1). Sada ćemo konstruirati C*-algebru A čiji je primitivni spektar homeomorfan s $\mathcal{T}'$. Neka je $B := C_b(\mathcal{T}, \mathrm{M}_3(\mathbb{C}))$ i definirajmo A kao C*-podalgebru od B koja se sastoji od svih funkcija $x \in B$ za koje postoje skalari $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x), \lambda_4(x) \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$\lim_{s\to\infty, s\in R_j} x(s) = \mathrm{diag}(\lambda_{j+1}(x), \lambda_{j+2}(x), \lambda_{j+3}(x)) \quad (1 \leq j \leq 4),$$

gdje su sve operacije u indeksima reducirane modulo 4. Za dane skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ definiramo *konstantni element* $c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ kao element $x \in A$ takav da je

$$x(s) = \mathrm{diag}(\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \lambda_{j+3}) \quad (s \in R_j, \ 1 \leq j \leq 4).$$

Tada skup A_c svih konstantnih elemenata čini komutativnu C*-podalgebru od A koja je izomorfna s $\mathbb{C}^4$ i imamo

$$A = C_0(\mathcal{T}, \mathrm{M}_3(\mathbb{C})) + A_c.$$

C*-algebru A zovemo "algebra s četiri žbice". Očito je A 3-subhomogena s esencijalnim 3-homogenim idealom $J = C_0(\mathcal{T}, \mathrm{M}_3(\mathbb{C}))$. Dakle, sve 3-dimenzionalne ireducibilne reprezentacije od A su (do na ekvivalenciju) oblika π_s ($s \in \mathcal{T}$), gdje je $\pi_s : A \to \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ dana s $\pi_s(x) := x(s)$. Kako je A/J komutativna dimenzije 4, sve njene ireducibilne reprezentacije su jedno-dimenzionalne i oblika $\lambda_i : x \mapsto \lambda_i(x)$ $(1 \leq i \leq 4)$. Dakle, $\mathrm{Prim}(A)$ je kao skup jednak

$$\mathrm{Prim}(A) = \{\ker \pi_s : \ s \in \mathcal{T}\} \cup \{\ker \lambda_1, \ker \lambda_2, \ \ker \lambda_3, \ \ker \lambda_4\}.$$

Kao topološki prostor $\mathrm{Prim}(A)$ je homeomorfan s $\mathcal{T}'$. Na primjer, neka je (s_α) mreža u R_j takva da je $\lim_\alpha |s_\alpha| = \infty$. Tada (s_α) u $\mathcal{T}'$ konvergira prema svakoj točki skupa $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \setminus \{\omega_1\}$. Tvrdimo da mreža $(\ker \pi_{s_\alpha})$ konvergira u $\mathrm{Prim}(A)$ prema svakom $\ker \lambda_i$ $(i \neq j)$. Zaista, fiksirajmo $i \neq j$ i neka je U otvorena okolina od $\ker \lambda_i$ u $\mathrm{Prim}(A)$. Tada postoji ideal $I \in \mathrm{Id}(A)$ takav da je $U = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : \ I \not\subseteq P\}$. Kako je $\ker \lambda_i \in U$, postoji $x \in I$ takav da je $\lambda_i(x) \neq 0$. Zbog neprekidnosti funkcija iz A, postoji $r > 1$ takav da je $x(s) \neq 0$, čim je $s \in R_j$ i $|s| > r$. Kako $|s_\alpha| \to \infty$, postoji α_0 takav da je $|s_\alpha| > r$ za sve $\alpha \geq \alpha_0$. Tada je $\ker \pi_{s_\alpha} \in U$, čim je $\alpha \geq \alpha_0$. Dakle, $\ker \pi_{s_\alpha} \to \ker \lambda_i$ u $\mathrm{Prim}(A)$.

Centar $Z(A)$ od A se sastoji od svih elemenata $x \in A$ za koje je $x(s)$ multipl jedinice (dakle, $\lambda_i(x)$ ne ovise o i), pa je $Z(A)$ kanonski izomorfan C*-algebri svih neprekidnih kompleksnih funkcija na Aleksandrovljevoj kompaktifikaciji $\widetilde{\mathcal{T}}$ od $\mathcal{T}$. Dakle,

$$G_\infty := \ker \lambda_1 \cap \ker \lambda_2 \cap \ker \lambda_3 \cap \ker \lambda_4 = J = C_0(\mathcal{T}, \mathrm{M}_3(\mathbb{C}))$$

je Glimmov ideal od A i imamo

$$\mathrm{Glimm}(A) = \{\ker \pi_s : \ s \in \mathcal{T}\} \cup \{G_\infty\} \cong \widetilde{\mathcal{T}}.$$

Tvrdimo da je svaki Glimmov ideal u A 3-primalan, ali da G_∞ nije 4-primalan. Kako su svi Glimmovi ideali osim G_∞ primitivni, dovoljno je dokazati da je $G_\infty \in \mathrm{Primal}_3(A) \setminus \mathrm{Primal}_4(A)$. Stavimo $I_i := \{x \in A : \ x(s) = 0 \text{ za sve } s \in R_i\}$ $(1 \le i \le 4)$. Tada je $I_1 I_2 I_3 I_4 = \{0\}$, ali $I_i \nsubseteq G_\infty$ za sve $1 \le i \le 4$. Na primjer, $c(1,0,0,0) \in I_1 \setminus G_\infty$. Dakle, G_∞ nije 4-primalan. Kako je $\mathrm{Prim}(A/G_\infty) = \{\ker \lambda_1, \ker \lambda_2, \ker \lambda_3, \ker \lambda_4\}$, za dokaz da je $G \in \mathrm{Primal}_3(A)$ dovoljno je provjeriti da je svaki ideal

$$\ker \lambda_i \cap \ker \lambda_{i+1} \cap \ker \lambda_{i+2}$$

primalan $(1 \le i \le 4)$. No već smo dokazali da mreža $(\ker \pi_{s_\alpha})$ istovremeno konvergira prema $\ker \lambda_{i+1}$, $\ker \lambda_{i+2}$ i $\ker \lambda_{i+3}$, čim je (s_α) mreža u R_i takva da $|s_\alpha| \to \infty$.

Za

$$\begin{aligned} a_1 &:= c(0,1,1,1), & b_1 &:= c(1,0,0,0), \\ a_2 &:= c(1,0,1,1), & b_2 &:= c(0,1,0,0), \\ a_3 &:= c(1,1,0,1), & b_3 &:= c(0,0,1,0), \\ a_3 &:= c(1,1,1,0), & b_4 &:= c(0,0,0,1), \end{aligned} \tag{2.27}$$

neka je $t := \sum_{i=1}^4 a_i \otimes b_i \in A \otimes A$ i $T := \Theta_A(t) \in \mathrm{E}(A)$. Neka je $P \in \mathrm{Prim}(A)$. Ako je $P = \ker \pi_s$ $(s \in \mathcal{T})$, imamo $T_P = T_{(3)}$, pa je $\|T_P\|_{cb} = \frac{4}{3}$. Ako je $P = \ker \lambda_i$ $(1 \le i \le 4)$ imamo $T_P = 0$. Dakle

$$\|\Theta_A^Z(t)\|_{cb} = \|T\|_{cb} = \sup\{\|T_P\|_{cb} : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\} = \frac{4}{3}.$$

S druge strane, neka je $q_{G_\infty} : A \to A/G_\infty$ kvocijentni operator. Tada imamo $(q_{G_\infty} \otimes q_{G_\infty})(t) = \sum_{i=1}^4 (a_i + G_\infty) \otimes (b_i + G_\infty)$, pa ako A/G_∞ identificiramo s $\mathrm{D}_4(\mathbb{C})$, tada možemo uzeti da elementi $b_i + G_\infty$ odgovaraju elementima $e_{i,i} \in \mathrm{D}_4(\mathbb{C})$, a elementi $a_i + G_\infty$ elementima $I_4 - e_{i,i} \in \mathrm{D}_4(\mathbb{C})$. Budući da je Haagerupova norma injektivna, normu $\|(q_{G_\infty} \otimes q_{G_\infty})(t)\|_h$ možemo računati u $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$, koja je prema teoremu 2.4.8 i lemi 2.5.10 jednaka $\|T_{(4)}\|_{cb} = \frac{3}{2}$. Dakle, prema teoremu 2.5.3

$$\|t\|_{Z,h} \ge \|(q_{G_\infty} \otimes q_{G_\infty})(t)\|_h \ge \frac{3}{2} > \frac{4}{3} = \|T\|_{cb} = \|\Theta_A^Z(t)\|_{cb}.$$

Napomena 2.5.16 Koristeći istu ideju iz prethodnog primjera, lako bismo konstruirali "algebru s $(n+1)$-žbicom" u kojoj su svi Glimmovi ideali n-primalni, ali nisu svi $(n+1)$-primalni.

Ukoliko C*-algebra A nije unitalna, tada možemo promatrati kontrakciju $\Theta_A^Z : M(A) \otimes_{Z,h} M(A) \to \mathrm{ICB}(A)$ dobivenu iz kontrakcije $\Theta_{M(A)}^Z : M(A) \otimes_{Z,h} M(A) \to \mathrm{ICB}(M(A))$ restrikcijom na A, tj. $\Theta_A^Z(t) := \Theta_{M(A)}^Z(t)|_A$. Naravno, kao u napomeni 2.4.7 imamo $\|\Theta_A^Z(t)\|_{cb} = \|\Theta_{M(A)}^Z\|_{cb}$, za sve $t \in M(A) \otimes_h M(A)$. Tada direktno iz teorema 2.5.13 dobivamo sljedeći rezultat.

Korolar 2.5.17 Ako je A (ne nužno unitalna) C*-algebra, tada je kontrakcija $\Theta_A^Z : M(A) \otimes_{Z,h} M(A) \to \mathrm{ICB}(A)$ izometrija ako i samo ako je svaki Glimmov ideal u $M(A)$ primalan.

U ovom trenutku je prirodno pitati se vrijedi li ekvivalencija u

$$\mathrm{Glimm}(A) \subseteq \mathrm{Primal}(A) \overset{?}{\Leftrightarrow} \mathrm{Glimm}(M(A)) \subseteq \mathrm{Primal}(M(A)), \tag{2.28}$$

tako da odgovor na problem izometričnosti od Θ_Z^A možemo iskazati u terminima strukture ideala od A. Iako implikacija $\Leftarrow$ u (2.28) uvijek vrijedi, implikacija $\Rightarrow$ u (2.28) općenito neće vrijediti.

Propozicija 2.5.18 Neka je A (neunitalna) C*-algebra. Ako je svaki Glimmovi ideal od $M(A)$ primalan, tada je i svaki Glimmov ideal od A primalan.

Dokaz. Pretpostavimo da A sadrži Glimmov ideal G koji nije n-primalan i neka je $\Psi_A : Z(M(A)) \to C_b(\mathrm{Prim}(A))$ Dauns-Hofmannov izomorfizam (teorem 1.4.19). Fiksirajmo $P \in \mathrm{Prim}(A/G)$ i neka je $\varphi : C_b(\mathrm{Prim}(A)) \to \mathbb{C}$ karakter definiran s $\varphi(f) := f(P)$. Po definiciji Glimmovog ideala G, očito da definicija karaktera φ ne ovisi o izboru $P \in \mathrm{Prim}(A/G)$. Neka je $J := \ker(\varphi \circ \Psi_A)$ maksimalni ideal od $Z(M(A))$ i neka je $H := M(A)J$ pripadni Glimmov ideal od $M(A)$.

Imamo $H \cap A = M(A)JA = AJ$. Neka su $a \in A$, $z \in J$ i $Q \in \mathrm{Prim}(A/G)$. Tada u A/Q imamo

$$za + Q = \Psi_A(z)(Q)(a+Q) = (\varphi \circ \Psi_A)(z)(a+Q) = 0.$$

Dakle, $AJ \subseteq G$ (zapravo je $AJ = G$, no to nam neće sada trebati).

Pretpostavimo da je H n-primalan i neka su $I_1, \ldots, I_n \subseteq A$ čiji je produkt nul-ideal. Tada postoji neki $1 \leq i \leq n$ takav da je $I_i \subseteq H$, pa je i $I_i \subseteq H \cap A = AJ \subseteq G$. Odavde slijedi da je i G n-primalan; kontradikcija. □

Primjer 2.5.19 Neka je Δ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor koji nije kompaktan i čiji Stone-Čechov ostatak $\beta D \setminus \Delta$ ima barem dvije različite točke y i z (na primjer, možemo uzeti $\Delta = \mathbb{N}$ ili $\Delta = \mathbb{R}$). Stavimo $B := C(\beta\Delta, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$. Neka je B_1 C*-podalgebra od B koja se sastoji od svih funkcija $f \in B$ za koje postoje kompleksni brojevi $\lambda_1(f)$, $\lambda_2(f)$ i $\lambda_3(f)$ takvi da je $f(y) = \mathrm{diag}(\lambda_1(f), \lambda_2(f))$ i $f(z) = \mathrm{diag}(\lambda_2(f), \lambda_3(f))$ i neka je A C*-podalgebra od B_1 koja se sastoji od svih funkcija $f \in B_1$ za koje je $\lambda_1(f) = \lambda_3(f) = 0$. Tada vrijedi

(i) C*-algebra B_1 sadrži Glimmov ideal koji nije 2-primalan;

(ii) $\mathrm{Prim}(A)$ je Hausdorffov prostor (pa je specijalno svaki Glimmov ideal od A primitivan, dakle primalan);

(iii) $B_1 = M(A)$.

Dokaz. (i). Za svako $x \in \Delta \setminus \{y,z\}$ neka je $\pi_x : B_1 \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ ireducibilna reprezentacija od B_1 dana s $\pi_x : f \mapsto f(x)$, te neka su $\lambda_i : B_1 \to \mathbb{C}$ $(1 \leq i \leq 3)$ pripadne 1-dimenzionalne (dakle ireducibilne) reprezentacije od B_1 dane s $\lambda_i : f \mapsto \lambda_i(f)$. Tada je

$$\mathrm{Prim}(B_1) = \{\ker \pi_x : \ x \in \Delta \setminus \{y,z\}\} \cup \{\ker \lambda_1, \ker \lambda_2, \ker \lambda_3\}.$$

Očito je $\ker \lambda_1 \approx \ker \lambda_2 \approx \ker \lambda_3$, pa je

$$\mathrm{Glimm}(A) = \{\ker \pi_x : \ x \in \Delta \setminus \{y,z\}\} \cup \{G\},$$

gdje je $G := \ker \lambda_1 \cap \ker \lambda_2 \cap \ker \lambda_3$ (2-homogeni ideal od B_1). Primijetimo da Glimmov ideal G nije 2-primalan. Zaista, neka su U i V redom disjunktne otvorene okoline od y i z u $\beta\Delta$ i neka su K_U i K_V redom ideali od B_1 koji se sastoje od svih funkcija iz B_1 koje iščezavaju van U i V. Tada je očito $K_U K_V = \{0\}$, ali $K_U, K_V \nsubseteq G$.

(ii). Primijetimo da je $A = \{f \in B_1 : \ \lambda_1(f) = \lambda_3(f) = 0\}$ je zatvoren ideal od B_1 i da je

$$\mathrm{Prim}(A) = \{\ker \pi_x : \ x \in \Delta \setminus \{y,z\}\} \cup \{\ker(\lambda_2|_A)\}.$$

Kao topološki prostor, $\mathrm{Prim}(A)$ je homeomorfan kompaktnom Hasudorffovom prostoru dobivenom iz $\beta\Delta$ identifikacijom točaka y i z.

(iii). Stavimo $J := C_0(\Delta, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$. Tada je $M(J) = C_b(\Delta, \mathrm{M}_2(\mathbb{C})) = C_b(\beta\Delta, \mathrm{M}_2(\mathbb{C})) = B$. Kako je J esencijalni ideal od A, on je esencijalan i u $M(A)$, odakle slijedi $J \subseteq A \subseteq M(A) \subseteq M(J) = B$. Sada se lako direktnim računom provjeri da za funkciju $f \in B$ vrijedi $fA \subseteq A$ i $Af \subseteq A$ ako i samo ako je $f \in B_1$. Dakle, $M(A) = B_1$. $\square$

Poglavlje 3

Problem surjektivnosti od Θ_A

Neka je A C*-algebra i neka je $\Theta_A : M(A) \otimes_h M(A) \to \mathrm{ICB}(A)$ kanonska kontrakcija (definicija 2.4.6). Kao što smo već istaknuli, operatori iz slike od Θ_A imaju neka dobra svojstva koja općenito ne dijele svi operatori iz $\mathrm{ICB}(A)$. Zato je prirodno pitati se koliko slika od Θ_A može biti velika. Magajna je u svom nedavnom radu [48] promatrao sljedeći problem:

Problem 3.0.20 Karakterizirati sve C*-algebre A za koje je Θ_A surjekcija.

Očito je da je Θ_A surjekcija za sve konačno dimenzionalne C*-algebre, kao i sve komutativne C*-algebre. Iduća šira klasa C*-algebri za koje nije teško ispitati surjektivnost od Θ_A je klasa homogenih C*-algebri. Kako bi izbjegli dodatne tehničke komplikacije, najprije ćemo se ograničiti na klasu σ-unitalnih C*-algebri (a zatim na klasu separabilnih C*-algebri). Za slučaj homogenih C*-algebri, imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 3.0.21 Neka je A σ-unitalna n-homogena C*-algebra. Tada je Θ_A surjekcija ako i samo ako je A konačnog tipa. Štoviše, u tom slučaju vrijedi $\mathrm{ICB}(A) = \mathrm{IB}(A) = \mathrm{E}(A)$.

Dokaz. Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj nad prostorom $\Delta := \mathrm{Prim}(A)$ čija su vlakna izomorfna s $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ takav da je $A \cong \Gamma_0(E)$ (egzistencija takvog svežnja slijedi iz teorema 1.10.6). Kako je A σ-unitalna, Δ je lokalno kompaktan σ-kompaktan Hausdorffov prostor, stoga i parakompaktan.

Najprije pretpostavimo da je E konačnog tipa i neka je $\{U_j\}_{1\leq j\leq m}$ konačan otvoreni pokrivač od Δ takav da je $E|_{U_j} \cong U_j \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (izomorfizam C*-svežnjeva) za sve $1 \leq j \leq m$. Kako je Δ parakompaktan, koristeći (konačnu) particiju jedinice podređenu pokrivaču $\{U_j\}_{1\leq j\leq m}$, dokaz možemo reducirati na slučaj kada je $m = 1$, tako da možemo pretpostaviti da je $A \cong C_0(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$. Stavimo $Z_0 := C_0(\Delta) \cong Z(A)$. Neka je $\phi \in \mathrm{IB}(A) = \mathrm{ICB}(A)$ (napomena 2.4.3 (i)). Prema napomeni 2.4.3 (ii), operator ϕ je Z_0-modularan. Neka su, kao i prije, $(e_{i,j})$ standardne matrične jedinice u $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, te neka su $\eta_{k,l} : \mathrm{M}_n(Z_0) \to Z_0$ $(1 \leq k, l \leq n)$ operatori definirani s $\eta_{k,l}([z_{i,j}]) := z_{k,l}$. Tada su

$$\phi_{k,i}^{j,l} : Z_0 \to Z_0, \quad \phi_{k,i}^{j,l}(z) := \eta_{k,l}(\phi(z e_{i,j})) \quad (z \in Z_0)$$

Z_0-bimodularni operatori (dakle dvostruki centralizatori, jer je Z_0 komutativna), pa postoje $c_{k,i}^{j,l} \in Z := C_b(\Delta) = M(Z_0)$ takvi da je

$$\phi_{k,i}^{j,l}(z) = c_{k,i}^{j,l} z \quad (z \in Z_0).$$

Tada za $[z_{i,j}] = \sum_{i,j=1}^n z_{i,j} e_{i,j} \in \mathrm{M}_n(Z_0)$ imamo

$$\begin{aligned} \phi([z_{i,j}]) &= \sum_{i,j=1}^n \phi(z_{i,j} e_{i,j}) = \sum_{i,j,k,l=1}^n \eta_{k,l}(\phi(z_{i,j} e_{i,j})) e_{k,l} = \sum_{i,j,k,l=1}^n \phi_{k,i}^{j,l}(z_{i,j}) e_{k,l} \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n c_{k,i}^{j,l} z_{i,j} e_{k,l} = \sum_{i,j,k,l=1}^n z_{i,j} \left(\sum_{r,s=1}^n c_{k,s}^{r,l} e_{k,s} e_{i,j} e_{r,l} \right) \\ &= \sum_{k,l,r,s=1}^n c_{k,s}^{r,l} e_{k,s} \left(\sum_{i,j=1}^n z_{i,j} e_{i,j} \right) e_{r,l} = \sum_{k,l,r,s=1}^n c_{k,s}^{r,l} e_{k,s} [z_{i,j}] e_{r,l}. \end{aligned}$$

Dakle, ϕ je elementarni operator na A s koeficijentima u multiplikatorskoj algebri $\mathrm{M}_n(Z)$ od A.

Obratno, pretpostavimo da E nije konačnog tipa. Prema teoremu 1.10.9 E nije konačnog tipa niti kao vektorski svežanj, pa prema lemi 1.10.10 za svaki konacan skup $\{a_1, \dots, a_m\}$ prereza iz $\Gamma_b(E)$ postoji točka $s_0 \in \Delta$ takva da je

$$\mathrm{span}\{a_1(s_0), \dots, a_m(s_0)\} \subsetneqq E(s_0).$$

Tada za svaki elementarni operator $T \in \mathrm{E}(A)$ postoji točka $s_0 \in \Delta$ takva da je inducirani elementarni operator T_{s_0} na vlaknu $E(s_0) \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ duljine ne veće od $n^2 - 1$. S druge strane, promotrimo (normaliziran) centralni trag τ na A (definiran s $\tau(x)(s) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} x(s)$, $s \in \Delta$). Očito τ čuva sve (primitivne ideale od A, pa stoga i sve) ideale od A. Dakle, $\tau \in \mathrm{ICB}(A)$. Za svaku točku $s \in \Delta$ inducirani elementarni operator τ_s na vlaknu $E(s) \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ je duljine n^2. Naime, imamo $\tau(x)(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{i,j} x(s) e_{j,i}$. Uzevši u obzir prethodno razmatranje, zaključujemo da je udaljenost od τ do $\mathrm{E}(A)$ je veća ili jednaka od (pozitivne) udaljenosti od τ_s do (zatvorenog) skupa elementarnih operatora na $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ duljine ne veće od $n^2 - 1$. Specijalno, $\tau \notin \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$, a pogotovo $\tau \notin \operatorname{Im} \Theta_A$. $\square$

Naravo, iz prethodne propozicije odmah slijedi:

Korolar 3.0.22 Ako je A konačna direktna suma σ-unitalnih homogenih C*-algebri konačnog tipa, tada je $\mathrm{ICB}(A) = \mathrm{IB}(A) = \mathrm{E}(A)$.

$\square$

U ovom trenutku prirodno je pitati se postoje li i još neke C*-algebre za koje je Θ_A surjekcija, a koje nisu obuhvaćene korolarom 3.0.22. Magajna je u već spomenutom članku [48] dokazao da je odgovor na to pitanje negativan (barem u separabilnom slučaju). U ovom poglavlju iznosimo njegov dokaz.

3.1 Redukcija na subhomogene C*-algebre

Lema 3.1.1 Neka je A C*-algebra i neka je $\omega \in \mathrm{P}(A)$ čisto stanje na A. Tada postoji padajuća mreža (u_α) pozitivnih elemenata norme 1 u minimalnoj unitizaciji $\tilde{A}$ od A takva da vrijedi $\omega(u_\alpha) = 1$ za sve α, te

$$\lim_{\alpha} \|u_\alpha x u_\alpha - \omega(x) u_\alpha^2\| \quad \text{za sve } x \in A.$$

Dokaz. Budući da je $\omega \in \mathrm{P}(A)$, prema Kadisonovom teoremu tranzitvnosti (teorem 1.2.14) možemo naći pozitivni element $e \in A_+$ takav da vrijedi $\omega(e) = \|e\| = 1$. Neka je L_ω kao u (1.5) i stavimo $B := L_\omega \cap L_\omega^*$ (ovdje je $L_\omega^* = \{x^* : \ x \in L_\omega\}$). Budući da je L_ω zatvoren lijevi ideal u A, iz teorema 1.1.28 slijedi da je B hereditarna C*-podalgebra od A. Neka je (e_α) aproksimativna jedinica za B i stavimo

$$u_\alpha := e^{\frac{1}{2}}(1 - e_\alpha)e^{\frac{1}{2}}.$$

Tada je (u_α) padajuća mreža u A_+ za koju vrijedi $u_\alpha \leq e$ i $\omega(u_\alpha) = 1$ za sve α.

Za proizvoljni $x \in A$ imamo

$$\omega(e^{\frac{1}{2}}(x - \omega(x)1)e^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Kako je $\omega \in \mathrm{P}(A)$, iz teorema 1.2.11 slijedi $\ker \omega = L_\omega + L_\omega^*$, pa postoje elementi $a, b \in L_\omega$ za koje vrijedi

$$e^{\frac{1}{2}}(x - \omega(x)1)e^{\frac{1}{2}} = a + b^*.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(x - \omega(x)1)u_\alpha\| &\leq \|(1 - u_\alpha)(a + b^*)(1 - u_\alpha)\| \\ &\leq \|a(1 - u_\alpha)\| + \|(1 - u_\alpha)b^*\| \\ &= \|a(1 - u_\alpha)\| + \|b(1 - u_\alpha)\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Lema 3.1.2 Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $A \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H})$ ireducibilna C*-algebra. Nadalje, neka su $x_1, \ldots, x_n \in A$ proizvoljni elementi, $g \in A_+ \setminus \{0\}$, $B := \overline{\overline{gAg}}$ hereditarna C*-podalgebra od A generirana s g i $\varepsilon > 0$. Ako je $\operatorname{rang} g > n$ tada postoje $e, f \in B_+$ takvi da je $\|e\| = \|f\| = 1$ i

$$\|e x_j f\| < \varepsilon \ \ (1 \leq j \leq n).$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{K} := \overline{\overline{\operatorname{span}}}\{b\xi : \ b \in B, \ \xi \in \mathcal{H}\}$ esencijalni prostor od B (preciznije, od jedinične reprezentacije od B na $\mathcal{H}$) i izaberimo jedinični vektor $\eta \in \mathcal{K}$. Kako je $B\mathcal{K}^\perp = \{0\}$, imamo $b = (b|_\mathcal{K}) \oplus (0|_{\mathcal{K}^\perp})$. Prema teoremu 1.2.5 $B|_\mathcal{K}$ je ireducibilna i $\dim \mathcal{K} > n$ (jer je $\operatorname{rang} g > n$). Neka je $p_\mathcal{K}$ ortogonalni projektor na potprostor $\mathcal{K}$. Prema Kadisonovom teoremu tranzitivnosti (teorem 1.2.14) postoji $e \in B$ takav da je $\|e\| = 1$ i $eP_{\mathcal{K}}x_j\eta = 0$, za sve $1 \le j \le n$. Kako je $e(1 - p_{\mathcal{K}}) = 0$, imamo

$$ex_j\eta = 0 \quad (1 \le j \le n).$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $e \in A_+$ (u protivnom zamjenimo e sa e^*e). Prema korolaru 1.2.15 $B|_{\mathcal{K}}$ je i algebarski ireducibilna, pa postoji $b \in B_+$ takav da je $\|b\| = 1$ i $b\eta = \eta$. Tada se vektorsko stanje $\omega_\eta(x) := \langle x\eta, \eta\rangle$ poništava na elementu

$$x_0 := \sum_{j=1}^{n} bx_j^* e^2 x_j b = \sum_{j=1}^{n} (ex_jb)^*(ex_jb) \in B_+.$$

Kako je $B|_{\mathcal{K}}$ ireducibilna ω_η je čisto stanje na B. Prema lemi 3.1.1 postoji $h \in B_+$ s $\|h\| = 1$, takav da vrijedi

$$\|hx_0h\| = \|hx_0h - \omega_\eta(x_0)h^2\| < \varepsilon^2 \quad \text{i} \quad \omega_\eta(h) = 1.$$

Kako je

$$(ex_jbh)^*(ex_jbh) = h(ex_jb)^*(ex_jb)h \le hx_0h \quad (1 \le j \le n),$$

slijedi $\|ex_jbh\| < \varepsilon$ za sve $1 \le j \le n$. Kako je $\|h\| = 1$ i $1 = \omega_\eta(h) = \langle h\eta, \eta\rangle = 1$, korištenjem SCB-nejednakosti (nejednakost (1.4)) dobivamo $h\eta = \eta$. Stavimo $f := |hb| = |(bh)^*|$. Tada je $f \in B_+$ i $\|f\| = 1$ (jer je $hb\eta = h\eta = \eta$). Napokon, koristeći polarnu dekompoziciju $(bh)^* = uf$ od $(bh)^*$ dobivamo

$$\|ex_jf\| = \|ex_jbhu\| = \|ex_jbh\| < \varepsilon \quad \text{za sve } 1 \le j \le n.$$

□

Lema 3.1.3 Neka je A separabilna C*-algebra koja dopušta beskonačno dimenzionalnu ireducibilnu reprezentaciju $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$. Tada postoje ortogonalni nizovi (e_n) i (f_n) pozitivnih elemenata norme 1 u A_+ takvi da je $\|\pi(e_n)\| = \|\pi(f_n)\| = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i takvi da red

$$\phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e_n x f_n \tag{3.1}$$

konvergira u normi od A za svako $x \in A$.

Dokaz. Kako je $\pi(A)$ ireducibilna i $\mathcal{H}_\pi$ beskonačno dimenzionalan, $\pi(A)$ je beskonačno dimenzionalna. Prema propoziciji 1.1.25 svaka maksimalna samoadjungirana podalgebra od $\pi(A)$ je također beskonačno dimenzionalna, pa iz iste propozicije slijedi egzistencija ortogonalnog niza $(\dot{g}_n)$ norme 1 u $\pi(A)_+$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\operatorname{rang} \dot{g}_n > n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ (u protivnom napravimo zamjenu $\dot{g}_2 \leftarrow \dot{g}_2 + \dot{g}_3$, $\dot{g}_3 \leftarrow \dot{g}_4 + \dot{g}_5 + \dot{g}_6, \ldots$). Stavimo $P := \ker \pi \in \operatorname{Prim}(A)$ i identificirajmo $\pi(A)$ s A/P. Neka je (x_n) ograničen niz u A čija je linearna ljuska gusta u A. Prema lemi 3.1.2, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje elementi $\dot{e}_n, \dot{f}_n \in \overline{\overline{(\dot{g}_n\pi(A)\dot{g}_n)}}_+$

takvi da je $\|\dot{e}_n\| = \|\dot{f}_n\| = 1$ i

$$\|\dot{e}_n \pi(x_j) \dot{f}_n\| < \frac{1}{2^n} \text{ za sve } 1 \leq j \leq n. \tag{3.2}$$

Kako su je niz $(\dot{g}_n)$ ortogonalan, isto vrijedi za nizove $(\dot{e}_n)$ i $(\dot{f}_n)$. Prema propoziciji 1.1.26 nizove $(\dot{e}_n)$ i $(\dot{f}_n)$ možemo redom podići do pozitivnih ortogonalnih nizova $(\tilde{e}_n)$ i $(\tilde{f}_n)$ norme 1 u A_+. Neka je (u_k) (prebrojiva) aproksimativna jedinica za P. Prema (1.1), za svako $x \in A$ imamo

$$\|\pi(x)\| = \|x + P\| = \lim_k \|(1 - u_k)x\| = \lim_k \|(1 - u_k)x(1 - u_k)\|.$$

Prema (3.2), za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji u_n takav da je

$$\|(1 - u_n)\tilde{e}_n x_j \tilde{f}_n (1 - u_n)\| < \frac{1}{2^n} \text{ za sve } 1 \leq j \leq n. \tag{3.3}$$

Napokon, stavimo $e_n := \tilde{e}_n(1 - u_n)\tilde{e}_n$ i $f_n := \tilde{f}_n(1 - u_n)\tilde{f}_n$. Tada su (e_n) i (f_n) ortogonalni nizovi norme 1 u A_+ (jer je $\|\pi(e_n)\| = \|\pi(f_n)\| = 1$ i $\|e_n\|, \|f_n\| \leq 1$), pa iz (3.3) slijedi

$$\|e_n x_j f_n\| < \frac{1}{2^n} \text{ za sve } 1 \leq j \leq n. \tag{3.4}$$

Kako je $\| \sum_{n=1}^{\infty} e_n^2 \| = \max_n \|e_n^2\| = 1$ (po ortogonalnosti) i $\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \| = 1$, slijedi da je s (3.1) definirana (potpuna) kontrakcija s A u omotačku von Neumannovu algebru A^{**} od A. Budući da je

$$\phi(x_j) = \sum_{n=1}^{j-1} e_n x_j f_n + \sum_{n=1}^{\infty} e_n x_j f_n,$$

pri čemu red s desne strane (apsolutno) konvergira u normi od A (zbog (3.4)), te kako je linearna ljuska niza (x_j) gusta u A, slijedi da je red (3.1) u normi konvergentan za svako $x \in A$. Dakle, $\phi(A) \subseteq A$. □

Primjer 3.1.4 Neka je $A := \mathrm{B}(\mathcal{H})$ i neka su $p_i \in A \setminus \{0\}$ $(1 \leq i \leq n)$ ortogonalni projektori. Definirajmo elementarni operator $T \in \mathrm{E}(A)$ s $T := \Theta_A(t)$, gdje je $t := \sum_{i=1}^n p_i \otimes p_i$. Očito je $\ell(T) = n$. Ako sa $\mathrm{E}_k(A)$ označimo skup svih elementarnih operatora na A duljine manje ili jednake k, tada je

$$d(T, \mathrm{E}_{n-1}(A)) = \inf\{\|T - S\| : \ S \in \mathrm{E}_{n-1}(A)\} \leq \frac{1}{n}.$$

Zaista, za $p := \sum_{i=1}^n p_i$ stavimo

$$u := \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{i,j} - \frac{1}{n}\right) p_i \otimes p_j \ \text{ i } \ v := \sum_{i,j=1}^n p_i \otimes p_j = \frac{1}{n} p \otimes p.$$

Kako je $t-u=v$, za $S:=\Theta_A(u)$ imamo

$$\|T-S\| = \frac{1}{n}\|\Theta_A(p\otimes p)\| = \frac{1}{n}.$$

Tvrdimo da je $\ell(S)\leq n-1$. Kako bi to dokazali, primijetimo da je matrica $[\delta_{i,j}-\frac{1}{n}]\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (projektor) ranga $n-1$. Stoga, postoje matrice $[\alpha_{i,j}]\in \mathrm{M}_{n,n-1}(\mathbb{C})$ i $[\beta_{i,j}]\in \mathrm{M}_{n-1,n}(\mathbb{C})$ takve da je

$$\left[\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{i,k}\beta_{k,j}\right] = [\alpha_{i,j}][\beta_{i,j}] = \left[\delta_{i,j}-\frac{1}{n}\right].$$

Ako stavimo $a_k := \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k}p_i$ i $b_k := \sum_{i=1}^n \beta_{k,i}p_i$, imamo

$$u = \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{i,j}-\frac{1}{n}\right)p_i\otimes p_j = \sum_{i,j=1}^n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{i,k}\beta_{k,j}p_i\right)\otimes p_j = \sum_{k=1}^{n-1}a_k\otimes b_k.$$

Lema 3.1.5 Neka su (e_i) i (f_i) ortogonalni pozitivni nizovi norme 1 u $\mathrm{B}(\mathcal{H})_+$. Za svako $n\in\mathbb{N}$ stavimo

$$t_n := \sum_{i=1}^n e_i\otimes f_i \in \mathrm{B}(\mathcal{H})\otimes\mathrm{B}(\mathcal{H}) \ \text{ i } \ T_n := \Theta_{\mathrm{B}(\mathcal{H})}(t_n).$$

Tada za svako $m\in\mathbb{N}$ postoji $n(m)\in\mathbb{N}$ takav da za sve $n\geq n(m)$ vrijedi

$$d(T_n, \mathrm{E}_m(\mathrm{B}(H))) = \inf\{\|T_n-S\| : \ S\in \mathrm{E}_m(\mathrm{B}(\mathcal{H}))\}\geq \frac{1}{5},$$

gdje smo sa $\mathrm{E}_m(\mathrm{B}(H))$ označili skup svih elementarnih operatora na $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ duljine manje ili jednake m.

Dokaz. Stavimo $A:=\mathrm{B}(\mathcal{H})$ i neka je $\kappa:\mathrm{E}(A)\to\mathrm{B}(A^*,A)$ operator definiran s

$$\kappa(\Theta_A(t))(\varphi) := (\varphi\otimes\mathrm{id})(t) \quad (t\in A\otimes A,\ \varphi\in A^*).$$

Ukoliko $\mathrm{E}(A)$ opskrbimo sa standardnom operatorskom normom

$$\|\Theta_A(t)\| = \sup\{\|\Theta_A(t)(x)\| : \ x\in\mathrm{Ball}(A)\},$$

primijetimo da je κ kontrakcija. Zaista, ako je $t=\sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i \in A\otimes A$ neka reprezentacija od t, tada imamo

$$\begin{aligned}
\|\kappa(\Theta_A(t))\| &= \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^n\varphi(a_i)b_i\right\| : \ \varphi\in\mathrm{Ball}(A^*)\right\}\\
&= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n\varphi(a_i)\omega(b_i)\right| : \ \varphi,\omega\in\mathrm{Ball}(A^*)\right\},
\end{aligned}$$

pri čemu se zadnji supremum ne mijenja ako φ i ω restringiramo na funkcionale ranga 1 (jer je $\mathrm{Ball}(\mathrm{B}(\mathcal{H})^*)$ slabo* zatvorenje konveksne ljuske funkcionala ranga 1 oblika $x \mapsto \langle x\xi, \eta\rangle$, gdje su $\xi, \eta \in \mathrm{Ball}(\mathcal{H})$), a tada je taj supremum jednak

$$\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i\right\| : \ x \in \mathrm{Ball}(A), \ \mathrm{rang}\, x \leq 1\right\},$$

što je dominirano s $\|\Theta_A(t)\|$.

Neka je T_n kao u iskazu leme. Za dani $S \in \mathrm{E}_m(A)$ sa $S = \Theta_A(u)$, gdje je $u = \sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i \in A \otimes A$ neka je $V := \mathrm{span}\{b_1, \ldots, b_m\}$ i $U := \mathrm{Ball}(V)$. Prema ortogonalnosti elemenata e_i, postoji $\varphi_i \in \mathrm{Ball}(A^*)$ takav da je $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Dakle,

$$\varepsilon := \|T_n - S\| \geq \|\kappa(T_n) - \kappa(S)\| \geq \|\kappa(T_n)(\varphi_i) - \kappa(S)(\varphi_i)\| = \left\|f_i - \sum_{j=1}^{m} \varphi_i(a_j) b_j\right\|.$$

Odavde slijedi da je udaljenost od f_i do V najviše ε, a kako je $\|f_i\| = 1$, imamo $d(f_i, U) \leq 2\varepsilon$. Dakle, možemo naći $h_i \in U$ s $\|f_i - h_i\| \leq 2\varepsilon$, odakle slijedi (jer je $\|f_i - f_j\| = 1$ za $i \neq j$)

$$\|h_i - h - j\| \geq \|f_i - f_j\| - \|f_i - h_i\| - \|f_j - h_j\| \geq 1 - 4\varepsilon.$$

Pretpostavimo da je $\varepsilon < 1/5$, tako da je $\|h_i - h_j\| > 1/5$ za sve $i \neq j$. Ako V opskrbimo sa odgovarajućom euklidskom normom $\|\cdot\|_2$ (tako da proglasimo Auerbachovu bazu za V ortogonalnom), tada imamo $\|\xi\|/\sqrt{m} \leq \|\xi\|_2 \leq \|\xi\|\sqrt{m}$ za sve $\xi \in V$. Odavde slijedi da je $\|h_i - h_j\|_2 > 1/(5\sqrt{m})$ za sve $i \neq j$, dok su vektori h_i $(1 \leq i \leq i)$ sadržani u istoj, najviše m-dimenzionalnoj euklidskoj kugli radijusa $\sqrt{m}$. To je očito nemoguće za dovoljno velike n. □

Sada ćemo iz pretpostavke $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{ICB}(A)$ (gdje je A separabilna) napraviti prvu redukciju; dokazat ćemo da je A nužno subhomogena. Štoviše, imamo i jaču tvrdnju:

Teorem 3.1.6 Neka je A separabilna C*-algebra. Ako je $\mathrm{ICB}(A) = \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$ tada je A subhomogena.

Dokaz. Najprije dokažimo da su sve ireducibilne reprezentacije od A nužno konačno dimenzionalne. Pretpostavimo suprotno; neka je $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ beskonačno-dimenzionalna ireducibilna reprezentacija od A i neka je $\phi \in \mathrm{ICB}(A)$ operator definiran u lemi 3.1.3. Očito je $\phi \in \mathrm{ICB}(A)$ i neka je $\phi_\pi \in \mathrm{ICB}(\pi(A))$ inducirani operator (dan s $\phi_\pi(\pi(x)) = \pi(\phi(x))$, $x \in A$). Budući da red (3.1) kojim je ϕ definiran konvergira u normi za sve $x \in A$, slijedi

$$\phi_\pi(\pi(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(e_n)\pi(x)\pi(f_n) \quad (x \in A),$$

te po istoj formuli ϕ_π se na jedinstven način proširuje do ultraslabo neprekidnog (potpuno ograničenog) operatora $\overline{\phi_\pi}$ na $\mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ (jer je $\mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ ultraslabo zatvorenje od $\pi(A)$). Prema pretpostavci imamo $\phi \in \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$. Naravno, odavde slijedi i da je $\phi_\pi \in \overline{\overline{\mathrm{E}(\pi(A))}}$, a kako se prema teoremu Kaplanskog o gustoći (teorem 1.3.6) norma svakog ultraslabo neprekidnog operatora na $\pi(A)$ podudara s normom njegovog ultraslabog proširenja na $\overline{\pi(A)}$, slijedi i da je $\overline{\phi_\pi} \in \overline{\overline{\mathrm{E}(\mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi))}}$. Specijalno, postoji $S \in \mathrm{E}(\mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi))$, $S = \Theta_{\mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)}(\sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j)$ takav da je

$$\|\overline{\phi_\pi} - S\| < \frac{1}{5}. \tag{3.5}$$

Za svako $N \in \mathbb{N}$ neka su redom P_N i Q_N ortogonalni projektori na prostore $\sum_{n=1}^N \pi(e_n)\mathcal{H}_\pi$ i $\sum_{n=1}^N \pi(f_n)\mathcal{H}_\pi$. Prema ortogonalnosti nizova (e_n) i (f_n), operator $P_N\overline{\phi_\pi}Q_N$ je elementaran i oblika

$$P_N\overline{\phi_\pi}Q_N(x) = \sum_{n=1}^N \pi(e_n)x\pi(f_n) \quad (x \in \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)).$$

Iz (3.5) slijedi

$$\|P_N\overline{\phi_\pi}Q_N - P_NSQ_N\| \leq \|\overline{\phi_\pi} - S\| < \frac{1}{5}$$

za sve $N \in \mathbb{N}$, što je u kontradikciji s lemom 3.1.5, jer je P_NSQ_N elementarni operator na $\mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ duljine ne veće od m.

Dakle, svaka ireducibilna reprezentacija π od A je konačno dimenzionalna, pa je $\pi(A)$ izomorfna matričnoj algebri $\mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ za neko $r \in \mathbb{N}$. Specijalno, A je liminalna, pa su primitivni ideali u A maksimalni i $\hat{A}$ možemo identificirati s $\mathrm{Prim}(A)$. Budući da je A separabilna, prema teoremu 1.4.18 skup svih separiranih točaka S u $\mathrm{Prim}(A)$ je gust (kako je A liminalna, $\mathrm{Prim}(A)$ je T_1-prostor). Ako je S konačan, tada je $S = \mathrm{Prim}(A)$, pa je A konačno dimenzionalna i dokaz u tom slučaju je završen. Pretpostavimo da je S beskonačan. Prema teoremu 1.10.2, funkcije traga $[\pi] \mapsto \mathrm{tr}\,\pi(g)$ su odozdo poluneprekidne na $\hat{A}$ za svako $g \in A_+$, pa isto vrijedi i za funkciju ranga $[\pi] \mapsto \mathrm{rang}\,\pi(g)$ (jer je $\mathrm{rang}\,\pi(g) = \sup_n \mathrm{tr}\,\sqrt[n]{\pi(g)}$ ako je $\|g\| \leq 1$). Dakle, ako pretpostavimo da je $\sup_{[\pi]\in\hat{A}} \dim\pi = \infty$, tada postoji niz $([\sigma_k])$ u S takav da vrijedi $\lim_k \dim\sigma_k = \infty$. Najprije pretpostavimo da niz $([\sigma_k])$ ima točku gomilanja $[\sigma] \in \hat{A}$. Kako je $[\sigma_1]$ separirana točka, postoje disjunktne otvorene okoline U_1 od $[\sigma_1]$ i V_1 od $[\sigma]$. Stavimo $[\pi_1] := [\sigma_1]$ i izaberimo bilo koju točku $[\pi_2] \in V_1 \cap \{[\sigma_k] :\ k \in \mathbb{N}\}$ za koju je $\dim\pi_2 > 2 \cdot 3$. Kako je $[\pi_2]$ separirana točka, postoje disjunktne otvorene okoline $U_2 \subseteq V_1$ od $[\pi_2]$ i $V_2 \subseteq V_1$ od $[\sigma]$. Nastavljajući taj proces, dolazimo do niza $([\pi_k])$ u $\hat{A}$ takvog da vrijedi $\dim\pi_k > k(k+1)$, zajedno sa otvorenim okolinama U_k od $[\pi_k]$ i V_k od $[\sigma]$ za koje vrijedi $U_k \cap V_k = \emptyset$ i $U_{k+1}, V_{k+1} \subseteq V_k$. Specijalno, imamo

$$U_n \cap \bigcup_{k\neq n} U_k = \emptyset,$$

odakle slijedi $[\pi_k] \notin U_n$ za $k \neq n$. Dakle, jezgra $P_n := \ker\pi_n$ nije sadržana u zatvaraču skupa $\{P_k :\ k \neq n\}$. Ukoliko niz $([\sigma_k])$ nema točku gomilanja, za $([\pi_k])$ možemo uzmemeti bilo koji podniz od $([\sigma_k])$ za kojeg je $\dim\pi_k > k(k+1)$. Naravno, tada se $P_n := \ker \pi_n$ također ne nalazi u zatvaraču skupa $\{P_k : k \neq n\}$. Ako stavimo

$$R_n := \bigcap_{k \neq n} P_k,$$

slijedi da $R_n \nsubseteq P_n$, pa je $P_n + R_n = A$ (jer je P_n maksimalan). Kako je $\pi_n(A) \cong \mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ za neko $r > n(n+1)$, postoje međusobno ortogonalni projektori $\pi_n(g_{n,i})$ $(1 \leq i \leq n)$ u $\pi_n(A)$ takvi da je

$$\operatorname{rang} \pi_n(g_{n,i}) > n \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_n(g_{n,i}) = 1.$$

Prema propoziciji 1.1.26 te projektore možemo podići do međusobno ortogonalnih pozitivnih kontrakcija $g_{n,i} \in A_+$ $(1 \leq i \leq n)$. Štoviše, kako je $R_{n+} + P_{n+} = A_+$ i $P_n = \ker \pi_n$, možemo postići da je $g_{n,i} \in R_{n+}$. Stavimo $\tilde{g}_n := \sum_{i=1}^{n} g_{n,i}$ i definirajmo niz (g_n) rekurzivno, s

$$g_1 := g_{n,1} \quad g_n := (1 - g_1 - \cdots - g_{n-1})\tilde{g}_n(1 - g_1 - \cdots - g_{n-1}).$$

Kako je $h^2 \leq h$ za sve $0 \leq h \leq 1$, indukcijom se lako pokaže da je $\sum_{n=1}^{m} g_n \leq 1$ za sve $m \in \mathbb{N}$. Dakle, imamo $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \leq 1$ (SOT-konvergencija u A^{**}), te $\pi_n(g_n) = 1$ (jer je $\pi_n(\tilde{g}_n) = 1$ i $g_m \in R_m \subseteq P_n = \ker \pi_n$ za $m \neq n$).

Neka je (x_j) niz u $\mathrm{Ball}(A)$ čija je linearna ljuska gusta u A. Prema lemi 3.1.2, postoje pozitivni elementi $\dot{e}_{n,i}$ i $\dot{f}_{n,i}$ norme 1 u $\overline{\overline{\pi_n(g_{n,i}Ag_{n,i})}} = \pi_n(g_{n,i}Ag_{n,i})$ takvi da vrijedi

$$\|\dot{e}_{n,i}\pi_n(x_j)\dot{f}_{n,i}\| < \frac{1}{n2^n} \quad (1 \leq i, j \leq n). \tag{3.6}$$

Primijetimo da je $\sum_{i=1}^{n} \dot{e}_{n,i} \leq 1$ i $\sum_{i=1}^{n} \dot{f}_{n,i} \leq 1$ zbog međusobne ortogonalnosti projektora $\pi_n(g_{n,i})$ (za fiksno n). Prema propoziciji 1.1.26, za svako n element $\dot{e}_{n,1}$ možemo podići do pozitivnog elementa $e_{n,1}$ u A za kojeg vrijedi $e_{n,1} \leq g_n$ (jer je $\dot{e}_{n,1} \leq 1 = \pi_n(g_n)$). Induktivno, pretpostavimo da za neko $i < n$ već imamo elemente $e_{n,j}$ $(1 \leq j \leq i)$ u A_+ takve da vrijedi $\pi_n(e_{n,j}) = \dot{e}_{n,j}$ i $e_{n,1} + \cdots + e_{n,i} \leq g_n$. Kako je

$$\dot{e}_{n,i+1} \leq 1 - (\dot{e}_{n,1} + \cdots + \dot{e}_{n,i}) = \pi_n(g_n - (e_{n,1} + \cdots + e_{n,i})),$$

ponovno, koristeći propoziciju 1.1.26, nalazimo element $e_{n,i+1} \in A_+$ takav da vrijedi $\pi_n(e_{n,i+1}) = \dot{e}_{n,i+1}$ i $e_{n,i+1} \leq g_n - (e_{n,1} + \cdots + e_{n,i})$. Dakle, možemo naći elemente $e_{n,i}$ takve da vrijedi $\sum_{i=1}^{n} e_{n,i} \leq g_n$. Slijedi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} e_{n,i} \leq 1. \tag{3.7}$$

Slično bismo našli i elemente $f_{n,i} \in A_+$ takve da vrijedi $\pi_n(f_{n,i}) = \dot{f}_{n,i}$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} e_{n,i} \leq 1. \tag{3.8}$$

Za dano $u \in P_n$ s $0 \leq u \leq 1$, elemente $e_{n,i}$ ($1 \leq i \leq n$, n fiksan) sa elementima $|(1-u)e_{n,i}|^2$ tako da (3.7) ostane očuvano (naime, imamo $e_{n,i}(1-u)^2 e_{n,i} \leq e_{n,i}^2 \leq e_{n,i}$). Ako je (u_α) aproksimativna jedinica za P, tada iz (3.6) dobivamo

$$\begin{aligned} \inf_\alpha \|e_{n,i}(1-u_\alpha)^2 e_{n,i} x_j f_{n,i}\| &\leq \lim_\alpha \|(1-u_\alpha)e_{n,i}x_j\| \\ &= \|\dot{e}_{n,i}\pi_n(x_j)\dot{f}_{n,i}\| \\ &< \frac{1}{n2^n} \quad (1 \leq i, j \leq n). \end{aligned}$$

Dakle, kako je $e^2 \leq e$ za $0 \leq e \leq 1$, možemo pretpostaviti da smo elemente $(e_{n,i})$ i $(f_{n,i})$ izabrali tako da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} e_{n,i}^2 \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_{n,i}^2 \leq 1, \tag{3.9}$$

$$\pi_n(e_{n,i})\pi_n(e_{n,j}) = 0 = \pi_n(f_{n,i})\pi_n(f_{n,j}) \ (i \neq j), \quad \|\pi_n(e_{n,i})\| = 1 = \|\pi_n(f_{n,i})\| \tag{3.10}$$

$$\text{i} \quad \|e_{n,i}x_j f_{n,i}\| < \frac{1}{n2^n} \quad (1 \leq i, j \leq n). \tag{3.11}$$

Prema (3.9) s

$$\phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} e_{n,i} x f_{n,i} \quad (x \in A) \tag{3.12}$$

je dobro definirana potpuna kontrakcija $\phi : A \to A^{**}$. Kako je linearna ljuska od (x_j) gusta u A, iz (3.11) slijedi da red u (3.12) konvergira u normi za sve $x \in A$, pa je $\phi \in \mathrm{ICB}(A)$.

Ako bi postojao $S \in \mathrm{E}(A)$ duljine m takav da je $\|\phi - S\| < 1/5$, tada bi također imali

$$\|\phi_n - S_n\| < \frac{1}{5}, \tag{3.13}$$

gdje su redom ϕ_n i S_n inducirani operatori na $\pi_n(A) \cong A/P_n \cong \mathrm{M}_{r(n)}(\mathbb{C})$ od ϕ i S. Kako je $\pi_n(e_{m,i}) = 0$ za $m \neq n$ (jer je $e_{m,i} \leq g_m$), imamo

$$\phi_n(\dot{x}) = \sum_{i=1}^{n} \dot{e}_{n,i}\dot{x}\dot{f}_{n,i} \quad (\dot{x} \in A/P_n).$$

Budući da svaku ireducibilnu reprezentaciju od A možemo proširiti do ireducibilne reprezentacije od $M(A)$ na istom Hilbertovom prostoru (teorem 1.2.4), slijedi da je $S_n \in \mathrm{E}(A/P_n)$ duljine ne veće od m. Prema lemi 3.1.5, nejednakost (3.13) ne može vrijediti za sve n, pa je $\|\phi - S\| > 1/5$. Specijalno, $\phi \notin \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$. □

3.2 Multiplikatorska algebra homogene C*-algebre

Lema 3.2.1 Neka je A n-subhomogena C*-algebra, J n-homogeni ideal od A i $J^\perp$ anihilator od J. Stavimo $B := A/J^\perp$. Ako je $q := q_{J^\perp} : A \to B$ pripadni $*$-epimorfizam i K n-homogeni ideal od B, tada je K esencijalan u B i vrijedi $q(K) = J$.

Dokaz. Kako je $J \cap J^\perp = \{0\}$, restrikcija $q|_J$ je injektivna. Dakle, $q(J) \cong J$, pa je $q(J)$ n-homogena C*-algebra. Kako je $q(J)$ ideal od B, imamo $q(J) \subseteq K$. Tada je $J \subseteq q^{-1}(K)$, pa je $J + J^\perp \subseteq q^{-1}(K)$. Tvrdimo da je $J + J^\perp = q^{-1}(K)$. Pretpostavimo suprotno i neka je π ireducibilna reprezentacija od takva da je $\pi(J + J^\perp) = \{0\}$ i $\pi(q^{-1})(K) \neq \{0\}$ (takva postoji, jer je prema propoziciji 1.4.2 svaki ideal jednak presjeku primitivnih ideala koji ga sadrže). Kako je A subhomogena $\hat{A}$ možemo identificirati s $\mathrm{Prim}(A)$. Prema teoremu 1.10.2 skup

$$S := \{[\sigma] \in \hat{A} : \ \dim \sigma < n\}$$

je zatvoren u $\hat{A}$. Kako je $J = \bigcap\{\ker \sigma : \ [\sigma] \in S\}$, slijedi da se svaka (klasa) ireducibilne reprezentacije od A koja se poništava u J nalazi u S. Specijalno, iz $\pi(J) = \{0\}$ slijedi $[\pi] \in \bar{S} = S$, odnosno $\dim \pi < n$. Kako je i $\pi(J^\perp) = \{0\}$, π se spušta do ireducibilne reprezentacije σ od B (tako da vrijedi $\pi = \sigma \circ q$) i imamo $\sigma(K) \neq \{0\}$ (jer $\pi(q^{-1}(K)) \neq \{0\}$). No, $\dim \sigma = \dim \pi < n$, što je kontradikcija s definicijom od K kao presjeka svih jezgara ireducibilnih reprezentacija od B čija je dimenzija manja n. Dakle, $q(J) = K$.

Ideal $q(J)$ je očito esencijalan u $B = A/J^\perp$, jer iz $q(a)q(J) = \{0\}$ $(a \in A)$ slijedi $aJ \subseteq J^\perp \cap J = \{0\}$. Dakle, $a \in J^\perp$, odnosno $q(a) = 0$ u B. □

Lema 3.2.2 Neka je E odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad lokalno kompaktnim Haudorffovim prostorom Δ. Ako je C*-algebra $\Gamma_0(E)$ kvazicentralna, tada je $M(\Gamma_0(E)) = \Gamma_b(E)$.

Dokaz. Stavimo $J := \Gamma_0(E)$ i $M := \Gamma_b(E)$. Prema propoziciji 1.9.14, za svaki $a \in E$ postoji prerez $e \in J$ koji prolazi kroz a. Odavde odmah slijedi da je J esencijalan u M. Prema teoremu 1.1.37, dovoljno je dokazati da se za bilo koju C*-algebru A koja sadrži J kao esencijalni ideal može proširiti do $*$-homomorfizma $L : A \to M$. Za svako $s \in \Delta$ i $a \in A$ definirajmo preslikavanje $L_{s,a} : E(s) \to E(s)$ s

$$L_{s,a}(e(s)) := (ae)(s) \quad (e \in J).$$

Naravno, ovdje smo ponovno koristili propoziciju 1.9.14, da je svaki element od $E(s)$ oblika $e(s)$ za neko $e \in J$. Budući da takav e nije jedinstven, trebamo provjeriti da je definicija od $L_{s,a}$ dobra, tj. da iz $e(s) = 0$ slijedi $(ae)(s) = 0$. Zaista, imamo

$$(ae)(s)^*(ae)(s) = (e^*(a^*a)e)(s) \leq \|a\|^2(e^*e)(s) = \|a\|^2 e(s)^*e(s).$$

Odavde također slijedi i da je $\|L_{s,a}\| \leq \|a\|$. Očito je $L_{s,a}$ linearno, a kako bi pokazali da je $L_{s,a}$ operator lijevog množenja (induciran elementom iz $E(s)$), dovoljno je provjeriti da $L_{s,a}$ komutira sa svim operatorima desnog množenja $R_{f(s)}$ $(f \in J)$. Zaista, za svako $f \in J$ imamo

$$\begin{aligned}(L_{s,a} \circ R_{f(s)})(e(s)) &= L_{s,a}(e(s)f(s)) = L_{s,a}((ef)(s)) = (aef)(s) \\ &= (ae)(s)f(s) = L_{s,a}(e(s))f(s) = (R_{f(s)} \circ L_{s,a})(e(s)).\end{aligned}$$

Dakle, za svako $a \in A$ funkcija $L(a)$ koja svakom elementu $s \in \Delta$ pridružuje $L_{s,a}$ je ograničen prerez od E. Kako bi pokazali da je $L(a) \in M$, fiksirajmo $s_0 \in \Delta$ i izaberimo kompaktnu okolinu U oko s_0. Budući da je J kvazicentralna, prema napomeni 1.7.4 postoji centralni element $z \in Z(J)$ takav da je $z(s) = 1_{E(s)}$ za sve $s \in U$. Tada za $s \in U$ imamo

$$L(a)(s) = L(a)(s)1_{E(s)} = (az)(s),$$

tj. $L(a)|_U = (az)|_U$. Kako je točka $s_0 \in \Delta$ bila proizvoljna i kako je $az \in J$, slijedi $L(a) \in M$. Na kraju se još lako provjeri da je preslikavanje $a \mapsto L(a)$ kontraktivni homomorfizam sa A u M, dakle $*$-homomorfizam (napomena 2.1.4). □

Propozicija 3.2.3 Neka je J n-homogena C*-algebra. Tada je $M(J)$ n-homogena ako i samo ako je J konačnog tipa

Dokaz. Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj nad $\Delta := \text{Prim}(J)$ čija su sva vlakna izomorfna s $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ takav da je $J = \Gamma_0(E)$. Prema korolaru 1.10.15 $M(J)$ je n-subhomogena.

Pretpostavimo da je E konačnog tipa. Prema teoremu 1.10.9 E se može proširiti do lokalno trivijalnog C*-svežnja F nad Stone-Čechovu kompaktifikaciju $\beta\Delta$ od Δ čija su sva vlakna izomorfna s $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Tada je F direktni sumand trivijalnog svežnja, pa se svaki ograničen neprekidni prerez od E može na jedinstven način proširiti do neprekidnog prereza od F. Dakle, $\Gamma_b(E) \cong \Gamma(F)$. Iz leme 3.2.2 slijedi da je $M(J) = \Gamma_b(E)$, pa je $M(J) \cong \Gamma(F)$ n-homogena C*-algebra.

Obratno, pretpostavimo da je $M(J)$ n-homogena, $M(J) = \Gamma(F)$, za lokalno trivijalni C*-svežanj F nad $\text{Prim}(M(J))$. Primijetimo da $\text{Prim}(M(J))$ možemo identificirati sa $\beta\Delta$. Zaista, kako je $\text{Prim}(M(J))$ Hausdorffov prostor, iz Dauns-Hofmannovog teorema (teorem 1.4.19) slijedi

$$\text{Prim}(M(J)) \cong \text{Max}(Z(M(J))) \cong \beta\text{Prim}(J) = \beta\Delta.$$

Kako je J ideal u $M(J)$, postoji zatvoren podskup $\Lambda \subseteq \beta\Delta$ takav da je $J = \{e \in \Gamma(F) :\ e|_\Lambda = 0\}$. Posmatrajući karaktere od centra, slijedi $\Lambda = \beta\Delta \setminus \Delta$. Dakle, $J = \Gamma_0(F|_\Delta)$, a kako C*-svežanj $F|_\Delta$ možemo proširiti do lokalno trivijalnog svežnja F nad $\beta\Delta$, iz teorema 1.10.9 slijedi da je $E = F|_\Delta$ konačnog tipa. □

Napomena 3.2.4 Neka je M unitalna C*-algebra. Prema točki 1.9, M možemo poistovijetiti s $\Gamma_0(E_0)$, gdje je E_0 odozgo poluneprekini C*-svežanj nad (kompaktnim Hausdorffovim) prostorom $\mathrm{Glimm}(M) \cong \mathrm{Max}(Z(M))$ s vlaknima $E_0(G) := M/G$ ($G \in \mathrm{Glimm}(M)$). Ukoliko je M multiplikatorska algebra C*-algebre J sa primitivnim spektrom $\Delta := \mathrm{Prim}(J)$, tada je (prema Dauns-Hofmannovom teoremu) $\mathrm{Glimm}(M)$ homeomorfan Stone-Čechovoj kompaktifikaciji $\beta\Delta$ od Δ, pa na E_0 možemo gledati kao na odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad $\beta\Delta$.

Lema 3.2.5 Neka je A n-subhomogena C*-algebra. Ako je J n-homogeni ideal u A, tada je $\mathrm{Prim}(J) \subseteq \mathrm{Glimm}(A)$.

Dokaz. Zaista, neka su $P \in \mathrm{Prim}(J)$ i $Q \in \mathrm{Prim}(A)$, $Q \neq P$. Pretpostavimo da je $Q \in \mathrm{Prim}(A/J)$. Budući da je J kvazicentralna C*-algebra (propozicija 1.10.7), postoji $z \in Z(J)$ takav da $z \notin P$. Kako je $z \in Z(J) \subseteq Q$ i $Z(J) \subseteq Z(A)$ (propozicija 1.1.24), imamo $\Psi_A(z)(P) \neq 0$ i $\Psi_A(z)(Q) = 0$, pa $P \not\approx Q$. Zato pretpostavimo da je $Q \in \mathrm{Prim}(J)$. Prema propoziciji 1.10.7 J je centralna C*-algebra, pa je $P \cap Z(J) \neq Q \cap Z(J)$. Tada postoji $z \in Z(J)$ takav da je $z \in Q$ i $z \notin P$. Odavde ponovno slijedi $\Psi_A(z)(P) \neq 0$ i $\Psi_A(z)(Q) = 0$, pa $P \not\approx Q$. Dakle, $\{P\} \in \mathrm{Glimm}(A)$. □

Lema 3.2.6 Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj sa vlaknima $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ nad nekompaktnim lokalno kompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ. Stavimo $J := \Gamma_0(E)$, $M := M(J)$ i neka je K n-homogeni ideal od M. Nadalje, neka je E_0 odozgo poluneprekidni C*-svežanj nad $\beta\Delta$ takav da je $M \cong \Gamma_0(E_0)$ (kao u napomeni 3.2.4). Tada je E_0 zapravo (neprekidni, ne nužno lokalno trivijalni) C*-svežanj koji proširuje E, takav da je $F := E_0|_{\mathrm{Prim}(K)}$ lokalno trivijalan. Ukoliko je Δ metrizabilan, tada vrijedi $\Delta \subsetneqq \mathrm{Prim}(K)$ (tj. K striktno sadrži J).

Dokaz. Svaku točku $s \in \beta\Delta$ poistovijetimo sa pripadnim Glimmovim idealom G_s od M. Za $x \in M$ i $s \in \beta\Delta$ stavimo $x(s) := x + G_s \in A/G_s = E_0(s)$ i $\check{x}(s) := \|x(s)\|$. Trebamo pokazati da je za svako $x \in M$ funkcija $\check{x}$ odozdo poluneprekdina na $\beta\Delta$. Najprije primijetimo da je $\check{x}$ odozdo poluneprekidna na Δ, kao supremum $\sup\{(xy)\check{}\ :\ y \in \mathrm{Ball}(J)\}$ neprekidnih funkcija (primijetimo da je $xy \in J = \Gamma_0(E)$, čim je $y \in J$). Kako bi dokazali da je $\check{x}$ (odozdo polu)neprekidna na čitavom $\beta\Delta$, možemo pretpostaviti da je $x \in M_+$ (u protivnom x zamijenimo s $|x|$). Tvrdimo da se $\check{x}$ podudara s jedinstvenim neprekidnim proširenjem $\tilde{x}$ od ograničene neprekidne funkcije $\check{x}|_\Delta$. Dakle, trebamo pokazati da za svaku točku $s' \in \beta\Delta \setminus \Delta$ i svaku mrežu (s_α) u Δ koja konvergira prema s' vrijedi jednakost

$$\check{x}(s') = \lim_\alpha \check{x}(s_\alpha).$$

Budući da je $\tilde{x}$ neprekidna, $\check{x}$ odozgo poluneprekidna i $\tilde{x}|_\Delta = \check{x}|_\Delta$, imamo nejednakost

$$\tilde{x}(s') = \lim_\alpha \tilde{x}(s_\alpha) = \lim_\alpha \check{x}(s_\alpha) \leq \check{x}(s'). \tag{3.14}$$

Pretpostavimo da u (3.14) vrijedi stroga nejednakost. Kako je $\tilde{x}$ neprekdina na $\beta\Delta$, za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ imamo nejednakost $\tilde{x}(s) \leq \check{x}(s') - \varepsilon$ za sve s iz neke otvorene okoline U od s' u $\beta\Delta$. Izaberimo neprekidnu funkciju $f : [0, \infty) \to [0, 1]$ takvu da je $f([0, \check{x}(s') - \varepsilon]) = 0$ i $f(\check{x}(s')) = 1$. Primijetimo da je za sve $s \in \Delta \cap U$

$$\|x(s)\| = \check{x}(s) = \tilde{x}(s) \leq \check{x}(s') - \varepsilon,$$

pa je spektar od $x(s)$ sadržan u $[0, \check{x}(s') - \varepsilon]$. Zbog toga je $f(x)(s) = f(x(s)) = 0$ za sve $s \in \Delta \cap U$, pa zbog neprekidnosti i $\widetilde{f(x)}(s) = 0$ za sve $s \in U$. Nadalje,

$$(f(x))\check{}(s') = \|f(x)(s')\| = \|f(x(s'))\| = 1,$$

jer je $0 \leq f \leq 1$, a $\check{x}(s')$ nalazi u spektru od $x(s')$ i $f(\check{x}(s')) = 1$. Dakle, ako zamjenimo x sa $f(x)$, dobivamo $\tilde{x}(s) = 0$ za $s \in U$ i $\check{x}(s') = 1$. Neka je $\chi : \beta\Delta \to [0, 1]$ neprekidna funkcija takva da je $\chi(s') = 1$ i čiji je nosač sadržan u U. Stavimo $y := \Psi_M^{-1}(\chi)x$ (gdje je $\Psi_M : Z(M) \to C(\beta\Delta)$ Dauns-Hofmannov izomorfizam). Tada je $y \in M$, $\tilde{y}(s) = 0$ za sve $s \in \beta\Delta$ i $\check{x}(s') = 1$; kontradikcija. Dakle, E je (neprekidni) C*-svežanj.

Neka je ϕ_M : $\mathrm{Prim}(M) \to \mathrm{Glimm}(M) = \beta\Delta$ potpuna regularizacija (definicija 1.6.1). Prema dokazanom, E je (neprekidni) C*-svežanj, pa iz propozicije 1.6.6 slijedi da je ϕ_M otvoreno preslikavanje. Kako je M n-subhomogena s n-homogenim idealom K, prema lemi 3.2.5 $\mathrm{Prim}(K) = \phi_M(\mathrm{Prim}(K))$ je otvoren podskup od $\beta\Delta$. Odavde slijedi da se ideal $\Gamma_0(E_0|_{\mathrm{Prim}(K)})$ od $\Gamma(E_0)$ podudara s K. Kako je K n-homogena C*-algebra, slijedi da je svežanj $F := E_0|_{\mathrm{Prim}(K)}$ lokalno trivijalan (teorem 1.10.6). Napokon, kako K sadrži J kao ideal, imamo

$$J = \{x \in M : \; x|_{\mathrm{Prim}(K)\setminus\Delta} = 0\} = \Gamma_0(F|_\Delta).$$

Dakle, $F|_\Delta \cong E$.

Ostaje nam dokazati da u metrizabilnom slučaju $\mathrm{Prim}(K)$ striktno sadrži Δ. Izaberimo niz (s_k) u Δ koji nema točku gomilanja u Δ i prereze $f_{i,j} \in M = \Gamma_b(E)$ takve da su $f_{i,j}(s_k)$ $(1 \leq i, j \leq n)$ matrične jedinice u vlaknima $E(s_k) \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Tada za svaki prerez $f \in M$ imamo rastav $f(s_k) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{i,j}(s_k) f_{i,j}(s_k)$ za neke $\alpha_{i,j}(s_k) \in \mathbb{C}$. Nadalje, svaki (ograničen) niz $(\alpha_{i,j}(s_k))_k$ proširimo do neprekidne funkcije $\alpha_{i,j}$ na $\beta\Delta$, izaberimo točku gomilanja $s_0 \in \beta\Delta \setminus \Delta$ od (s_k) i stavimo

$$\pi_{s_0}(f) := \sum_{i,j=1}^n \alpha_{i,j}(s_0) e_{i,j} = [\alpha_{i,j}(s_0)] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

gdje su $e_{i,j}$ standardne matrične jedinice u $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Tada je s π_{s_0} definirana reprezentacija od M u $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, koja je surjektivna (dakle ireducibilna), budući da je $\pi_{s_0}(f_{i,j}) = e_{i,j}$. Ukoliko bi bilo $\ker \pi_{s_0} \notin \mathrm{Prim}(K)$, tada bi imali $\pi_{s_0}(K) = \{0\}$, odakle bi slijedilo (po definiciji od K) da se $\ker \pi_{s_0}$ nalazi u zatvaraču skupa jezgara svih ireducibilnih reprezentacija od M čija je dimenzija manja od n, što je nemoguće, budući da je taj skup zatvoren. □

3.3 Redukcija na konačne direktne sume homogenih C*-algebri

Lema 3.3.1 Ukoliko separabilna n-subhomogena C*-algebra A nije direktna suma homogenih C*-algebri, tada je $\overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$ striktno sadržan u $\mathrm{ICB}(A)$.

Budući da će dokaz prethodne leme zauzeti čitavu ovu točku, on će biti podijeljen u nekoliko koraka. Neka je J n-homogeni ideal od A, Δ primitivni spektar od J, E lokalno trivijalni C*-svežanj nad Δ takav da je $J = \Gamma_0(E)$ i $M := M(J) = \Gamma_b(E)$ multiplikatorska algebra od J.

Ako je J unitalan, tada je $A \cong J \oplus (A/J)$, pri čemu je A/J m-subhomogena za neko $m < n$, pa se dokaz reducira na manji stupanj subhomogenosti. Dakle, koristeći induktivni argument, možemo pretpostaviti da J nije unitalan, odnosno, da Δ nije kompaktan. Upravo u tom slučaju ćemo pokazati da vrijedi $\overline{\overline{\mathrm{E}(A)}} \subsetneq \mathrm{ICB}(A)$.

Budući da je A separabilna, prema lemi 3.2.6 n-homogeni ideal K od M striktno sadrži J i odgovarajući lokalno trivijalni C*-svežanj F nad otvorenim podskupom $\mathrm{Prim}(K)$ od $\beta\Delta$ (tako da vrijedi $K = \Gamma_0(F)$) proširuje E, dok je $M = \Gamma(E_0)$ za (ne nužno lokalno trivijalni) C*-svežanj E_0 nad $\beta\Delta$ koji proširuje F. Izaberimo točku $s_0 \in \mathrm{Prim}(K) \setminus \Delta$ i njenu otvorenu okolinu V u $\beta\Delta$ takvu da je $\overline{V} \subseteq \mathrm{Prim}(K)$ i da je $F|_{\overline{V}}$ trivijalan. Koristeći fiksni izomorfizam $E_0|_{\overline{V}} \cong F|_{\overline{V}} \cong \overline{V} \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, mi ćemo ubuduće identificirati ta dva svežnja nad V.

Slučaj 1. Ideal J je esencijalan u A.

U tom slučaju A je C*-podalgebra od $M(J)$. Budući da su sve n-dimenzionalne ireducibilne reprezentacije od A (do na ekvivalenciju) evaluacije u točkama iz Δ, za svaku točku $s \in \overline{V} \setminus \Delta$ pripadna evaluacija π_s prereza iz E_0 daje reducibilnu reprezentaciju od A. Neka je m maksimalna dimenzija ireducibilnih subreprezentacija od od $\pi_s|_A$, pri čemu s prolazi po $\overline{V} \setminus \Delta$ i neka je $s_1 \in \overline{V} \setminus \Delta$ točka gdje se taj maksimum postiže. Tada je (do na unitarnu ekvivalenciju) $\pi_{s_1}|_A$ oblika

$$\pi_{s_1}(a) = \begin{bmatrix} \sigma_{s_1}^{(k)}(a) & 0 \\ 0 & \rho_{s_1}(a) \end{bmatrix} \quad (a \in A), \tag{3.15}$$

gdje je $\sigma_{s_1} : A \to \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ ireducibilna reprezentacija, $k \in \mathbb{N}$ i $\rho_{s_1} : A \to \mathrm{M}_{n-km}(\mathbb{C})$ reprezentacija disjunktna s obzirom na σ_{s_1}[1]. Neka su (kao i prije) $e_{i,j}$ $(1 \le i, j \le m)$ standardne matrične jedinice za $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$. Prema teoremu 1.10.5 možemo naći elemente $a_{i,j} \in A$ $(1 \le i, j \le m)$ i okolinu $W \subseteq \overline{W} \subseteq V$ od s_1 tako da vrijedi $\pi_{s_1}(a_{i,j}) = e_{i,j}^{(k)} \oplus 0$ (s obzirom na rastav (3.15)), te da su $\pi_s(a_{i,j})$ $m \times m$ matrične jedinice za $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ za sve $s \in W$. Drugim riječima, $\pi_s(A)$ sadrži kopiju od $\mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ za sve $s \in W$. Prema maksimalnosti od m slijedi da je $\pi_s|_A$ (do na konjugaciju s unitarnim elementom $u \in C(W, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$) oblika

$$a(s) := \pi_s(a) = \begin{bmatrix} \sigma_s(a) & 0 \\ 0 & \kappa_s(a) \end{bmatrix} \quad (a \in A,\ t \in W \setminus \Delta), \tag{3.16}$$

[1]Za dvije reprezentacije C*-algebre kažemo da su *disjunktne* (engl. disjoint) ukoliko su svake dvije njihove netrivijalne subreprezentacije međusobno neekvivalentne (vidjeti [26])

gdje su $\sigma_s : A \to \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ i $\kappa_s : A \to \mathrm{M}_{n-m}(\mathbb{C})$ reprezentacije od A, pri čemu je σ_s ireducibilna.

Izaberimo neprekidnu funkciju χ na $\beta\Delta \setminus \Delta$ koja poprima vrijednosti iz $[0,1]$, takvu da je $\chi(s_1) = 1$ i čiji je nosač sadržan u $W \setminus \Delta$. Neka je $v \in \mathrm{M}_{m,n-m}(\mathbb{C})$ bilo koja matrica s $\|v\| = 1$. Kako je $M = \Gamma(E_0)$ i $J = \Gamma_0(E) = \{e \in \Gamma(E_0) : e|_{\beta\Delta\setminus\Delta} = 0\}$, prema Tietzeovom teoremu za C*-svežnjeve (teorem 1.9.19) imamo $M/J = \Gamma(E_0|_{\beta\Delta\setminus\Delta})$. Definirajmo prerez $e \in M/J$ na $\beta\Delta \setminus \Delta$ s

$$e(s) = \begin{bmatrix} 0 & \chi(s)v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{za } s \in W \setminus \Delta \text{ i } e(s) = 0 \text{ za } s \in (\beta\Delta \setminus \Delta) \setminus W \tag{3.17}$$

i neka je $b \in M$ bilo koji lift od od e (tj. b je neprekidno proširenje od e do prereza od E_0). Napokon, neka je $\phi : A \to M$ obostrano množenje s b, tj. $\phi : x \mapsto bxb$.

Tvrdimo da je $\phi(A) \subseteq A$ i da ϕ čuva ideale od A. Za dano $a \in A$ vrijednost $\phi(a)(s)$ od $\phi(a) \in M$ u svakoj točki $s \in \beta\Delta \setminus \Delta$ jednaka je 0. Zaista, $b(s) = e(s) = 0$ ako je $s \in (\beta\Delta \setminus \Delta) \setminus W$, dok za $s \in W \setminus \Delta$ imamo

$$\phi(a)(s) = b(s)a(s)b(s) = e(s)\pi_s(a)e(s) = 0,$$

što se može lako provjeriti koristeći direktno matrično množenje s $\pi_s(a)$ i $e(s)$ koji su zapisani u obliku (3.16) i (3.17). Odavde slijedi da je $\phi(a) \in J$, pa specijalno ϕ slika A u A. Kako bi dokazali da ϕ čuva ideale od A, izaberimo aproksimativnu jedinicu (e_k) za n-homogeni ideal J od A. Budući da je $\phi(a) \in J$, imamo

$$\phi(a) = \lim_k e_k\phi(a)e_k = \lim_k (e_k b)a(b e_k),$$

pri čemu obostrano množenje $a \mapsto (e_k b)a(b e_k)$ čuva ideale od A budući da su $e_k b, b e_k \in J \subseteq A$. Dakle, ϕ je točkovni limes preslikavanja koji čuvaju ideale od A, pa stoga i sam čuva ideale od A.

Tvrdimo da $\phi \notin \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$. Kako bi to dokazali, najprije ćemo dokaz lokalizirati na W (kako bi radili sa matričnim funkcijama umjesto sa svežnjevima) i zatim ćemo eksplicitnim računom dokazati da $\phi \notin \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$.

Neka je $J_W := \{a \in M : \ a(s) = 0 \text{ za sve } s \in \overline{W}\}$ i neka je ϕ_W preslikavanje na $A_W := A/(J_W \cap A)$ inducirano s ϕ. Primijetimo da C*-algebru A_W možemo poistovijetiti (preko prirodnog izomorfizma) s C*-podalgebrom od

$$M/J_W = \Gamma(E_0|_{\overline{W}}) = \Gamma_0(F|_{\overline{W}}) = C(\overline{W}, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$$

i da je ϕ_W naprosto obostrano množenje

$$\phi_W(x) = dxd \quad (x \in A_W \subseteq C(\overline{W}, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))),$$

gdje je sa d označena kvocijentna slika od b u M/J_W. Ukoliko $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dekomponiramo u blokove s obzirom na (3.16), d kao element od $C(\overline{W}, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ možemo reprezentirati kao blok matricu neprekidnih funkcija

$$d = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} \\ d_{2,1} & d_{2,2} \end{bmatrix},$$

gdje je (po definiciji od b i e) $d_{1,1}(s_1) = 0$, $d_{2,1}(s_1) = 0$, $d_{2,2}(s_1) = 0$ i $d_{1,2}(s_1) = v$. Iz $\phi_W(x) = dxd$ slijedi

$$\phi_W(x)(s_1) = \begin{bmatrix} 0 & vx_{2,1}(s_1)v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (x = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} \in A_W \subseteq C(\overline{W}, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))).$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Prema neprekidnosti funkcija $d_{i,j}$ (tj. vrijednost $\|d(s) - d(s_1)\|$ je mala ako je $s \in W$ dovoljno blizu s_1) postoji okolina $W_1 \subseteq W$ od s_1 takva da za sve $x = [x_{i,j}] \in A_W$ s $\|x\| \leq 1$ vrijedi (uniformna) ocjena

$$\left\| \phi_W(x)(s) - \begin{bmatrix} 0 & vx_{2,1}(s)v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| < \varepsilon \quad \text{za sve } s \in W_1. \tag{3.18}$$

Evaluacija π_{s_1} slika A u blok dijagonalne matrice s obzirom na rastav (3.16), no također ćemo dokazati da isto vrijedi i za $M(A)$ (π_{s_1} može biti degenerirana). Kako je J esencijalan u A (pa stoga i u $M(A)$), imamo $M(A) \subseteq M(J) = M$. Slijedi da svaki $f \in M(A)$ možemo reprezentirati nad W kao 2×2 blok dijagonalnu matricu $f|_W = [f_{i,j}]$ s obzirom na rastav (3.16). Neka je $p \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ projektor na span$\sigma_{s_1}^{(k)}(A)\mathbb{C}^n$ (gdje je σ_{s_1} kao u (3.15)). Tada je $p \in \pi_{s_1}(A)$, budući da su reprezentacije ρ_{s_1} i $\sigma_{s_1}^{(k)}$ disjunktne. S obzirom na rastav (3.16), p je oblika $p = 1 \oplus q$, gdje je 1 $m \times m$ jedinična matrica i q projektor. Kako je $f(s_1)p \in \pi_{s_1}(A)$ i $pf(s_1) \in \pi_{s_1}(A)$, te kako su matrice iz $\pi_{s_1}(A)$ blok-dijagonalne, koristeći matrično množenje dobivamo $f_{2,1}(s_1) = 0$ i $f_{1,2}(s_1) = 0$. Dakle, $\pi_{s_1}(M(A))$ sadrži samo blok-dijagonalne matrice.

Pretpostavimo da postoji $T \in \mathrm{E}(A)$ takav da je $\|T - \phi\| < \varepsilon$. Tada je

$$\|T_W - \phi_W\| < \varepsilon, \tag{3.19}$$

gdje je T_W preslikavanje na A_W inducirano s T. Kako je $T \in \mathrm{E}(A)$, T možemo prikazati u obliku

$$Tx = \sum_{k=1}^{d} a^k x b^k \quad (x \in A),$$

gdje su $a^k, b^k \in M(A) \subseteq M$. Koristeći prethodno razmatranje, slijedi da su $a^k(s_1) = a_{1,1}^k(s_1) \oplus a_{2,2}^k(s_1)$ i $b^k(s_1) = b_{1,1}^k(s_1) \oplus b_{2,2}^k(s_1)$ blok-dijagonalne matrice. Nadalje, za matrice oblika

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_{2,1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

slijedi da je $\sum_{k=1}^{d} a^k(s_1) x b^k(s_1)$ oblika

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{k=1}^{d} a_{2,2}^k(s_1) x_{2,1} b_{1,1}^k(s_1) & 0 \end{bmatrix},$$

pa koristeći neprekidnost koeficijenata a^k i b^k (na W) dobivamo okolinu $W_2 \subseteq W$ od s_1 takvu da vrijedi

$$\left\| (T_W x)(s) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{k=1}^d a_{2,2}^k(s) x_{2,1}(s) b_{1,1}^k(s) & 0 \end{bmatrix} \right\| < \varepsilon \quad \text{za sve } s \in W_2 \tag{3.21}$$

uniformno za sve $x \in A_W$ oblika (3.20) s $\|x\| \leq 1$. Iz (3.18), (3.19) i (3.21) zaključujemo da vrijedi

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & v x_{2,1}(s) v \\ -\sum_{k=1}^d a_{2,2}^k(s) x_{2,1}(s) b_{1,1}^k(s) & 0 \end{bmatrix} \right\| < 3\varepsilon \tag{3.22}$$

za sve $s \in W_1 \cap W_2$ i $x \in A_W$ oblika (3.20) s $\|x\| \leq 1$. No, za svako $s \in W_1 \cap W_2 \cap \Delta$ imamo $A_W(s) = \pi_s(A) = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (budući da je već i $J(s) = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$), pa postoji $x \in A_W$ oblika (3.20) za kojeg vrijedi $\|x_{2,1}(s)\| = 1$ i $\|v x_{2,1}(s) v\| = 1$ (za fiksno s), što je za $\varepsilon < \frac{1}{3}$ u kontradikciji s (3.22). Dakle, $\phi \notin \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$. Time smo u potpunosti dokazali tvrdnju za slučaj kada je J esencijalan u A.

Slučaj 2. Ideal J je nije esencijalan u A.

Neka je $B := A/J^\perp$, $q : A \to B$ kvocijentni $*$-epimorfizam o $K := q(J)$. Prema lemi 3.2.1 K je n-homogeni ideal od B koji je esencijalan. Prema dokazanom, postoji $b \in M(K)$ takav da za pripadno obostrano množenje vrijedi $\phi(B) \subseteq K$ i $\phi \in \mathrm{ICB}(A) \setminus \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$. Definirajmo $\phi_0 : A \to A$ kao kompoziciju

$$\phi_0 = (q|_J)^{-1} \circ \phi \circ q.$$

Tada je $\phi_0(A) \subseteq J$. Kako bi pokazali da ϕ_0 čuva ideale od A, izaberimo aproksimativnu jedinicu (e_k) za J, te element $a \in M(J)$ za kojeg vrijedi $\tilde{q}(a) = b$, gdje smo s $\tilde{q}$ označili proširenje $M(J) \to M(K)$ od izomorfizma $q|_J : J \to K$. Tada za $x \in A$ imamo

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \lim_k e_k \phi_0(x) e_k = \lim_k e_k (q|_J)^{-1}(b q(x) b) e_k \\ &= \lim_k (q|_J)^{-1}(q(e_k) b q(x) b q(e_k)) = \lim_k (q|_J)^{-1} q(e_k a x a e_k) \\ &= \lim_k (e_k a) x (a e_k). \end{aligned}$$

Odavde slijedi da se $\phi_0(x)$ nalazi u idealu generiranom s x, budući da je $e_k a \in J \subseteq A$.

Ostaje nam još dokazati da $\phi_0 \notin \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$. Pretpostavimo suprotno. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $T \in \mathrm{E}(A)$ takav da vrijedi $\|\phi - T\| \leq \varepsilon$. Neka je $\dot{T}$ elementarni operator na B kojeg inducira T, tako da vrijedi $\dot{T} \circ q = q \circ T$. Tada za svako $x \in \mathrm{Ball}(A)$ imamo $\|\phi_0(x) - Tx\| \leq \varepsilon$, odakle slijedi

$$\|(\phi \circ q)(x) - (\dot{T} \circ q)(x)\| = \|q(\phi_0(x) - Tx)\| \leq \varepsilon.$$

Budući da je q kvocijentno preslikavanje, imamo $q(\mathrm{Ball}(A)) = q(\mathrm{Ball}(B))$. Stoga je $\|\phi - \dot{T}\| \leq \varepsilon$, što je u kontradikciji s činjenicom da $\phi \notin \overline{\overline{\mathrm{E}(B)}}$. □

Ukoliko sada saberemo sve rezultate ovog poglavlja, dobivamo sljedeći teorem:

Teorem 3.3.2 (Magajna) Neka je A separabilna C*-algebra. Tada vrijedi $\mathrm{ICB}(A) \subseteq \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$ ako i samo ako je A konačna direktna suma homogenih C*-algebri konačnog tipa. Štoviše, u tom slučaju vrijedi

$$\mathrm{IB}(A) = \mathrm{E}(A) = \mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{ICB}(A).$$

Dokaz. Ako vrijedi $\mathrm{ICB}(A) \subseteq \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$ tada je prema teoremu 3.1.6 A subhomogena. Nadalje, iz leme 3.3.1 slijedi da je A konačna direktna suma homogenih, dok iz propozicije 3.0.21 slijedi da svaki sumand mora biti konačnog tipa. Obratna tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 3.0.21. □

Poglavlje 4

Problem minimalnosti slike od Θ_A

Neka je A C*-algebra i neka je $\Theta_A : M(A) \otimes_h M(A) \to \mathrm{ICB}(A)$ kanonska kontrakcija. U ovoj točki promatramo sljedeći problem minimalnosti:

Problem 4.0.3 Karakterizitati sve (separabilne) C*-algebre A koje imaju svojstvo da je slika od Θ_A najmanja moguća, dakle jednaka $\mathrm{E}(A)$.

Kao što smo vidjeli u prošlom poglavlju, problem surjektivnosti od Θ_A je u potpunosti riješen (barem za separabilne A). Zbog toga bismo mogli očekivati da bi slične metode onima iz prošlog poglavlja mogle i ovdje funkcionirati. Do neke mjere to i jest tako, no pokazuje se da na rješenje problema 4.0.3 također utječu i topološke obstrukcije na primitivnom spektru od A. Budući da primitivni spektar multiplikatorske algebre $M(A)$ može biti dosta kompliciraniji od onog od A (vidjeti primjer 2.5.19), morat ćemo se ograničiti na klasu unitalnih C*-algebri. Nadalje, pokazuje se da je problem 4.0.3 vrlo sličan problemu uniformne ograničenosti duljina elementarnih operatora na A. Radi toga uvodimo sljedeću definiciju:

Definicija 4.0.4 Neka je A C*-algebra. Kažemo da je $\mathrm{E}(A)$ *konačne duljine* ako postoji $d \in \mathbb{Z}_+$ takav da vrijedi $\ell(T) \leq d$ za sve $T \in \mathrm{E}(A)$. U tom slučaju, za najmanji takav d kažemo da je *duljina* od $\mathrm{E}(A)$ i pišemo $\ell(\mathrm{E}(A)) := d$. Ako $\mathrm{E}(A)$ nije konačne duljine, stavljamo $\ell(\mathrm{E}(A)) := \infty$.

Primijetimo da će $\mathrm{E}(A)$ svakako biti konačne duljine ukoliko je $M(A)$ kao modul nad svojim centrom $Z(M(A))$ konačno generiran. Zbog toga je prirodno pitati se koliko je taj uvjet blizak uvjetu konačne duljine od $\mathrm{E}(A)$. U idućoj točki ćemo pokazati da je uvjet konačne generiranosti od $M(A)$ nad $Z(M(A))$ zapravo dosta restriktivan; zadovoljavaju ga samo konačne direktne sume unitalnih homogenih C*-algebri, dok postoje mnoge druge C*-algebre A koje nisu tog oblika i za koje je $\mathrm{E}(A)$ konačne duljine.

Nadalje, pokazat ćemo da ako separabilna A zadovoljava $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ ili $\ell(\mathrm{E}(A)) < \infty$ tada je ona nužno SFT algebra (definicija 1.10.13). Štoviše, u tom slučaju su i kodimenzije 2-primalnih ideala u A uniformno ograničene s nekom cjelobrojnom konstantom. Koristeći tu činjenicu dajemo primjer separabilne unitalne 2-SFT algebre za koju vrijedi $\mathrm{E}(A) \subsetneq \mathrm{Im}\,\Theta_A$ i $\ell(\mathrm{E}(A)) = \infty$. Nadalje, ako je primitivni spektar (unitalne) SFT u algebre A Hausdorffov tada dokazujemo da ona zadovoljava oba uvjeta $\operatorname{Im}\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ i $\ell(\mathrm{E}(A)) < \infty$.

Potpuna karakterizacija klase separabilnih i unitalnih C*-algebri za koje vrijedi $\operatorname{Im}\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ (odnosno $\ell(\mathrm{E}(A)) < \infty$) trenutno nam nije poznata. Također nam nije poznato da li iz $\operatorname{Im}\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ slijedi $\ell(\mathrm{E}(A)) < \infty$, odnosno, da li iz $\ell(\mathrm{E}(A)) < \infty$ slijedi $\operatorname{Im}\Theta_A = \mathrm{E}(A)$. Ipak, slutimo da je odgovor na oba pitanja potvrdan (tj. da su uvjeti $\operatorname{Im}\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ i $\ell(\mathrm{E}(A)) < \infty$ ekvivalentni).

Na kraju ovog uvodnog dijela, istaknimo da su prve dvije točke ovog poglavlja preuzete iz rada [36].

4.1 Konačno centralno generirane C*-algebre

Definicija 4.1.1 Za C*-algebru A kažemo da je *konačno centralno generirana* ako je A kao $Z(M(A))$-bimodul konačno generiran.

Lema 4.1.2 Neka je A C*-algebra, $I \in \mathrm{Id}(A)$ i $b \in \mathrm{Ball}(I_+)$. Tada za svaki element $a \in I$ za kojeg vrijedi

$$aa^* \leq b^4$$

postoji $c \in \mathrm{Ball}(I)$ takav da je $a = bc$.

Dokaz. Dokaz standardno provodimo u minimalnoj unitizaciji $\tilde{A}$ od A. Za $n \in \mathbb{N}$ neka su $b_n := (b + n^{-1}1)^{-1}$ i $c_n := b_n a$. Tada je

$$c_n \in I \quad i \quad a = (b + n^{-1}1)c_n. \tag{4.1}$$

Kako je

$$0 \leq c_n c_n^* = b_n aa^* b_n \leq b_n b^4 b_n \leq 1,$$

gdje zadnja nejednakosti slijedi iz činjenice da za sve $s \in \mathrm{sp}(b) \subseteq [0,1]$ vrijedi $(s + n^{-1})^{-2}s^4 \in [0,1]$. Slijedi da je

$$\|c_n\| \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.2}$$

Također, za $m, n \in \mathbb{N}$ imamo $c_m - c_n = (n^{-1} - m^{-1})b_m b_n a$, pa je

$$\begin{aligned} 0 &\leq (c_m - c_n)(c_m - c_n)^* = (n^{-1} - m^{-1})^2 b_m b_n aa^* b_n b_m \\ &\leq (n^{-1} - m^{-1})^2 b_m b_n b^4 b_n b_m = (n^{-1} - m^{-1})^2 b_m^2 b_n^2 b^4 \\ &\leq (n^{-1} - m^{-1})^2 1, \end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz činjenice da je $(s + m^{-1})^{-2}(s + n^{-1})^{-2}s^4 \leq 1$ za sve $s \in \mathrm{sp}(b)$. Odavde vidimo da je $\|c_m - c_n\| \leq |n^{-1} - m^{-1}|$, odakle slijedi da je (c_n) Cauchyjev niz A. Neka je $c := \lim_n c_n$. Iz (4.1) i (4.2) slijedi da je

$$c \in I, \quad a = bc, \quad \|c\| \leq 1.$$

$\square$

Lema 4.1.3 Pretpostavimo da je A konačno centralno generirana C^*-algebra. Tada je A unitalna.

Dokaz. Neka su $e_1, \ldots, e_m \in A$ generatori od A kao bimodula nad $Z(M(A))$. Kako je A linearna ljuska od A_h, možemo pretpostaviti da je svaki e_i hermitski. Stavimo $a := \left(\sum_{k=1}^m e_k^2\right)^{\frac{1}{4}}$ i primijetimo da je

$$e_i e_i^* = e_i^2 \le \sum_{k=1}^m e_k^2 = a^4 \quad \text{za sve } 1 \le i \le m.$$

Prema lemi 4.1.2 postoje elementi $b_1, \ldots, b_m \in A$ takvi da vrijedi

$$e_i = ab_i \quad \text{za sve } 1 \le i \le m. \tag{4.3}$$

Neka je $x \in A$. Prema pretpostavci, postoje elementi $z_1(x), \ldots, z_m(x) \in Z(M(A))$ takvi da je $x = \sum_{k=1}^m z_k(x)e_k$. Koristeći (4.3) slijedi da je

$$x = \sum_{k=1}^m z_k(x)e_k = \sum_{k=1}^m z_k(x)ab_k = a \cdot \sum_{k=1}^m z_k(x)b_k. \tag{4.4}$$

Specijalno, za $x = a$ i $e := \sum_{k=1}^m z_k(a)b_k$ imamo $a = ae = e^*a$. Prema (4.4) $e^*x = x$ za sve $x \in A$, odakle slijedi da je e^* lijeva jedinice od A. Nakon adjungiranja, zaključujemo i da je e desna jedinica od A. Dakle, A je unitalna s jedinicom $e = e^*$. $\square$

Napomena 4.1.4 Neka je A konačno centralno generirana C*-algebra s $A = \mathrm{span}_{Z(A)}\{e_1, \ldots, e_m\}$, za neke $e_i \in A$ (prema lemi 4.1.3, A je unitalna). Tada za svaki $J \in \mathrm{Id}(A)$ imamo $A/J = \mathrm{span}_{Z(A/J)}\{q_J(e_1), \ldots, q_J(e_m)\}$ (jer je $q_J(Z(A)) \subseteq Z(A/J)$), pa je specijalno i A/J konačno centralno generirana.

Teorem 4.1.5 Neka je A C*-algebra. Sljedeći uvjeti su ekvivalentni:

(i) A je konačno centralno generirana;

(ii) A je konačna direktna suma unitalnih homogenih C*-algebri.

Dokaz. $(ii) \Rightarrow (i)$. Tvrdnju je dovoljno dokazati za slučaj kada je A unitalna i homogena. Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj nad (kompaktnim Hausdorffovim) prostorom $\Delta := \mathrm{Prim}(A)$ čija su sva vlakna izomorfna s $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, takav da je $A \cong \Gamma(E)$. Prema Serre-Swanovom teoremu (vidjeti [43]), $\Gamma(E)$ je konačno generirani (projektivni) modul nad $C(\Delta) \cong Z(\Gamma(E))$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Prema lemi 4.1.3 A je unitalna. Pretpostavimo da je

$$A = \mathrm{span}_{Z(A)}\{e_1, \ldots, e_m\}, \quad \text{za neke } e_1, \ldots, e_m \in A. \tag{4.5}$$

Tvrdnja 1. A je n-subhomogena, gdje je $n \leq \sqrt{m}$.

Zaista, ako je $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ ireducibilna reprezentacija od A na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_\pi$, tada je $\pi(Z(A)) = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$, pa je $\pi(A) = \mathrm{span}\{\pi(e_1), \ldots, \pi(e_m)\}$. Kako je π ireducibilna, slijedi da je $\dim \pi = \dim \mathcal{H}_\pi \leq \sqrt{m}$.

Tvrdnja 2. Ako je J n-homogeni ideal od A, tada je J unitalan. Specijalno, $A \cong J \oplus (A/J)$.

Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj nad $\Delta := \mathrm{Prim}(J)$ sa vlaknima $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, takav da je $J = \Gamma_0(E)$ (teorem 1.10.6). Primijetimo da je dokaz unitalnosti od J dovoljno provesti uz pretpostavku da je J esencijalan u A. Zaista, ako J nije esencijalan, tada A možemo zamijeniti s $B := A/J^\perp$, jer je prema napomeni 4.1.4 B također konačno centralno generiran, dok lema 3.2.1 povlači da je n-homogeni ideal K od B je esencijalan u B i $K \cong J$. Nadalje, primijetimo da je J konačnog tipa. Zaista, kako je $J \in \mathrm{Id}_{ess}(A)$, imamo $J \subseteq A \subseteq M(J)$. Prema lemi 3.2.2 $M(J) = \Gamma_b(E)$. Kako je $E(s) = \Gamma_0(E)(s)$ za sve $s \in \Delta$, (4.5) povlači

$$E(s) = \mathrm{span}\{e_1(s), \ldots, e_m(s)\} \quad \text{za sve } s \in \Delta.$$

Prema lemi 1.10.10 E je konačnog tipa kao vektorski svežanj, pa teorem 1.10.9 povlači da je E konačnog tipa i kao C*-svežanj. Iz teorema 1.10.9 također slijedi da E možemo proširiti do lokalno trivijalnog C*-svežnja F nad Stone-Čechovom kompaktifikacijom $\beta\Delta$ od Δ i da vrijedi $M(J) = \Gamma_b(E) = \Gamma(F)$. Pretpostavimo da J nije unitalan, odakle slijedi da $J \neq A$. Tada Δ nije kompaktan, pa je $\beta\Delta \setminus \Delta \neq \emptyset$. Kao u dokazu propozicije 3.2.3, imamo

$$J = \{a \in \Gamma(F) : \ a|_{\beta\Delta \setminus \Delta} = 0\}. \tag{4.6}$$

Za svaku točku $s \in \beta\Delta$ označimo s π_s pripadnu evaluaciju prereza od F u s, koju smatramo ireducibilnom reprezentacijom od $M(J) = \Gamma(F)$. Tada restrikcija $\pi_s|_A$ u svim točkama s iz $\beta\Delta \setminus \Delta$ daje reducibilnu reprezentaciju od A. Neka je r najveća dimenzija ireducibilne subreprezentacije od $\pi_s|_A$, pri čemu s prolazi po skupu $\beta\Delta \setminus \Delta$ i neka je s_0 bilo koja točka iz $\beta\Delta \setminus \Delta$ u kojoj se taj maksimum postiže. Primijetimo da je $r > 0$. Zaista, budući da je $J \neq A$, postoji ireducibilna reprezentacija σ od A takva da je $\sigma(J) = \{0\}$. Tada je σ ekvivalentna subreprezentaciji od $\pi_s|_A$ za neko $s \in \beta\Delta$. Kako je $\sigma(J) = \{0\}$, slijedi da $s \notin \Delta$. Prema lokalnoj trivijalnosti svežnja F, postoji kompaktna okolina K od s_0 u $\beta\Delta$ takva da je $F|_K \cong K \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Koristeći fiksni izomorfizam, mi ćemo identificirati ta dva svežnja nad K. Prema definiciji od s_0 i koristeći slične argumente kao u prvom dijelu dokaza leme 3.3.1, dolazimo do kompaktne okoline H od s_0 za koju je $H \subseteq K$, te za koju je (nakon konjugiranja s unitarnim elementom iz $C(H, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$, ukoliko je potrebno) $\pi_s|_A$ oblika

$$\pi_s(a) = \begin{bmatrix} \sigma_s(a) & 0 \\ 0 & \rho_s(a) \end{bmatrix} \quad \text{za sve } a \in A \text{ i } s \in H \setminus \Delta, \tag{4.7}$$

gdje je $\sigma_s : A \to \mathrm{M}_r(\mathbb{C})$ ireducibilna i $\rho_s : A \to \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ reprezentacija od A (koja je nedegenerirana, ali tu činjenicu nećemo koristiti). Neka je $U := H \cap \Delta$ i stavimo

$$I_H := \{a \in M(J) : \ a|_H\} = 0, \quad A_H := A/(A \cap I_H), \quad \text{and} \quad J_H := J/(J \cap I_H).$$

Kako je $H \subseteq K$, A_H možemo identificirati s C*-podalgebrom od $C(H, \mathrm{M}_n(\mathbb{C})) \cong \Gamma(F|_H) \cong M(J)/I_H$ (gdje zadnji izomorfizam slijedi iz teorema 1.9.19). Primijetimo da je prema (4.6) J_H ideal od $C(H, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ (i od A_H) koji se sastoji od svih $a \in C(H, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ za koje je $a|_{H \setminus U} = 0$. Kako je U gust otvoren podskup od H, J_H je esencijalan u $C(H, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$. Koristeći sve te identifikacije, iz (4.7) slijedi da je

$$a_{1,n}|_{H \setminus U} = 0 \ \text{ za sve } a = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in A_H. \tag{4.8}$$

Stavimo $e^{(k)} := q_{A \cap I_H}(e_k)$ $(1 \le k \le m)$. Prema napomeni 4.1.4, A_H je također konačno centralno generirana, s $A_H = \mathrm{span}_{Z(A_H)}\{e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}\}$. Neka su $(e_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ standardne matrične jedinice od $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ smatrane konstantnim funkcijama u $C(H, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$. Tada za svaku funkciju $f \in C_0(U) = \{g \in C(H) : \ g|_{H \setminus U} = 0\}$ element $a_f := f e_{1,n}$ leži u $J_H \subseteq A_H$, pa postoje centralni elementi $z_k \in Z(A_H)$ $(1 \le k \le m)$ takvi da je $a_f = \sum_{k=1}^m z_k e^{(k)}$. Kako je $J_H \subseteq A_H$ esencijalan u $C(H, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$, imamo

$$Z(A_H) \subseteq Z(C(H, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))) = \{g 1_n : \ g \in C(H)\}.$$

Stoga, ako je $z_k = g_k 1_n$ $(g_k \in C(H),\ 1 \le k \le m)$, slijedi da je $f = \sum_{k=1}^m g_k e_{1,n}^{(k)}$. Prema (4.8), imamo $e_{1,n}^{(k)} \in C_0(U)$ za sve $1 \le k \le m$. Kako je $f \in C_0(U)$ bila proizvoljna, slijedi da je

$$C_0(U) = \mathrm{span}_{C(H)}\{e_{1,n}^{(1)}, \ldots, e_{1,n}^{(m)}\} = \mathrm{span}_{C(\beta U)}\{e_{1,n}^{(1)}, \ldots, e_{1,n}^{(m)}\}.$$

Prema lemi 4.1.3 $C_0(U)$ je unitalna, pa je U kompaktan; dakle jednak H, što je kontradikcija s $s_0 \in H \setminus U$.

Tvrdnja 3. A je konačna direktna suma unitalnih homogenih C*-algebri.

Tvrdnja slijedi direktno iz tvrdnje 2, napomene 4.1.4 i induktivnog argumenta. □

4.2 Redukcija na SFT algebre

U ovoj točki promatramo svojstva $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ i $\ell(\mathrm{E}(A)) < \infty$. Ukoliko separabilna A zadovoljava jedno od ta dva svojstva, dokazat ćemo da je ona nužno SFT algebra. Kako bi najprije dali redukciju na subhomogeni slučaj, sljedeća lema će nam biti od velike koristi:

Lema 4.2.1 Neka je A C*-algebra. Neka su (a_k), (b_k), (e_k) nizovi u $M(A)$ takvi da je $e_k \in M(A)_h$ za sve $k \in \mathbb{N}$ i takvi da redovi $\sum_{k=1}^\infty a_k a_k^*$, $\sum_{k=1}^\infty b_k^* b_k$, te $\sum_{k=1}^\infty e_k^2$ konvergiraju u normi. Definirajmo tenzore $t, u \in M(A) \otimes_h M(A)$ s $t := \sum_{k=1}^\infty e_k \otimes e_k$

i $u := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes b_k$. Ako je $\Theta_A(t) = \Theta_A(u)$ tada je

$$\overline{\overline{\mathrm{span}}}\{q_P(e_k): \ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\overline{\mathrm{span}}}\{q_P(b_k): \ k \in \mathbb{N}\} \ \text{ za sve } P \in \mathrm{Prim}(M(A)).$$

Dokaz. Prema napomeni 2.4.7 jednakost $\Theta_A(t) = \Theta_A(u)$ (operatora na A) povlači jednakost $\Theta_{A^{**}}(t) = \Theta_{A^{**}}(u)$ (operatora na A^{**}), pa stoga i jednakost

$$\Theta_{M(A)}(t) = \Theta_{A^{**}}(t)|_{M(A)} = \Theta_{A^{**}}(u)|_{M(A)} = \Theta_{M(A)}(u).$$

Dakle, možemo pretpostaviti da je A unitalna. Neka je $P \in \mathrm{Prim}(A)$. Kao što smo istaknuli u napomeni 2.4.7, za svako $J \in \mathrm{Id}(A)$ sljedeći dijagram

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_h A & \xrightarrow{\Theta_A} & \mathrm{ICB}(A) \\ {\scriptstyle q_J \otimes q_J}\big\downarrow & & {\scriptstyle Q_J}\big\downarrow \\ A/J \otimes_h A/J & \xrightarrow{\Theta_{A/J}} & \mathrm{ICB}(A/J) \end{array}$$

komutira, gdje Q_J označava inducirano preslikavanje $\mathrm{ICB}(A) \to \mathrm{ICB}(A/J)$ (napomena 2.4.2). Neka je $P \in \mathrm{Prim}(A)$. Tada jednakost operatora $\Theta_A(t) = \Theta_A(u)$ povlači jednakost operatora

$$\Theta_{A/P}((q_P \otimes q_P)(t)) = \Theta_{A/P}((q_P \otimes q_P)(u)).$$

Kako je A/P primitivna, prema teoremu 2.4.8 $\Theta_{A/P}$ je injekcija, pa zadnja jednakost povlači jednakost

$$(q_P \otimes q_P)(t) = (q_P \otimes q_P)(u)$$

tenzora u $A/P \otimes_h A/P$. Radi jednostavnosti oznaka, stavimo $\dot{A} := A/P$, $\dot{x} := q_P(x)$ $(x \in A)$, i $\dot{v} := (q_P \otimes q_P)(v)$ $(v \in A \otimes_h A)$. Također stavimo

$$V := \overline{\overline{\mathrm{span}}}\{\dot{e}_k: \ k \in \mathbb{N}\} \ \text{ and } \ W := \overline{\overline{\mathrm{span}}}\{\dot{b}_k: \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Kako bi dokazali da je $V \subseteq W$, dovoljno je dokazati da se svaki ograničeni linearni funkcional na $\dot{A}$ koji se poništava na W ujedno poništava i na V. Dakle, neka je $\varphi \in \dot{A}^*$ takav da je $\varphi|_W = 0$ i neka je $\varphi^* \in \dot{A}^*$ dan s $\varphi(\dot{x}) := \overline{\varphi(\dot{x}^*)}$. Kako su svi ograničeni linearni funkcionalni potpuno ograničeni (propozicija 2.1.5), inducirani funkcional

$$\varphi \otimes \varphi^* : \dot{A} \otimes_h \dot{A} \to \mathbb{C}, \quad (\varphi \otimes \varphi^*)(\dot{x} \otimes \dot{y}) = \varphi(\dot{x})\overline{\varphi(\dot{y}^*)}, \quad x, y \in \dot{A}.$$

je ograničen, pa iz jednakosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{e}_k \otimes \dot{e}_k = \dot{t} = \dot{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k \otimes \dot{b}_k$$

slijedi
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(\dot{e}_k)|^2 = (\varphi \otimes \varphi^*)(\dot{t}) = (\varphi \otimes \varphi^*)(\dot{u}) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\varphi(\dot{a}_k^*)}\varphi(\dot{b}_k) = 0,$$
budući da je $\varphi|_W = 0$. Slijedi da je $\varphi(\dot{e}_k) = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$, pa je i $\varphi|_V = 0$. □

Teorem 4.2.2 Neka je A C*-algebra. Pretpostavimo da A zadovoljava jedan od sljedeća dva uvjeta

(i) $\mathrm{E}(A)$ je konačne duljine;

(ii) $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$.

Tada je A subhomogena.

Dokaz. Budući da A zadovoljava (i) ili (ii) ako i samo ako redom $M(A)$ zadovoljava (i) ili (ii), možemo pretpostaviti da je A unitalna. Pretpostavimo da je $\sup\{\dim A/P : P \in \mathrm{Prim}(A)\} = \infty$, i neka je (P_n) niz u $\mathrm{Prim}(A)$ takav da je $\dim A/P_n \geq n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ (ako je neki primitivni kvocijent A/P konačno dimenzionalan, možemo staviti $P_n := P$ za sve $n \in \mathbb{N}$). Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $q_n := q_{P_n}$ i neka su $e_{k,n}$ $(1 \leq k \leq n)$ hermitski elementi norme 1 u A_h takvi da je skup $\{q_n(e_{1,n}), \dots, q_n(e_{n,n})\}$ linearno nezavisan u A/P_n. Stavimo

$$t_n := \sum_{k=1}^{n} e_{k,n} \otimes e_{k,n} \;(n \in \mathbb{N}) \quad \text{and} \quad t := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} e_{k,n} \otimes e_{k,n}.$$

Ako je $T_n := \Theta_A(t_n) \in \mathrm{E}(A)$ $(n \in \mathbb{N})$ i $T := \Theta_A(t)$, tvrdimo da je $\ell(T_n) = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i da $T \notin \mathrm{E}(A)$. Pretpostavimo da za neko $n \in \mathbb{N}$ imamo $T_n = \Theta_A(u)$, gdje je $u = \sum_{k=1}^{d} a_k \otimes b_k \in A \otimes A$ s $d < n$. Prema lemi 4.2.1, imamo

$$\mathrm{span}\{q_n(e_{1,n}), \dots, q_n(e_{n,n})\} \subseteq \mathrm{span}\{q_n(b_1), \dots, q_n(b_d)\},$$

što je nemoguće, jer je skup $\{q_n(e_{1,n}), \dots, q_n(e_{n,n})\}$ linearno nezavisan. Slično, pretpostavimo da je $T \in \mathrm{E}(A)$ s $T = \Theta_A(u)$ za neki tenzor $u = \sum_{k=1}^{d} a_k \otimes b_k \in A \otimes A$. Ako je $r > d$, tada lema 4.2.1 povlači da je

$$V := \overline{\mathrm{span}}\{q_r(e_{k,n}) : \; n, k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{span}\{q_r(b_1), \dots, q_r(b_d)\};$$

što je kontradikcija s činjenicom $\dim V \geq r > d$. □

Sada ćemo pobliže promotriti što se događa u homogenom slučaju. Kako bismo izbjegli dodatne tehničke komplikacije, ograničit ćemo se na σ-unitalne algebre. Iskažimo osnovni rezultat:

Teorem 4.2.3 Neka je A σ-unitalna n-homogena C*-algebra. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) A je konačnog tipa;

(ii) $\mathrm{E}(A)$ je konačne duljine;

(iii) $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$.

Teži dio teorema 4.2.3 je dokaz implikacije (ii) $\Rightarrow$ (i). Osnovna ideja za dokaz te implikacije je da pokažemo da $\sup\{\ell(T) : T \in \mathrm{E}(A)\}$ bitno ovisi o tipu (vektorskog) svežnja E (koji dolazi iz izomorfizma $A \cong \Gamma_0(E)$), gdje je tip od E konstanta koju definiramo na sljedeći način:

Definicija 4.2.4 Neka je E vektorski svežanj nad baznim prostorom Δ. Ako je E konačnog tipa, tada najmanji broj $m \in \mathbb{N}$ za kojeg postoji konačan otvoreni pokrivač $\{U_i\}_{1\le i\le m}$ od Δ takav da je svaki restrikcijski svežanj $E|_{U_i}$ trivijalan zovemo *tip* od E i označavamo ga s $\mathrm{type}(E)$. Ako E nije konačnog tipa, stavljamo $\mathrm{type}(E) := \infty$.

Lema 4.2.5 Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, te neka su $S_1, \dots, S_m$ neki skupovi takvi da je $|S_i| = n$ i $S_i \neq S_j$ za sve $1 \le i, j \le m$, $i \neq j$. Tada je

$$|S_1 \cup \cdots \cup S_m| \ge \frac{n}{e}\sqrt[n]{m}.$$

Dokaz. Stavimo $S := S_1 \cup \cdots \cup S_m$ i $k := |S|$. Prema pretpostavci leme S sadrži m različitih podskupova kardinaliteta n, pa je $m \le \binom{k}{n}$. Kako je $\binom{k}{n} \le \left(\frac{ke}{n}\right)^n$ (vidjeti [22]), imamo $k \ge \frac{n}{e}\sqrt[n]{m}$. $\square$

Lema 4.2.6 Neka je E vektorski svežanj konstantnog ranga n nad lokalno kompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ. Pretpostavimo da je $\mathcal{S}$ podskup od $\Gamma_b(E)$ takav da je

$$\mathrm{span}\{a(s) : a \in \mathcal{S}\} = E(s), \quad \text{for all } s \in \Delta. \tag{4.9}$$

Tada je

$$|\mathcal{S}| \ge \frac{n}{e}\sqrt[n]{\mathrm{type}(E)}.$$

Dokaz. Ako E nije konačnog tipa, tvrdnja slijedi direktno iz leme 1.10.10. Pretpostavimo da je $m := \mathrm{type}(E) < \infty$. Očito je $|\mathcal{S}| \ge n$, pa ako je $m = 1$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da je $m > 1$ i neka je $s_1 \in \Delta$ proizvoljna točka. Prema (4.9) postoji podskup $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$ takav da je $|\mathcal{S}_1| = n$ i $\mathrm{span}\{a(s_1) : a \in \mathcal{S}_1\} = E(s_1)$. Prema neprekidnosti prereza iz $\mathcal{S}$, skup

$$U_1 := \{s \in \Delta : \mathrm{span}\{a(s) : a \in \mathcal{S}_1\} = E(s)\}$$

je otvorena okolina točke s_1. Primijetimo da $\Delta \setminus U_1 \neq \emptyset$. Zaista, ako je $\mathcal{S}_1 = \{a_{j_1}, \dots, a_{j_n}\}$, tada je preslikavanje $\phi_1 : U_1 \times \mathbb{C}^n \to E$ definirano formulom $\phi_1(s, \lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{j_i}(s)$ lokalna trivijalizacija od E (to jest, ϕ_1 je izomorfizam vektorskih svežnjeva $U_1 \times \mathbb{C}^n$ i $E|_{U_1}$). Dakle, ako bi imali $U_1 = \Delta$ tada bi slijedilo da je E trivijalan, odnosno $m = 1$. Izaberimo proizvoljnu točku $s_2 \in \Delta \setminus U_1$. Prema

(4.9) postoji podskup $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$ takav da je $|\mathcal{S}_2| = n$ i $\mathrm{span}\{a(s_2):\ a \in \mathcal{S}_2\} = E(s_2)$. Neka je

$$U_2 := \{s \in \Delta:\ \mathrm{span}\{a(s):\ a \in \mathcal{S}_2\} = E(s)\}.$$

Ponovno, U_2 je otovorena okolina oko s_2. Budući da $s_2 \notin U_1$, $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$. Ako je $m > 2$, koristeći indukciju, našli bismo niz $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_m$ od m različitih podskupova od $\mathcal{S}$, tako da vrijedi $|\mathcal{S}_i| = n$ za sve $1 \leq i \leq m$. Lema 4.2.5 povlači da je

$$|\mathcal{S}| \geq |\mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_m| \geq \frac{n}{e}\sqrt[n]{m}.$$

□

Lema 4.2.7 Neka je E lokalno trivijalni vektorski svežanj konstantnog ranga nad lokalno kompaktnim σ-kompaktnim Hausdorffovim prostorom Δ. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $\mathrm{type}(E) < \infty$;

(ii) $\sup\{\mathrm{type}(E|_K):\ K \subseteq \Delta,\ K \text{ kompaktan}\} < \infty$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ovaj smjer je trivijalan.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Pretpostavimo da je $\mathrm{type}(E) = \infty$. Prema [57] postoji prebrojiv otvoreni pokrivač (U_i) od Δ takav da je svaki $\overline{U_i}$ kompaktan i $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$, za sve $|i - j| > 1$. Prema kompaktnosti od $\overline{U_i}$ i lokalnoj trivijalnosti od E, svi restrikcijski svežnji $E|_{U_i}$ su konačnog tipa. Pretpostavimo da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathrm{type}(E|_{\overline{U_i}}) \leq N$ za sve $i \in \mathbb{N}$. Stavimo

$$V_1 := \bigsqcup_{i=1}^{\infty} U_{2i-1}, \quad \text{and} \quad V_2 := \bigsqcup_{i=1}^{\infty} U_{2i},$$

where $\bigsqcup$ označava disjunktnu uniju. Kako je $\mathrm{type}(E|_{U_i}) \leq \mathrm{type}(E|_{\overline{U_i}}) \leq N$ za sve $i \in \mathbb{N}$, te kako su svi skupovi koji nastupaju u odgovarajućoj uniji međusobno disjunktni, imamo $\mathrm{type}(E|_{V_1}) \leq N$ i $\mathrm{type}(E|_{V_2}) \leq N$. Kako je $V_1 \cup V_2 = \Delta$, slijedi

$$\mathrm{type}(E) \leq \mathrm{type}(E|_{V_1}) + \mathrm{type}(E|_{V_2}) \leq 2N;$$

što je u kontradikciji s $\mathrm{type}(E) = \infty$. □

Dokaz teorema 4.2.3. Kako je A σ-unitalna, primijetimo da je $\mathrm{Prim}(A)$ σ-kompaktan. Zaista, neka je $g \in A$ striktno pozitivni element. Tada je očito $\|g + P\| > 0$ za sve $P \in \mathrm{Prim}(A)$, pa je

$$\mathrm{Prim}(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{P \in \mathrm{Prim}(A):\ \|g + P\| \geq \frac{1}{k}\right\},$$

a svaki skup koji nastupa u gornjoj uniji je kompaktan (propozicija 1.4.16).

Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj nad (lokalno kompaktnim σ-kompaktnim Hausdorffovim) prostorom $\Delta := \mathrm{Prim}(A)$ čija su vlakna izomorfna s $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, takav da je $A = \Gamma_0(E)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Prema propoziciji 3.2.3 $M(A)$ je također n-homogena, pa teorem 4.1.5 povlači da je $M(A)$ konačno centralno generirana. Pretpostavimo da je $M(A) = \mathrm{span}_{Z(M(A))}\{e_1, \ldots, e_m\}$, gdje su $e_1, \ldots, e_m \in M(A)$. Neka je $T \in \mathrm{E}(A)$ s $T = \Theta_A(t)$, za neki tenzor $t = \sum_{k=1}^d a_k \otimes b_k \in M(A) \otimes M(A)$. Tada je $a_k = \sum_{i=1}^m z_{k,i} e_i$ i $b_k = \sum_{i=1}^m w_{k,i} e_i$ za neke $z_{k,i}, w_{k,i} \in Z(M(A))$, pa imamo

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^d \Theta_A\Big(\Big(\sum_{i=1}^m z_{k,i} e_i\Big) \otimes \Big(\sum_{i=1}^m w_{k,i} e_i\Big)\Big) = \sum_{k=1}^d \sum_{i,j=1}^m z_{k,i} w_{k,j} \Theta_A(e_i \otimes e_j) \\ &= \Theta_A\Big(\sum_{i,j=1}^m u_{i,j} e_i \otimes e_j\Big) = \Theta_A\Big(\sum_{j=1}^m \Big(\sum_{i=1}^m u_{i,j} e_i\Big) \otimes e_j\Big), \end{aligned}$$

gdje je $u_{i,j} := \sum_{k=1}^d z_{k,i} w_{k,j}$. Dakle, $\ell(T) \le m$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Prema propoziciji 3.0.21 imamo $\mathrm{E}(A) = \mathrm{IB}(A)$, pa je specijalno i $\mathrm{E}(A) = \mathrm{Im}\,\Theta_A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Pretpostavimo da E nije konačnog tipa. Prema teoremu 1.10.9 E također nije konačnog tipa kao vektorski svežanj. Za $m \in \mathbb{N}$ neka je $d_m := \lfloor \frac{n^2}{e} \sqrt[n^2]{m} \rfloor$. Prema lemi 4.2.7 postoji kompaktan podskup $K_m \subseteq \Delta$ takav da je $\mathrm{type}(E|_{K_m}) \ge m$. Stavimo

$$J_m := \{a \in \Gamma_0(E) : \ a|_{K_m} = 0\} \quad \text{and} \quad A_m := A/J_m.$$

Koristeći teorem 1.9.19, možemo napraviti identifikaciju $A_m = \Gamma(E|_{K_m})$. Kako je K_m kompaktan, prema lemi 1.10.10 postoji konačan broj hermitskih prereza $e_1, \ldots, e_{r_m} \in \Gamma(E|_{K_m})_h$ za koje vrijedi

$$\mathrm{span}\{e_1(s), \ldots, e_{r_m}(s) : \ s \in \Delta\} = E(s), \quad \text{za sve } s \in K_m.$$

Ako su $t := \sum_{k=1}^{r_m} e_k \otimes e_k$ i $\dot{T}_m := \Theta_{A_m}(t)$, tada iz leme 4.2.1 slijedi da ako je $\dot{T}_m = \Theta_{A_m}(\sum_{k=1}^d a_k \otimes b_k)$ neka druga reprezentacija od $\dot{T}_m$ tada također imamo

$$\mathrm{span}\{b_1(s), \ldots, b_d(s) : \ s \in \Delta\} = E(s), \quad \text{za sve } s \in K_m.$$

Koristeći lemu 4.2.6, dobivamo $\ell(\dot{T}_m) \ge d_m$. Napokon, ako je $T_m \in \mathrm{E}(A)$ bilo koji lift od $\dot{T}_m$ (tj., ako je $T_m \in \mathrm{E}(A)$ takav da je $\dot{T}_m = Q_{J_m}(T_m)$, gdje je Q_{J_m} preslikavanje iz napomene 2.4.2), tada je očito $\ell(T_m) \ge \ell(\dot{T}_m) \ge d_m$. Budući da je $\lim_{m\to\infty} d_m = \infty$, slijedi da $\mathrm{E}(A)$ nije konačne duljine.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Pretpostavimo da E nije konačnog tipa. Kako je Δ σ-kompaktan, postoji niz (e_k) hermitskih prereza u $A = \Gamma_0(E)$ takav da je

$$\mathrm{span}\{e_k(s) : \ k \in \mathbb{N}\} = E(s), \quad \text{za sve } s \in \Delta. \tag{4.10}$$

Stavimo $t := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} e_k \otimes e_k \in A \otimes_h A$. Pretpostavimo da je $T := \Theta_A(t) \in \mathrm{E}(A)$ i neka je $u = \sum_{k=1}^d a_k \otimes b_k \in M(A) \otimes M(A)$ tenzor za kojeg je $T = \Theta_A(u)$. Prema lemi

3.2.2 imamo $M(A) = \Gamma_b(E)$. Budući da prema teoremu 1.10.9 E nije konačnog tipa niti kao vektorski svežanj , lema 1.10.10 povlači da postoji točka $s_0 \in \Delta$ takva da je

$$\operatorname{span}\{b_1(s_0), \ldots, b_d(s_0)\} \subsetneqq E(s_0). \tag{4.11}$$

No lema 4.2.1 povlači da je

$$\operatorname{span}\{e_k(s_0) : \ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \operatorname{span}\{b_1(s_0), \ldots, b_d(s_0)\};$$

što je u kontradikciji s (4.10) i (4.11). □

Napomena 4.2.8 Neka je A σ-unitalna C*-algebra i neka je $J \in \operatorname{Id}(A)$. Prema nekomutativnom Tietzeovom teoremu (teorem 1.1.48) proširenje $q_J^\beta : M(A) \to M(A/J)$ od q_J je također surjektivno. Tada je i inducirana kontrakcija $q_J^\beta \otimes q_J^\beta : M(A) \otimes_h M(A) \to M(A/J) \otimes_h M(A/J)$ također surjektivna (štoviše, $q_J^\beta \otimes q_J^\beta$ je potpuno kvocijentni operator), pa je $Q_J(\mathrm{E}(A)) = \mathrm{E}(A/J)$ i $Q_J(\operatorname{Im}\Theta_A) = \operatorname{Im}\Theta_{A/J}$ (gdje je Q_J operator iz napomene 2.4.2). Dakle, ako je $\operatorname{Im}\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ tada je $\operatorname{Im}\Theta_{A/J} = \mathrm{E}(A/J)$, te ako je $\mathrm{E}(A)$ konačne duljine, takva je i $\mathrm{E}(A/J)$.

Korolar 4.2.9 Neka je A separabilna C*-algebra. Pretpostavimo da A zadovoljava jedan od sljedećih uvjeta:

(i) $\mathrm{E}(A)$ je konačne duljine;

(ii) $\operatorname{Im}\Theta_A = \mathrm{E}(A)$.

Tada je A SFT algebra.

Dokaz. Prema teoremu 4.2.2 A je subhomogena. Neka je

$$0 = J_0 \subseteq J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_p = A$$

standardni kompozicijski niz za A (1.37). Trebamo pokazati da je svaki homogeni kvocijent J_i/J_{i-1} konačnig tipa. Koristeći indukciju, napomenu 4.2.8 i teorem 4.2.3 tvrdnju je dovoljno dokazati za slučaj kada je $p = 2$. Neka je $J := J_1$. Ponovno, napomena 4.2.8 i teorem 4.2.3 povlače da je A/J konačnog tipa. Kako bi dokazali da je J također konačnog tipa, možemo pretpostaviti da je J esencijalan u A. Zaista, ako J nije esencijalan, tada možemo A zamijeniti s $B := A/J^\perp$, jer je prema lemi 3.2.1 n-homogeni ideal K od B esencijalan u B i $K \cong J$. Pretpostavimo da J nije konačnog tipa. Prema dokazu teorema 4.2.3, postoji niz tenzora (t_m) u $J \otimes J$ i tenzor $t \in J \otimes_h J$ takvi da je $\lim_m \ell(\dot{T}_m) = \infty$ i $\dot{T} \notin \mathrm{E}(J)$; gdje su $\dot{T}_m := \Theta_J(t_m)$ i $\dot{T} := \Theta_J(t)$. Stavimo $T_m := \Theta_A(t_m)$ i $T := \Theta_A(t)$. Kako je J esencijalan u A, imamo $M(A) \subseteq M(J)$, pa je $\lim_m \ell(T_m) \geq \lim_m \ell(\dot{T}_m) = \infty$ i $T \notin \mathrm{E}(A)$. □

Kako bi dali primjere SFT algebri koje nisu direktne sume homogenih i koje zadovoljavaju uvjete (i) i (ii) iz korolara 4.2.9, najprije ćemo trebati par pomoćnih rezultata koji će nam omogućiti dosta brzu provjeru za (i) i (ii).

Definicija 4.2.10 Neka je B C*-algebra i $A \subseteq M(B)$ C*-podalgebra od $M(B)$. Tada sliku $\operatorname{Im}\Theta_B|_{A\otimes A}$ restrikcije kontrakcije $\Theta_B : M(B) \otimes_h M(B) \to \mathrm{ICB}(B)$ na $A \otimes A$ označavamo s $\mathrm{E}_A(B)$ (gdje, kao i prije, pretpostavljamo da je $A \otimes A \subseteq A \otimes_h A \subseteq M(B) \otimes_h M(B)$, koristeći injektinost Haagerupovog tenzorskog produkta). Za svaki operator iz $\mathrm{E}_A(B)$ kažemo da je *elementarni operator* na B *s koeficijentima* u A. Također ćemo s $\mathrm{E}(B; A)$ označavati skup svih $T \in \mathrm{E}(B)$ za koje vrijedi $T(B) \subseteq A$.

Lema 4.2.11 Neka je B be unitalna n-homogena C*-algebra i neka je $J \in \mathrm{Id}(B)$. Tada $\mathrm{E}_J(B)$ konačne duljine i vrijedi $\mathrm{E}_J(B) = \mathrm{E}(B; J)$. Specijalno, $\mathrm{E}_J(B)$ je (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{E}(B)$.

Dokaz. Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj nad prostorom $\Delta := \mathrm{Prim}(B)$ (koji je kompaktan jer je B unitalna) čija su sva vlakna izomorfna s $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, takav da je $B = \Gamma(E)$. Prema kompaktosti od Δ i lokalnoj trivijalnosti od E, postoji konačan otvoreni pokrivač $\{U_j\}_{1\le j\le m}$ od Δ takav da je svaki $E|_{\overline{U_j}}$ trivijalan. Koristeći konačnu particiju jedinice podređenu pokrivaču $\{U_j\}_{1\le j\le m}$ dokaz možemo reducirati na situaciju kada je $m = 1$, tj. kada je E trivijalan. Tada je $B = C(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$. Kako je $J \in \mathrm{Id}(B)$, postoji zatvoren podskup C od Δ takav da je

$$J = \{a \in B : \ a|_C = 0\}.$$

Neka su $(e_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ standardne matrične jedinice za $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, koje poistovjećujemo sa pripadnim konstantnim funkcijama u $B = C(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$. Neka je $T \in \mathrm{E}(B; J)$. Tada T možemo napisati u obliku

$$T = \sum_{i,j,p,q=1}^{n} f_{i,j,p,q}\Theta_B(e_{i,j} \otimes e_{p,q}), \tag{4.12}$$

za neke funkcije $f_{i,j,p,q} \in C(\Delta) \cong Z(B)$. Neka su $1 \le r, s \le n$ fiksirani brojevi. Kako je $T(B) \subseteq J$, imamo

$$T(e_{r,s}) = \sum_{i,j,p,q=1}^{n} f_{i,j,p,q}e_{i,j}e_{r,s}e_{p,q} = \sum_{i,q=1}^{n} f_{i,r,s,q}e_{i,q} \in J.$$

Dakle, $f_{i,r,s,q}|_C = 0$ za sve $i, q = 1, \ldots, n$. Kako su r, s bili proizvoljni, imamo

$$f_{i,j,p,q}|_C = 0 \quad \text{za sve } 1 \le i, j, p, q \le n.$$

Primijetimo da svaku funkciju $f \in C(\Delta)$ sa svojstvom $f|_C = 0$ možemo faktorizirati u obliku $f = gh$, gdje su $g, h \in C(\Delta)$ takve da je $g|_C = 0$ i $h|_C = 0$ (na primjer, stavimo $g := \sqrt{|f|}$ i $h := f/\sqrt{|f|}$). Ako tu faktorizaciju ptimijenimo na sve funkcije $f_{i,j,p,q}$, dobivamo

$$f_{i,j,p,q} = g_{i,j,p,q} \cdot h_{i,j,p,q},$$

pa iz (4.12) slijedi da je

$$T = \sum_{i,j,p,q=1}^{n} f_{i,j,p,q}\Theta_B(e_{i,j} \otimes e_{p,q}) = \sum_{i,j,p,q=1}^{n} \Theta_B(g_{i,j,p,q}e_{i,j} \otimes h_{i,j,p,q}e_{p,q}).$$

Dakle, $T \in \mathrm{E}_J(B)$. □

Napomena 4.2.12 Pretpostavimo da je

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0$$

egzaktan niz normiranih prostora, gdje je q ograničena linearna surjekcija. Ako je q također otvoreno preslikavanje, primijetimo da je Y Banachov prostor ako i samo ako su X i Z Banachovi prostori. Također primijetimo da ako su $\dot{Y} \subseteq Y$ i $\dot{Z} \subseteq Z$ (ne nužno zatvoreni) potprostori takvi da je $q(\dot{Y}) = \dot{Z}$ i koji se uklapaju u egzaktni niz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \dot{Y} \xrightarrow{\dot{q}} \dot{Z} \longrightarrow 0,$$

gdje je $\dot{q} := q|_{\dot{Y}}$ (pa onda i $\dot{Y} = \dot{q}^{-1}(\dot{Z}) = q^{-1}(\dot{Z})$), tada je $\dot{q}$ otvoreno preslikavanje, čim je q otvoreno.

Lema 4.2.13 Neka je A unitalna n-subhomogena C*-algebra sa n-homogenim idealom J koji je konačnog tipa. Pretpostavimo da je B unitalna n-homogena C*-algebra koja sadrži A i u kojoj je J esencijalni ideal. Tada je $\mathrm{E}(A)$ (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{ICB}(A)$ ako i samo ako je $\mathrm{E}_{A/J}(B/J)$ (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{ICB}(B/J)$.

Dokaz. Najprije primijetimo da je J također esencijalan u A. Također primijetimo da takva C*-algebra B sigurno postoji, jer je prema propoziciji 3.2.3 $M(J)$ n-homogena i $A \subseteq M(J)$ (budući da je J esencijalan u A). Prema teoremu Kaplanskog o gustoći (teorem 1.3.6) restrikcijsko preslikavanje $T \mapsto T|_A$ je izometrički izomorfizam sa $\mathrm{E}_A(B)$ na $\mathrm{E}(A)$. Dakle, $\mathrm{E}(A)$ možemo identificirati s $\mathrm{E}_A(B)$. Neka je $\dot{Q}_J$ restrikcija inducirane kontrakcije $Q_J : \mathrm{ICB}(B) \to \mathrm{ICB}(B/J)$ (napomena 2.4.2) na $\mathrm{E}(B)$. Očito je $\dot{Q}_J(\mathrm{E}(B)) = \mathrm{E}(B/J)$ i jezgra od $\dot{Q}_J$ je točno skup $\mathrm{E}(B; J)$, koji se prema lemi 4.2.11 podudara sa skupom $\mathrm{E}_J(B)$. Kako su B i B/J unitalne homogene C*-algebre, prema propoziciji 3.0.21 imamo $\mathrm{ICB}(B) = \mathrm{E}(B)$ i $\mathrm{ICB}(B/J) = \mathrm{E}(B/J)$. Specijalno, $\mathrm{E}(B)$ i $\mathrm{E}(B/J)$ su Banachovi prostori, pa je prema teoremu o otvorenom preslikavanju $\dot{Q}_J$ otvoreno preslikavanje. Kako je $\dot{Q}_J(\mathrm{E}_A(B)) = \mathrm{E}_{A/J}(B/J)$, primijetimo da egzaktni niz

$$0 \longrightarrow \mathrm{E}_J(B) \longrightarrow \mathrm{E}(B) \xrightarrow{\dot{Q}_J} \mathrm{E}(B/J) \longrightarrow 0$$

Banachovih prostora inducira egzaktan niz normiranih prostora

$$0 \longrightarrow \mathrm{E}_J(B) \longrightarrow \mathrm{E}_A(B) \xrightarrow{\ddot{Q}_J} \mathrm{E}_{A/J}(B/J) \longrightarrow 0,$$

(gdje $\ddot{Q}_J$ označava restrikciju od $\dot{Q}_J$ na skup $\mathrm{E}_A(B)$), jer je $\ker \ddot{Q}_J = \ker \dot{Q}_J = \mathrm{E}_J(B)$. Prema napomeni 4.2.12, $\ddot{Q}_J$ je također otvoreno preslikavanje, a kako je $\mathrm{E}_J(B)$ Banachov prostor (lema 4.2.11), slijedi da je $\mathrm{E}_A(B)$ Banachov prostor ako i samo ako je $\mathrm{E}_{A/J}(B/J)$ Banachov prostor. □

Propozicija 4.2.14 Neka je A unitalna n-SFT algebra sa n-homogenim esencijalnim idealom J. Ako je A/J konačno dimenzionalna, tada je $\mathrm{E}(A)$ konačne duljine i $\mathrm{E}(A)$ je (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{ICB}(A)$. Specijalno, $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$.

Dokaz. Prema propoziciji 3.2.3 $B := M(J)$ je homogena C*-algebra. Kako bi dokazali da je $\mathrm{E}(A)$ zatvoren, prema lemi 4.2.13 dovoljno je dokazati da je $\mathrm{E}_{A/J}(B/J)$ zatvoren potprostor od $\mathrm{ICB}(B/J)$. Kako je $\dim(A/J) < \infty$, to je i $\dim \mathrm{E}_{A/J}(B/J) < \infty$, pa je očito $\mathrm{E}_{A/J}(B/J)$ zatvoren (jer je svaki konačno dimenzionalni potprostor normiranog prostora zatvoren). Dokažimo i da je $\mathrm{E}(A)$ konačne duljine. Neka je $T \in \mathrm{E}(A) = \mathrm{E}_A(B)$. Koristeći iste oznake kao u dokazu leme 4.2.13 imamo $\ddot{Q}_J(T) \in \mathrm{E}_{A/J}(B/J)$. Kako je $d := \dim(A/J) < \infty$, postoji $S \in \mathrm{E}_A(B)$ takav da je $\ell_A(S) \le d$ i $V := T - S \in \ker \ddot{Q}_J = \mathrm{E}_J(B)$. Prema lemi 4.2.11, $\mathrm{E}_J(B)$ je konačne duljine, pa postoji $d' \in \mathbb{N}$ takav da je $\ell_J(V') \le d'$, za sve $V' \in \mathrm{E}_J(B)$. Kako je $J \subseteq A$, imamo $V \in \mathrm{E}(A)$. Iz $T = S + V$, slijedi

$$\ell_A(T) \le \ell_A(S) + \ell_A(V) \le \ell_A(S) + \ell_J(V) \le d + d'$$

□

Primjer 4.2.15 Jednostavni primjer 2-SFT algebre A koja zadovoljava uvjete prethodne propozicije i koja nije konačna direktna homogenih je C*-algebra iz primjera 1.8.8. Ovdje je za ambijentalnu 2-homogenu C*-algebru B prirodno uzeti C^*-algebru $C([0,1], \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$.

4.3 Druga redukcija. PFT i GFT algebre.

U ovoj točki ćemo pokazati da je klasa separabilnih i unitalnih C*-algebri A za koje vrijedi $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ ili $\ell(\mathrm{E}(A)) < \infty$ striktno manja od klase unitalnih separabilnih SFT algebri. Najprije ćemo dati alternativni opis klase separabilnih SFT algebri, koji direktno proširuje opis klase σ-unitalnih homogenih C*-algebri iz korolara 1.10.11.

Propozicija 4.3.1 Neka je A separabilna subhomogena C* algebra. Tada je ekvivalentno

(i) A je SFT algebra;

(ii) Postoji prirodni broj $m \in \mathbb{N}$ (koji ovisi samo o A) i elementi $e_1, \dots, e_m \in A$ takvi da vrijedi

$$\mathrm{span}\{e_1 + P, \dots, e_m + P\} = A/P, \quad \text{za sve } P \in \mathrm{Prim}(A) \tag{4.13}$$

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Pretpostavimo da je A n-SFT algebra. Koristeći indukciju po duljini m kompozicijskog niza za A, tvrdnju je dovoljno dokazati (ii) za slučaj kada je $m = 2$. U tom slučaju, neka je J n-homogeni ideal od A. Prema pretpostavci, J i A/J su homogene konačnog tipa, pa prema korolaru 1.10.11 postoje $a_1, \ldots, a_r \in J$ i $b_1, \ldots, b_s \in A$ takvi da vrijedi

$$\operatorname{span}\{a_1 + Q, \ldots, a_r + Q\} = A/Q \quad \text{za sve } Q \in \operatorname{Prim}(J),$$

$$\operatorname{span}\{(b_1 + J) + \dot{Q}, \ldots, (b_s + J) + \dot{Q}\} = (A/J)/\dot{Q} \quad \text{za sve } \dot{Q} \in \operatorname{Prim}(A/J).$$

Sada je lako provjeriti da vrijedi

$$\operatorname{span}\{a_1 + P, \ldots, a_r + P, b_1 + P, \ldots, b_s + P\} = A/P \quad \text{za sve } P \in \operatorname{Prim}(A).$$

Zaista, neka je $P \in \operatorname{Prim}(A)$. Ako je $J \subseteq P$, tada je $P/J \in \operatorname{Prim}(A/J)$, a kako je $A/P \cong (A/J)/(P/J)$, slijedi da je $\operatorname{span}\{b_1 + P, \ldots, b_s + P\} = A/P$. Ako $J \nsubseteq P$ tada je $P \cap J \in \operatorname{Prim}(J)$. Kako je A liminalna C*-algebra, primitivni ideali od A su ujedno i maksimalni, pa je $A/P = (J + P)/P \cong J/(P \cap J)$, odakle slijedi da je $\operatorname{span}\{a_1 + P, \ldots, a_r + P\} = A/P$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Pretpostavimo da vrijedi (ii). Tada je očito A (recimo n-)subhomogena C*-algebra i neka je J njen n-homogeni ideal. Koristeći indukciju po duljini kompozicijskog niza od A, dovoljno je dokazati da je J konačnog tipa i da za A/J također vrijedi (ii). Kako je A separabilna, takav je i centar $Z(J)$ ideala J, pa postoji striktno pozitivni $z \in Z(J)$. Tada su očito $ze_i \in J$ $(1 \le i \le m)$ i imamo

$$\operatorname{span}\{ze_1 + P, \ldots, ze_m + P\} = A/P \quad \text{za sve } P \in \operatorname{Prim}(J).$$

Prema korolaru 1.10.11, J je konačnog tipa. Dokaz da za A/J također vrijedi (ii) je trivijalan i slijedi iz izomorfizma $(A/J)/(P/J) \cong A/P$, kao u (i) $\Rightarrow$ (ii). □

Sada ćemo pokazati da za unitalnu C*-algebru A iz uvjeta da je $\operatorname{E}(A)$ konačne duljine slijedi i da je supremum svih kodimenzija 2-primalnih ideala u A konačan, te da za separabilnu A iz uvjeta $\operatorname{Im}\Theta_A = \operatorname{E}(A)$ slijedi da skup $\operatorname{Prim}(A)$ u (4.13) možemo zamijeniti s većim skupom $\operatorname{Primal}_2(A)$ 2-primalnih ideala u A. Za dokaz te činjenice koristit ćemo sljedeću lemu čiji je dokaz vrlo sličan dokazu teorema 4.2.2 i dokazu implikacije (iii) $\Rightarrow$ (i) teorema 4.2.3.

Napomena 4.3.2 Za $m \in \mathbb{N}$ s $A \overset{m}{\otimes} A$ označavamo skup svih tenzora u $A \otimes A$ ranga manjeg ili jednakog m.

Lema 4.3.3 Neka je A C*-algebra i $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{Id}(A)$ neka neprazna familija ideala u A. Stavimo

$$\Lambda(\mathcal{F}) := \bigcap\{J \otimes_h A + A \otimes_h J : \ J \in \mathcal{F}\} \in \operatorname{Id}(A \otimes_h A). \tag{4.14}$$

(i) Ako za neko $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$A \overset{m}{\otimes} A + \Lambda(\mathcal{F}) = A \otimes A + \Lambda(\mathcal{F}),$$

tada je

$$\sup\{\dim(A/J): \ J \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

(ii) Ako je A separabilna i ako vrijedi

$$(A \otimes_h A) + \Lambda(\mathcal{F}) = A \otimes A + \Lambda(\mathcal{F}),$$

tada postoji $m \in \mathbb{N}$ i elementi $a_1, \ldots, a_m \in A$ takvi da vrijedi

$$\operatorname{span}\{a_1 + J, \ldots, a_m + J\} = A/J, \quad \text{za sve } J \in \mathcal{F} \tag{4.15}$$

Specijalno, $\sup\{\dim(A/J): \ J \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Dokaz. (i). Pretpostavimo da postoji $J \in \mathrm{Id}(A)$ takav da je $n := \dim A/J > m$ i neka su e_k $(1 \leq k \leq n)$ bilo koji elementi u A za koje je skup $\{q_J(e_1), \ldots, q_J(e_n)\}$ linearno nezavisan u A/J. Stavimo

$$t := \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes e_k \in A \otimes A.$$

Prema pretpostavci, postoji tenzor $u \in A \otimes A$ s reprezentacijom $u = \sum_{k=1}^{d} a_k \otimes b_k$, gdje je $d \leq m$ takav da je $t - u \in \Lambda(\mathcal{F})$. Kako je

$$\Lambda(\mathcal{F}) \subseteq J \otimes_h A + A \otimes_h J = \ker(q_J \otimes q_J),$$

slijedi jednakost tenzora

$$\sum_{k=1}^{n} q_J(e_k) \otimes q_J(e_k) = \sum_{k=1}^{d} q_J(a_k) \otimes q_J(b_k)$$

u $(A/J) \otimes_h (A/J)$, što je nemoguće, budući da je lijevi tenzor ranga n, a desni tenzor ranga manjeg ili jednakog $d \leq m < n$.

(ii). Neka je (e_k) prebrojiv gust podskup u A takav da je $\|e_k\| = 1$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Definirajamo tenzor $t \in A \otimes_h A$ s

$$t := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} e_k \otimes e_k^* \in A \otimes_h A.$$

Prema pretpostavci, postoje $a_1, \ldots, a_m, \ b_1, \ldots, b_m \in A$ takvi da za $u := \sum_{k=1}^{m} a_k \otimes b_k$ vrijedi $t - u \in \Lambda(\mathcal{F})$. Pretpostavimo da (4.15) ne vrijedi. Tada postoji $J \in \mathrm{Id}(A)$ takav da je

$$\operatorname{span}\{a_1 + J, \ldots, a_m + J\} \subsetneq A/J. \tag{4.16}$$

Neka je $q_J : A \to A/J$ kvocijentni $*$-epimorfizam. Radi jednostavnosti oznaka stavimo $\dot{A} := A/J$ i $\dot{x} := q_J(x)$ $(x \in A)$. Kako je

$$t - u \in \Lambda(\mathcal{F}) \subseteq J \otimes_h + A \otimes_h J = \ker(q_J \otimes q_J),$$

imamo jednakost tenzora

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \dot{e}_k \otimes \dot{e}_k^* = (q_J \otimes q_J)(t) = (q_J \otimes q_J)(u) = \sum_{k=1}^{m} \dot{a}_k \otimes \dot{b}_k \tag{4.17}$$

u $\dot{A} \otimes_h \dot{A}$. Stavimo $V := \operatorname{span}\{\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_m\}$. Neka je $\varphi \in \dot{A}^*$ proizvoljni ograničeni linearni funkcional na $\dot{A}$ koji se poništava na V i neka je $\varphi^* \in \dot{A}^*$ dan s $\varphi(\dot{x}) := \overline{\varphi(\dot{x}^*)}$. Kako su svi ograničeni linearni funkcionalni potpuno ograničeni, inducirani funkcional

$$\varphi \otimes \varphi^* : \dot{A} \otimes_h \dot{A} \to \mathbb{C}, \quad (\varphi \otimes \varphi^*)(\dot{x} \otimes \dot{y}) = \varphi(\dot{x})\overline{\varphi(\dot{y}^*)}, \quad (x, y \in \dot{A})$$

je ograničen, pa iz (4.17) slijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |\varphi(\dot{e}_k)|^2 = (\varphi \otimes \varphi^*)(t) = (\varphi \otimes \varphi)(u) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(\dot{a})\overline{\varphi(\dot{b}^*)} = 0,$$

jer je $\varphi(a_k) = 0$ za sve $1 \leq k \leq m$. Zato je $\varphi(\dot{e}_k) = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$, a kako je $\{\dot{e}_k : k \in \mathbb{N}\}$ gust u $\dot{A}$ (jer je $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ gust u A), slijedi $\varphi = 0$. Budući da je φ iz anihilatora od V bio proizvoljan, slijedi $V = \dot{A}$, što je u kontradikciji s (4.16). □

Definicija 4.3.4 Za unitalnu C*-algebru A kažemo da je

(i) *PFT algebra* ako postoji $m \in \mathbb{N}$ te elementi $e_1, \ldots, e_m \in A$ takvi da vrijedi

$$\operatorname{span}\{e_1 + R, \ldots, e_m + R\} = A/R, \quad \text{za sve } R \in \operatorname{Primal}_2(A);$$

(ii) *GFT algebra* ako postoji $m \in \mathbb{N}$ te elementi $e_1, \ldots, e_m \in A$ takvi da vrijedi

$$\operatorname{span}\{e_1 + G, \ldots, e_m + G\} = A/G, \quad \text{za sve } G \in \operatorname{Glimm}(A);$$

Napomena 4.3.5 Kako svaki 2-primalni ideal sadrži jedinstven Glimmov ideal (propozicija 1.6.7), očito je svaka GFT algebra A ujedno i PFT algebra. Ako je A separabilna PFT algebra, iz $\operatorname{Prim}(A) \subseteq \operatorname{Primal}_2(A)$ i propozicije 4.3.1 slijedi da je ona i SFT algebra.

Korolar 4.3.6 Neka je A separabilna unitalna C*-algebra.

(i) Ako je $\operatorname{Im} \Theta_A = \operatorname{E}(A)$ tada je A PFT algebra.

(ii) Ako je $\operatorname{E}(A)$ konačne duljine tada je A SFT algebra i

$$\sup\{\dim(A/R) : R \in \operatorname{Primal}_2(A)\} < \infty. \tag{4.18}$$

Dokaz. (i). Koristeći iste oznake kao u lemi 4.3.3, iz korolara 2.5.8 slijedi

$$\ker \Theta_A = \bigcap \{R \otimes_h A + A \otimes_h R : R \in \operatorname{Primal}_2(A)\} = \Lambda(\operatorname{Primal}_2(A)).$$

Tada je uvjet $\operatorname{Im}\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ ekvivalentan uvjetu

$$(A \otimes_h A)/\Lambda(\mathrm{Primal}_2(A)) = A \otimes A + \Lambda(\mathrm{Primal}_2(A)).$$

Iz leme 4.3.3 slijedi da je A PFT algebra.

(ii). Iz korolara 4.2.9 slijedi da je A SFT algebra. Nadalje, uvjet da je $\mathrm{E}(A)$ konačne duljine je ekvivalentan uvjetu egzistencije prirodnog broja $k \in \mathbb{N}$ za kojeg je

$$A \otimes A + \Lambda(\mathrm{Primal}_2(A)) = A \overset{k}{\otimes} A + \Lambda(\mathrm{Primal}_2(A)).$$

Prema lemi 4.3.3, supremum (4.18) je konačan. □

Napomena 4.3.7 Ako je A unitalna C*-algebra, tada iz leme 2.5.7 slijedi da za ideal $J \in \mathrm{Id}(A)$ vrijedi

$$\ker\Theta_A \subseteq J \otimes_h A + A \otimes_h J$$

ako i samo ako je J 2-primalan. Dakle, maskimalna familija ideala $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Id}(A)$ za koju vrijedi $\Lambda(\mathcal{F}) = \ker\Theta_A$ je upravo familija $\mathcal{F} = \mathrm{Primal}_2(A)$, odakle slijedi da tvrdnju korolara 4.3.6 ne možemo dodatno pojačati (barem ne u takvom obliku).

Problem 4.3.8 Sada se prirodno postavlja pitanje da li je nužno svaka unitalna separabilna C*-algebra A za koju je $\mathrm{E}(A)$ konačne duljine nužno PFT algebra? Štoviše, da li je svaka (unitalna separabilna) SFT algebra A za koju vrijedi (4.18) nužno PFT algebra? Odgovori na ta pitanja su nam trenutno nepoznati. Također nam je nepoznato da li je uvjet da je A PFT algebra ujedno i dovoljan da bi vrijedilo $\operatorname{Im}\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ i $\ell(\mathrm{E}(A)) < \infty$.

Sada napokon dajemo primjer (unitalne i separabilne) SFT algebre za koju je $\mathrm{E}(A) \subsetneqq \operatorname{Im}\Theta_A$ i za koju $\mathrm{E}(A)$ nije konačne duljine.

Primjer 4.3.9 Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strogo rastući konvergentni niz u $\mathbb{R}$ s limesom x_0 i neka je

$$\Delta := \bigsqcup_{k=1}^{\infty}[x_{2k-1}, x_{2k}] \cup \{x_0\},$$

opskrbljen sa relativnom topologijom od $\mathbb{R}$ (tako da je Δ kompaktan potprostor od $\mathbb{R}$). Za svako $k \in \mathbb{N}$ neka je $\mathbb{N}_k := \{1, \ldots, k\}$ i stavimo $m(k) := \binom{k}{2}$. Neka je nadalje ϕ_k neka bijekcija sa $\mathbb{N}_{m(k)}$ na skup svih dvočlanih podskupova od $\mathbb{N}_k$; radi određenosti stavimo $\phi_k(j) = \{\phi_{1k}(j), \phi_{2k}(j)\}$, gdje je $\phi_{1k}(j) < \phi_{2k}(j)$ (za sve $1 \leq j \leq m(k)$) te neka su $s_{1k}, \ldots, s_{m(k)k}$ (različite) točke iz segmenta $\Delta_k := [x_{2k-1}, x_{2k}]$. Neka je A C*-podalgebra od $B := C(\Delta, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$ koja se sastoji od svih funkcija $a \in B$ za koje postoje kompleksni brojevi $\{\lambda_{ik}(a)\}$ ($k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k$) i $\lambda(a)$ takvi da je

$$a(s_{ik}) = \begin{bmatrix} \lambda_{\phi_{1k}(i)}(a) & 0 \\ 0 & \lambda_{\phi_{2k}(i)}(a) \end{bmatrix}, \quad \text{za sve } k \in \mathbb{N} \text{ i } 1 \leq i \leq m(k) \text{ i}$$

$$a(x_0) = \begin{bmatrix} \lambda(a) & 0 \\ 0 & \lambda(a) \end{bmatrix}.$$

Tada je A (separabilna i unitalna) SFT algebra koja nije PFT algebra. Specijalno, $\mathrm{E}(A) \subsetneqq \mathrm{Im}\,\Theta_A$ i $\mathrm{E}(A)$ nije konačne duljine.

Dokaz. 2-homogeni ideal J od A je oblika

$$J = \{a \in A : \ a(s) = 0, \text{ za sve } s \in \Delta \setminus U\} = C_0(U, \mathrm{M}_2(\mathbb{C})),$$

gdje je

$$U := \Delta \setminus (\{s_{ik} : k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m(k)\} \cup \{x_0\}).$$

Kako je A/J komutativna, A je SFT algebra. Budući da je U gust u Δ, centar $Z(A)$ od A sastoji se od svih elemenata $a \in A$ za koje je $a(s)$ multipl jedinice (pa stoga $\lambda_{ik}(a)$ ne ovisi i). Ako sa $\dot{\Delta}$ označimo kvocijentni prostor dobiven iz Δ identifikacijom točaka s_{ik} $(1 \leq i \leq m(k))$, slijedi da je $\dot{\Delta}$ kompaktan Hausdorffov prostor i da je $Z(A)$ kanonski izomorfan algebri $C(\dot{\Delta})$ svih neprekidnih kompleksnih funkcija na $\dot{\Delta}$. Tada očito prostor $\mathrm{Glimm}(A)$ možemo identificirati sa $\dot{\Delta}$. Specijalno, svaki ideal G_k od A oblika $G_k := \bigcap_{1 \leq i \leq k} \ker \lambda_{ik}$ je Glimmov ideal od A i imamo

$$\mathrm{Glimm}(A) = \{\ker \pi_s : \ s \in U\} \cup \{G_k : \ k \in \mathbb{N}\} \cup \{\ker \lambda\},$$

gdje su redom $\lambda_{ik} : A \to \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq k)$, $\lambda : A \to \mathbb{C}$ i $\pi_s : A \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ $(s \in U)$ ireducibilne reprezentacije od A definirane s $\lambda_{ik} : a \mapsto \lambda_{ik}(a)$, $\lambda : a \mapsto \lambda(a)$ i $\pi_s : a \mapsto a(s)$. Nadalje, odavde se lako vidi da je (skupovno)

$$\mathrm{Prim}(A) = \{\ker \pi_s : \ s \in U\} \cup \{\ker \lambda_{ik} : \ k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m(k)\} \cup \{\ker \lambda\}.$$

Tvrdimo da je svaki Glimmov ideal G_k 2-primalan. Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Dovoljno je dokazati da za proizvoljne $P, Q \in \mathrm{Prim}(A/G_k)$ postoji mreža u $\mathrm{Prim}(A)$ koja istovremeno konvergira prema P i Q. Zaista, kako su svi primitivni ideali od A/G_k oblika $\ker \lambda_{ik}$ $(1 \leq i \leq k)$, postoje $1 \leq p, q \leq k$ takvi da je $P = \ker \lambda_{pk}$ i $Q = \ker \lambda_{qk}$, te neka je $1 \leq i \leq m(k)$ takav da je $\phi(i) = \{p, q\}$. Uzmimo proizvoljnu mrežu (s_α) u $[x_{k-1}, x_k] \setminus \{s_{ik} : 1 \leq i \leq m(k)\}$ koja konvergira prema s_{ik}. Tada nije teško vidjeti da je $(\ker \pi_{s_\alpha})$ mreža u $\mathrm{Prim}(A)$ koja istovremeno konvergira prema $\ker \lambda_{pk} = P$ i $\ker \lambda_{qk} = Q$. Dakle, $G_k \in \mathrm{Primal}_2(A)$, a kako je $\dim A/G_k = k$ za sve $k \in \mathbb{N}$, slijedi da A nije PFT algebra. Iz korolara 4.3.6 slijedi da $\mathrm{E}(A) \subsetneqq \mathrm{Im}\,\Theta_A$ i da $\mathrm{E}(A)$ nije konačne duljine. Štoviše, koristeći rezultate iz [13] i [10] može se dokazati da ni slika $\mathrm{Im}\,\Theta_A$ nije (cb-)zatvorena. □

Kao što smo već napomenuli, ako je A GFT algebra, ona je svakako PFT algebra. Ukoliko je svaki Glimmov ideal u A 2-primalan tada se ta dva pojma naravno podudaraju. Sljedeći primjer pokazuje da postoje PFT algebre koje nisu GFT.

Primjer 4.3.10 Neka je Δ kompaktan Hausdorffov prostor koji sadrži zatvoren podskup $F \subseteq \Delta$ beskonačnog kardinaliteta takav da je $U := \Delta \setminus F$ gust u Δ. Označimo sa $\tilde{U}$ kvocijentni prostor od Δ dobiven identifikacijom svih točaka iz F. Neka je

$B := C(\Delta, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$ i A C^*-podalgebra od B definirana s

$$A := \left\{ a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in B : \; a_{1,1}|_F = \lambda(a), \; a_{1,2}|_F = a_{2,1}|_F = 0, \; \lambda(a) \in \mathbb{C} \right\}.$$

Tada nije teško vidjeti da je A PFT algebra koja nije GFT.

U teoremu 4.1.5 smo dali potpunu karakterizaciju C*-algebri koje su konačno generirane kao moduli nad centrom multiplikatorske algebre; to su točno konačne direktne sume unitalnih homogenih C*-algebri. Uvjet da je unitalna C*-algebra A GFT algebra je na neki način blizak konačnoj centralnoj generiranosti. Naime, imamo:

Propozicija 4.3.11 Neka je A unitalna C*-algebra. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) A je GFT algebra;

(ii) Postoji konačno generirani $Z(A)$-podmodul od A koji je gust u A.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka su $e_1, \ldots, e_m \in A$ kao u definiciji 4.3.4. Tvrdimo da je $M := \mathrm{span}_{Z(A)}\{e_1, \ldots, e_m\}$ gust u A. Neka je $\varepsilon > 0$ i $G \in \mathrm{Glimm}(A)$. Prema pretpostavci postoje $\lambda_1(G), \ldots, \lambda_m(G) \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$a + G = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(G)(e_i + G).$$

Kako je funkcija $G \mapsto \|a + G\|$ odozgo poluneprekidna, postoji otvorena okolina U oko G u $\mathrm{Glimm}(A)$ takva da vrijedi

$$\left\| \left(a - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(G) e_i \right) + H \right\| < \varepsilon, \quad \text{za sve } H \in U.$$

Budući da je $\mathrm{Glimm}(A)$ kompaktan (A je unitalna) Hausdorffov prostor, postoji otvoreni pokrivač $\{U_j\}_{1 \le j \le k}$ od $\mathrm{Glimm}(A)$ i skalari λ_i^j $(1 \le i \le m, \; 1 \le j \le k)$ takvi da vrijedi

$$\left\| \left(a - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^j e_i \right) + G \right\| < \varepsilon, \quad \text{za sve } G \in U_j.$$

Neka je sada $\{z_j\}_{1 \le j \le k}$ particija jedinice od $\mathrm{Glimm}(A)$ podređena pokrivaču $\{U_j\}_{1 \le j \le k}$. Stavimo

$$a_\varepsilon := \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^j z_j e_i \in M.$$

Tada je za svako $G \in \mathrm{Glimm}(A)$

$$\|(a - a_\varepsilon) + G\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} (z_j + G) \left(a - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^j e_i \right) + G \right\| < \varepsilon.$$

Kako je $\bigcap\{G:\ G \in \mathrm{Glimm}(A)\} = \{0\}$, slijedi

$$\|a - a_\varepsilon\| = \sup\{\|(a - a_\varepsilon) + G\|:\ G \in \mathrm{Glimm}(A)\} \leq \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Pretpostavimo da je $A = \overline{\overline{\mathrm{span}}}_{Z(A)}\{e_1, \ldots, e_m\}$. Za $a \in A$ i $\varepsilon > 0$ postoje $z_i \in Z(A)$ $(1 \leq i \leq m)$ takvi da je $\|a - \sum_{i=1}^m z_i e_i\| < \varepsilon$. Neka je $\Psi_A : Z(A) \to C(\mathrm{Glimm}(A))$ Dauns-Hofmannov izomorfizam. Tada za svako $G \in \mathrm{Glimm}(A)$ imamo

$$\left\|(a+G) - \sum_{i=1}^m \Psi_A(z_i)(G)(e_i + G)\right\| = \left\|\left(a - \sum_{i=1}^m z_i e_i\right) + G\right\| < \varepsilon.$$

Dakle, $a + G$ se može proizvoljno dobro aproksimirati elementima vektorskog prostora $\mathrm{span}\{e_1 + G, \ldots, e_m + G\}$. Kako je svaki konačno dimenzionalan vektorski potprostor Banachovog prostora Banachov, te kako je $a \in A$ bio prozivoljan, slijedi $A/G = \mathrm{span}\{e_1 + G, \ldots, e_m + G\}$. □

4.4 C*-algebre konačnog centralnog tenzorskog ranga

Neka je A unitalna C*-algebra i $A \otimes_{Z,h} A$ centralni Haagerupov tenzorski produkt od A. Kako bi osigurali da vrijedi $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ te da je $\mathrm{E}(A)$ konačne duljine, dovoljno je zahtjevati da je za neko $m \in \mathbb{N}$ kanonsko preslikavanje

$$A \overset{m}{\otimes} A \to A \otimes_{Z,h} A \tag{4.19}$$

surjektivno, gdje smo s $A \overset{m}{\otimes} A$ označili sve tenzore iz (algebarskog) tenzorskog produkta $A \otimes A$ ranga ne većeg od m (notacija 4.3.2).

Definicija 4.4.1 Neka je A unitalna C*-algebra. Kažemo da je A *konačnog centralnog tenzorskog ranga* (*FCTR algebra*[1]) ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je kanonsko preslikavanje (4.19) surjektivno. U tom slučaju, za najmanji takav m kažemo da je *centralni tenzorski rang* od A i pišemo $\mathrm{rang}_{Z,h}(A) := m$. Ukoliko A nije konačnog centralnog tenzorskog ranga, stavljamo $\mathrm{rang}_{Z,h}(A) := \infty$.

Propozicija 4.4.2 Neka je A unitalna separabilna C*-algebra. Ako je A FCTR algebra tada je ona i GFT algebra. Specijalno, A sadrži gust konačno generirani centralni podmodul.

Dokaz. Uvjet da je $m := \mathrm{rang}_{Z,h}(A) < \infty$ je ekvivalentan uvjetu da je

$$A \overset{m}{\otimes} A + J_A = A \otimes_{Z,h} A = (A \otimes_h A)/J_A,$$

[1] finite central tensor rank

gdje je J_A kao u definiciji 2.5.1. Iz teorema 2.5.3 slijedi da je

$$J_A = \bigcap \{G \otimes_h A + A \otimes_h G : \ G \in \mathrm{Glimm}(A)\} = \Lambda(\mathrm{Glimm}(A)).$$

Iz leme 4.3.3 slijedi da je A GFT algebra. Druga tvrdnja slijedi iz propozicije 4.3.11. $\square$

Problem 4.4.3 Vrijedi li i obrat prethodne propozicije, tj. da li je svaka unitalna separabilna GFT algebra ujedno i FCTR algebra? Odgovor na to pitanje nam je trenutačno nepoznat, iako znamo da je odgovor pozitivan u slučaju da je $\mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov (teorem 4.4.11).

Uvjet da je unitalna C*-algebra A FCTR algebra nije nužan da bi vrijedilo $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$, te da je $\mathrm{E}(A)$ konačne duljine.

Primjer 4.4.4 Neka je A C*-algebra iz primjera 4.3.10. Tada je $\mathrm{E}(A)$ (cb-)zatvoren (pa je specijalno $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$) i $\mathrm{E}(A)$ je konačne duljine, ali A nije FCTR algebra.

Lema 4.4.5 Neka je A C*-algebra. Pretpostavimo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav za svaku stupčanu matricu $\mathbf{y} := [y_i]^\tau \in \mathrm{C}_\infty(A)$ postoji stupčana matrica $\mathbf{x} := [x_i]^\tau \in \mathrm{C}_m(A)$ i matrica centralnih elemenata $\mathbf{Z} := [z_{i,j}] \in \mathrm{M}_{\infty,m}(Z(A))$ takva da vrijedi $\mathbf{Zx} = \mathbf{y}$. Ako je A unitalna tada je A FCTR algebra.

Dokaz. Neka je $t \in A \otimes_h A$. Prema teoremu 2.2.15, postoje $\mathbf{a} := [a_i] \in \mathrm{R}_\infty(A)$ i $\mathbf{b} := [b_i]^\tau \in \mathrm{C}_\infty(A)$ takve da je $t = \mathbf{a} \odot \mathbf{b}$. Prema pretpostavci, postoje matrice $\mathbf{x} := [x_i]^\tau \in \mathrm{C}_m(A)$ i $\mathbf{Z} := [z_{i,j}] \in \mathrm{M}_{\infty,m}(Z(A))$ takve da vrijedi $\mathbf{Zx} = \mathbf{b}$. Za $1 \le j \le m$ neka je $\mathbf{z}_j$ j-ti stupac od $\mathbf{Z}$. Tada je $\mathbf{z}_j \in \mathrm{C}_\infty(Z(A))$, pa red $\sum_{i=1}^\infty a_i z_{i,j} = \mathbf{a}\mathbf{z}_j$ konvergira u normi od A i označimo mu sumu s d_j $(1 \le j \le m)$. Ako sa t_Z označimo sliku od t u $A \otimes_{Z,h} A$, tada u $A \otimes_{Z,h} A$ imamo

$$\begin{aligned} t_Z &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^k a_i \otimes_Z b_i = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i \otimes_Z \left(\sum_{j=1}^m z_{i,j} x_j \right) \right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k z_{i,j} a_i \otimes_Z x_j \right) = \sum_{j=1}^m \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^k z_{i,j} a_i \right) \otimes_Z x_j \\ &= \sum_{j=1}^m d_j \otimes_Z x_j. \end{aligned}$$

Dakle $\mathrm{rang}_{Z,h}(A) \le m$. $\square$

Uvedimo sljedeću privremenu definiciju:

Definicija 4.4.6 Za C* algebru A kažemo da ima svojstvo (Q) ako ona zadovoljava uvjet leme 4.4.5.

Napomena 4.4.7 Očito je svaka C*-algebra za koju vrijedi (Q) kvazicentralna. Nadalje, ako je A kvazicentralna C*-algebra, tada nije teško provjeriti da je za svako $m \in \mathbb{N}$ $\mathrm{M}_{\infty,m}(A)$ nedegenerirani Banachov Z(A)-bimodul, uz očito djelovanje $z\cdot[a_{i,j}] := [za_{i,j}]$ ($z \in Z(A)$, $[a_{i,j}] \in \mathrm{M}_{\infty,m}(A)$). Specijalno, prema Hewitt-Cohenovom teoremu faktorizacije, svaka matrica $\mathbf{a} \in \mathrm{M}_{\infty,m}(A)$ se može prikazati u obliku $\mathbf{a} = z\cdot\mathbf{b}$ za neko $z \in Z(A)$ i $\mathbf{b} \in \mathrm{M}_{\infty,m}(A)$.

Lema 4.4.8 Neka je A C*-algebra sa svojstvom (Q). Tada i svaki kvazicentralni ideal J od A ima svojstvo (Q).

Dokaz. Neka je $\mathbf{a} \in \mathrm{C}_\infty(J)$. Prema napomeni 4.4.7 postoje $z \in Z(J)$ i $\mathbf{b} \in \mathrm{C}_\infty(J)$ takvi da je $\mathbf{a} = z \cdot \mathbf{b}$. Kako A ima svojstvo (Q), postoji $m \in \mathbb{N}$ (koji ovisi samo o A), matrice $\mathbf{Z} \in \mathrm{M}_{\infty,m}(Z(A))$ i $\mathbf{x} \in \mathrm{C}_m(A)$ takve da je $\mathbf{Zx} = \mathbf{b}$. Izaberimo bilo koju faktorizaciju $z = z_1z_2$, gdje su $z_1, z_2 \in Z(J)$. Kako je $Z(J)$ ideal u $Z(A)$, imamo

$$\mathbf{a} = z \cdot \mathbf{b} = z \cdot (\mathbf{Zx}) = (z_1 \cdot \mathbf{Z})(z_2 \cdot \mathbf{x}),$$

pri čemu je $z_1\cdot\mathbf{Z} \in \mathrm{M}_{\infty,m}(Z(J))$ i $z_2\cdot\mathbf{x} \in \mathrm{C}_m(J)$. Dakle, J također ima svojstvo (Q). □

Propozicija 4.4.9 Neka je A n-homogena C*-algebra konačnog tipa. Tada A zadovoljava svojstvo (Q).

Dokaz. Prema propoziciji 3.2.3 $M(A)$ je homogena C*-algebra (konačnog tipa). Prema korolaru 1.10.7 A je centralna (dakle i kvazicentralna). Iz leme 4.4.8 slijedi da je dokaz dovoljno provesti uz pretpostavku da je A unitalna. Neka je E lokalno trivijalni C*-svežanj nad $\Delta := \mathrm{Prim}(A)$ čija su sva vlakna izomorfna s $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ takav da je $A = \Gamma(E)$ i izaberimo konačan pokrivač $\{U_j\}_{1\le j\le m}$ od Δ takav da je svaki restrikcijski svežanj $E|_{\overline{U_j}}$ trivijalan. Nadalje, koristeći konačnu particiju jedinice podređenu pokrivaču $\{U_j\}_{1\le j\le m}$, tvrdnju je dovoljno dokazati za situaciju kada je E sam trivijalan. Tada je $A = C(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ i neka su $(e_{i,j})$ standardne matrične jedinice $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ smatrane konstantnim funkcijama u $C(\Delta, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$. Neka je $[a_k]^\tau \in \mathrm{C}_\infty(A)$. Tada je $a_k = \sum_{i,j=1}^n f_{k,i,j}e_{i,j}$ za neke funkcije $f_{i,j,k} \in C(\Delta) \cong Z(A)$. Kako bi dokazali da za A vrijedi (Q), dovoljno je provjeriti da redovi funkcija $\sum_{k=1}^\infty |f_{k,i,j}|^2$ konvergiraju uniformno na Δ za sve $1 \le i, j \le n$. Zaista, kako je

$$a_k^*a_k = \sum_{i,j=1}^n \sum_{p=1}^n \overline{f_{k,p,j}} f_{k,p,i} e_{i,j},$$

te kako red $\sum_{k=1}^\infty a_k^*a_k$ konvergira u normi od A ako i samo mu sve matrične vrijednosti konvergiraju uniformno na Δ, slijedi da redovi $\sum_{k=1}^\infty \sum_{p=1}^n |f_{k,p,j}|^2$ konvergiraju uniformno na Δ, za sve $1 \le j \le n$. Kako je $|f_{k,i,j}|^2 \le \sum_{p=1}^n |f_{k,p,j}|^2$, slijedi i da redovi $\sum_{k=1}^\infty |f_{k,i,j}|^2$ konvergiraju uniformno na Δ. □

Lema 4.4.10 Neka su A i B C*-algebre i $\phi : A \to B$ $*$-epimorfizam. Tada je za svako $m \in \mathbb{N}$ inducirano preslikavanje

$$\phi_{\infty,m} : \mathrm{M}_{\infty,m}(A) \to \mathrm{M}_{\infty,m}(B), \quad \phi_{\infty,m}([a_{i,j}]) = [\phi(a_{i,j})]$$

surjektivno.

Dokaz. Tvrdnju je dovoljno dokazati za $m = 1$. Tada $\mathrm{C}_\infty(A)$ i $\mathrm{C}_\infty(B)$ možemo poistovijetiti sa standardnim Hilbertovim C*-modulima $\mathcal{H}_A$ i $\mathcal{H}_B$ (vidjeti [72]). Tada je očito $\phi_\infty := \phi_{\infty,1}$ ϕ-morfizam između $\mathcal{H}_A$ i $\mathcal{H}_B$ (notacija je preuzeta iz [15], pa iz [15] slijedi da je slika od ϕ_∞ zatvorena. Kako je ona očito gusta u $\mathcal{H}_B$, slijedi da je ϕ_∞ surjektivno. $\square$

Teorem 4.4.11 Neka je A unitalna SFT algebra sa Hausdorffovim primitivnim spektrom. Tada je A FCTR algebra. Specijalno, $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$, te $\mathrm{E}(A)$ je (cb-)zatvoren i konačne duljine.

Dokaz. Pretpostavimo da je A n-subhomogena i neka je J n-homogeni ideal od A. Koristeći indukciju po duljini kompozicijskog niza za A, tvrdnju je dovoljno dokazati uz pretpostavku da je i A/J homogena. Neka je $q_J : A \to A/J$ kvocijentni operator. Uzmimo $\mathbf{a} \in \mathrm{C}_\infty(A)$. Tada je očito $\dot{\mathbf{a}} = (q_J)_{\infty,1}(\mathbf{a}) \in \mathrm{C}_\infty(A/J)$, a kako je A/J (unitalna) homogena, prema propoziciji 4.4.9 ona zadovoljava svojstvo (Q). Dakle, postoji $m \in \mathbb{N}$ koji ovisi samo o A/J i matrice $\dot{\mathbf{Z}}_1 \in \mathrm{M}_{\infty,m}(Z(A/J))$, $\dot{\mathbf{x}}_1 \in \mathrm{C}_m(A/J)$ takve da je $\dot{\mathbf{Z}}_1\dot{\mathbf{x}}_1 = \dot{\mathbf{a}}$. Kako je A centralna, $\mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov (napomena 1.7.10), pa prema korolaru 1.8.2 q_J slika surjektivno $Z(A)$ na $Z(A/J)$. Prema lemi 4.4.10 matrice $\dot{\mathbf{Z}}_1$ i $\dot{\mathbf{x}}_1$ redom možemo podići do matrica $\mathbf{Z}_1 \in \mathrm{M}_{\infty,m}(Z(A))$ i $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{C}_m(A)$ za koje vrijedi

$$\mathbf{b} := \mathbf{a} - \mathbf{Z}_1\mathbf{x}_1 \in \mathrm{C}_\infty(J). \tag{4.20}$$

Slično, kako je J homogena C*-algebra konačnog tipa, prema propoziciji 4.4.9, postoji $k \in \mathbb{N}$ koji ovisi samo o J te matrice $\mathbf{Z}_2 \in \mathrm{M}_{\infty,k}(Z(J))$, $\mathbf{x}_2 \in \mathrm{C}_k(J)$ takve da je $\mathbf{Z}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$. Kako je $Z(J) \subseteq Z(A)$, imamo

$$\mathbf{Z} := \mathbf{Z}_1 \oplus \mathbf{Z}_2 \in \mathrm{M}_{\infty,m+k}(Z(A)) \text{ i } \mathbf{x} := \mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2 \in \mathrm{C}_{m+k}(A),$$

a iz (4.20) slijedi da je $\mathbf{a} = \mathbf{Z}\mathbf{x}$. Iz leme 4.4.5 slijedi da je A FCTR algebra i da je $\mathrm{rang}_{Z,h}(A) \le m + k$. Specijalno, $\mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{E}(A)$ i $\mathrm{E}(A)$ je konačne duljine. Nadalje, kako je $\mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov, prema teoremu 2.5.13 operator $\Theta_A^Z : A \otimes_{Z,h} A \to \mathrm{ICB}(A)$ je izometrija, pa je $\mathrm{E}(A) = \mathrm{Im}\,\Theta_A = \mathrm{Im}\,\Theta_A^Z$ (cb-)zatvoren potpostor od $\mathrm{ICB}(A)$. $\square$

Poglavlje 5

Derivacije koje su unutarnje kao potpuno ograničeni operatori

Jednu od najbitnijih klasa operatora na C*-algebrama čine automorfizimi i derivacije. U fizikalnim terminima, hermitski dio C*-algebre predstavlja skup observabli kvantnog sistema, automorfizmi odgovaraju simetrijama, dok jednoparametarske grupe automorfizama opisuju reverzibilnu vremensku evoluciju sistema (u Heisenbergovoj slici). Njihovi infinitezimalni generatori su derivacije, koje također igraju bitnu ulogu u strukturnoj teoriji C*-algebri.

Formalno, definicija je sljedeća:

Definicija 5.0.12 Neka je A C*-algebra. *Derivacija* na A je linearni operator $\delta : A \to A$ koji zadovoljava *Leibnizovo pravilo*

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) \quad (x, y \in A). \tag{5.1}$$

Skup svih derivacija na A označavamo s $\mathrm{Der}(A)$. Svaki element $a \in M(A)$ inducira derivaciju δ_a na A danu s

$$\delta_a(x) := ax - xa \quad (x \in A). \tag{5.2}$$

Za derivaciju $\delta \in \mathrm{Der}(A)$ kažemo da je *unutarnja* u $M(A)$ ako postoji $a \in M(A)$ takav da je $\delta = \delta_a$. Ukoliko je $\delta = \delta_a$ za neko $a \in A$ tada samo kažemo da je δ unutarnja. Sa $\mathrm{Inn}(A)$ i $\mathrm{Inn}_{M(A)}(A)$ redom označavamo skup svih unutarnjih derivacija na A, odnosno skup svih derivacija na A koje su unutarnje u $M(A)$.

Klasičan problem u teoriji derivacija je karakterizirati sve C*-algebre A koje dopuštaju samo unutranje derivacije (u $M(A)$, ukoliko A nije unitalna). Poznato je da u tu klasu spadaju sve proste C*-algebre (teorem 5.1.4), sve von Neumannove algebre (teorem 5.1.5), te općenitije, sve AW*-algebre (teorem 5.1.6), pri čemu za C*-algebru A kažemo da je AW*-algebra ako je lijevi anihilator svakog desnog ideala u A obilka Ap za neki projektor $p \in A$.

Nadalje, ukoliko se ograničimo na klasu separabilnih C*-algebri, tada je karakterizacija takvih C*-algebri u potpunosti poznata: Separabilna C*-algebra A dopušta samo unutarnje derivacije ako i samo ako je A direktna suma C*-algebre s neprekidnim tragom (za definiciju vidjeti [58]) i C*-algebre s diskretnim primitivnim spektrom (teorem 5.1.7). S druge strane, neseparabilni slučaj je dosta kompliciraniji i slična karakterizacija nije poznata. Npr. još uvijek nije poznato da li svaki kvocijent von Neumannove algebre dopušta samo unutarnje derivacije.

Budući da je svaka derivacija na A operator iz $\mathrm{ICB}(A)$ (propozicija 5.1.9) prirodno je pitati se koliko skup $\mathrm{Der}(A) \cap \mathrm{Im}\,\Theta_A$ može biti velik, gdje je $\Theta_A : M(A) \otimes_h M(A) \to \mathrm{ICB}(A)$ kanonska kontrakcija. Budući da odgovor na to pitanje bitno ovisi o strukturi ideala od $M(A)$ (a kao što smo vidjeli, struktura idela od $M(A)$ može biti dosta kompliciranija od one od A), mi ćemo se ograničiti na proučavanje derivacija iz slike $\mathrm{Im}\,\theta_A$ restrikcije $\theta_A : A \otimes_h A \to \mathrm{ICB}(A)$ od Θ_A na $A \otimes_h A$. Kako bi osigurali da $\mathrm{Im}\,\theta_A$ sadrži sve unutarnje derivacije, ograničit ćemo se na klasu kvazicentralnih C*-algebri.

Propozicija 5.0.13 Neka je A kvazicentralna C*-algebra. Tada je $\mathrm{Inn}(A) \subseteq \mathrm{Im}\,\theta_A$

Dokaz. Zaista, za $a \in A$ neka su $z \in Z(A)$ i $b \in A$ takvi da je $a = zb$ (propozicija 1.7.2). Tada je $\delta_a = \theta_A(z \otimes b - a \otimes b)$. □

U [35] smo promatrali sljedeći problem:

Problem 5.0.14 Karakterizirati sve kvazicentralne C*-algebre A sa svojstvom da je

$$\mathrm{Der}(A) \cap \mathrm{Im}\,\theta_A = \mathrm{Inn}(A), \tag{5.3}$$

koji je upravo i glavna tema ovog poglavlja. Osnovni rezultat vezan uz taj problem je teorem 5.2.3, koji kaže da ako su svi Glimmovi ideali kvazicentralne C*-algebre A prim, tada A zadovoljava (5.3). Također nam je poznato da taj uvjet nije nužan da bi vrijedila jednakost (5.3). Nadalje, u točki 5.3 dajemo primjer unitalne i separabilne C*-algebre koja dopušta vanjsku elementarnu derivaciju, pri čemu za derivaciju δ na A kažemo da je elementarna ako je δ implementirana s elementarnim operatorom na A, tj. ako je $\delta \in \mathrm{E}(A)$.

5.1 Pregled nekih rezultata o derivacijama

U ovoj točki ćemo dati pregled nekih rezultata o derivacijama na C*-algebrama koje ćemo koristiti u idućim točkama.

Propozicija 5.1.1 Neka je A C*-algebra. Tada je $\mathrm{Der}(A)$ u normi zatvoren potprostor od $\mathrm{IB}(A)$. Specijalno, svaka derivacija na A je ograničen operator koji čuva ideale od A.

□

Napomena 5.1.2 Kao i za svaki operator iz $\mathrm{IB}(A)$, za derivaciju $\delta \in \mathrm{Der}(A)$ i ideal $J \in \mathrm{Id}(A)$ s δ_J označavamo inducirani derivaciju na A/J, koja je dana s

$$\delta_J(x + J) = \delta(x) + J \quad (x \in A).$$

Propozicija 5.1.3 Neka je A C*-algebra i $\delta \in \mathrm{Der}(A)$. Tada je ultraslabo neprekidno proširenje $\delta^{**} : A^{**} \to A^{**}$ od δ na omotačku von Neumannovu algebru A^{**} od A derivacija na A^{**} koja je invarijantna s obzirom na $M(A)$ (tj. $\delta^{**}(M(A)) \subseteq M(A)$). Nadalje, $\bar{\delta} := \delta^{**}|_{M(A)}$ od δ na $M(A)$ je jedinstveno proširenje od δ do derivacije na $M(A)$. Specijalno, imamo

$$\|\delta^{**}\| = \|\bar{\delta}\| = \|\delta\|.$$

□

Kao što smo već istaknuli, osnovni problem u teoriji derivacija je problem karakterizacije C*-algebri koje dopuštaju samo unutarnje derivacije. Sljedeća četiri rezultata su od fundamentalne važnosti:

Teorem 5.1.4 (Sakai, [60] i [61]) Svaka derivacija proste C*-algebre A je unutarnja u $M(A)$.

□

Teorem 5.1.5 (Kadison, [39] i Sakai, [59]) Svaka derivacija na von Neumannovoj algebri je unutarnja.

□

Teorem 5.1.6 (Olesen, [53]) Svaka derivacija na AW*-algebri je unutarnja.

□

Teorem 5.1.7 (Akemann-Pedersen, [3] i Elliott, [29]) Neka je A separabilna C*-algebra. Sljedeće tvrnjde su međusobno ekvivalentne:

(i) Svaka derivacija na A je unutarnja u $M(A)$;

(ii) $A = B \oplus C$, gdje je B C*-algebra s neprekidnim tragom i C C*-algebra s diskretnim primitivnim spektrom.

Štoviše, ako je A unitalna, tada je (i) ekvivalnetno s:

(iii) A je konačna direktna suma C*-podalgebri koje su homogene ili proste;

(iv) Skup $\mathrm{Der}(A)$ je separabilan u operatorskoj normi.

□

Neka je A C*-algebra. Tada je očito

$$\|\delta_a\| = \|\delta_{a-z}\| \leq 2\|a-z\| \quad (a \in M(A), z \in Z(M(A))),$$

odakle slijedi

$$\|\delta_a\| \leq 2d(a, Z(M(A))) = 2\inf\{\|a-z\| : \ z \in Z(M(A))\}. \tag{5.4}$$

Ukoliko je A primitivna C*-algebra, tada je i $M(A)$ primitivna, pa je $Z(M(A)) = \mathbb{C}1$. U tom slučaju u (5.4) vrijedi jednakost:

Teorem 5.1.8 (Stampfli) Neka je A primitivna C*-algebra. Za svako $a \in A$ vrijedi

$$\|\delta_a\| = 2d(a, \mathbb{C}1) = 2\inf\{\|a - \lambda 1\| : \ \lambda \in \mathbb{C}\}. \tag{5.5}$$

□

Koristeći Stampflijevu formulu (5.5), propozicije 5.1.3 i 5.1.1, te Kadison-Sakaijev teorem (teorem 5.1.5) sada možemo dokazati sljedeću tvrdnju:

Propozicija 5.1.9 Neka je A C*-algebra. Tada je $\mathrm{Der}(A) \subseteq \mathrm{ICB}(A)$ i vrijedi

$$\|\delta\|_{cb} = \|\delta\| \quad \text{za sve } \delta \in \mathrm{Der}(A).$$

Dokaz. Neka je $\delta \in \mathrm{Der}(A)$. Prema propoziciji 5.1.1 $\delta \in \mathrm{IB}(A)$. Kako bi dokazali da je δ potpuno ograničen operator, najprije pretpostavimo da je A primitivna i da je $\delta = \delta_a$ za neko $a \in M(A)$. Tada je i $\mathrm{M}_n(A)$ primitivna za svako $n \in \mathbb{N}$ i $M(\mathrm{M}_n(A)) = \mathrm{M}_n(M(A))$. Ako s $\mathbf{a}^{(n)}$ označimo dijagonalnu matricu u $\mathrm{M}_n(M(A))$ čije su sve vrijednosti na dijagonali jednake a, tada za amplifikaciju $(\delta_a)_n : \mathrm{M}_n(A) \to \mathrm{M}_n(A)$ vrijedi

$$(\delta_a)_n([x_{i,j}]) = \mathbf{a}^{(n)}[x_{i,j}] - [x_{i,j}]\mathbf{a}^{(n)} \quad ([x_{i,j}] \in \mathrm{M}_n(A)).$$

Dakle, $(\delta_a)_n = \delta_{\mathbf{a}^{(n)}}$, pa je prema Stampflijevoj formuli 5.5

$$\|(\delta_a)_n\| = \|\delta_{\mathbf{a}^{(n)}}\| = 2d(\mathbf{a}^{(n)}, \mathbb{C}1_n) = 2d(a, \mathbb{C}1) = \|\delta_a\|.$$

Specijalno, δ_a je potpuno ograničen operator i $\|\delta_a\|_{cb} = \|\delta_a\|$.

Sada pretpostavimo da je A općenita C*-algebra i $\delta = \delta_a$ za neko $a \in M(A)$. Kako je $(\delta_a)_n = \delta_{a^{(n)}} \in \mathrm{IB}(\mathrm{M}_n(A))$, te kako su svi primitivni ideali od $\mathrm{M}_n(A)$ oblika $\mathrm{M}_n(P)$ $(P \in \mathrm{Prim}(A))$, iz (2.11) i prvog dijela dokaza slijedi

$$\begin{aligned} \|(\delta_a)_n\| &= \sup\{\|((\delta_a)_n)_{\mathrm{M}_n(P)}\| : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\} \\ &= \sup\{\|(\delta_a)_P\| : \ P \in \mathrm{Prim}(A)\} \\ &= \|\delta_a\|. \end{aligned}$$

Dakle, $\|\delta_a\|_{cb} = \|\delta\|$.

Napokon, pretpostavimo da je $\delta \in \mathrm{Der}(A)$ općenita derivacija i $\delta^{**} : A^{**} \to A^{**}$ njeno ultraslabo neprekidno proširenje na A^{**}. Prema propoziciji 5.1.3 δ^{**} je derivacija na A^{**} i $\|\delta^{**}\| = \|\delta\|$. Prema Kadison-Sakaijevom teoremu (teorem 5.1.5), δ^{**} je unutarnja derivacija, pa je prema drugom dijelu dokaza $\|(\delta^{**})_n\| = \|\delta^{**}\| = \|\delta\|$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\mathrm{M}_n(A)^{**} \cong \mathrm{M}_n(A^{**})$, $(\delta_n)^{**}$ možemo poistovijetiti s $(\delta^{**})_n$, odakle slijedi da je

$$\|\delta_n\| = \|(\delta_n)^{**}\| = \|(\delta^{**})_n\| = \|\delta\|.$$

Dakle, $\delta \in \mathrm{ICB}(A)$ i $\|\delta\|_{cb} = \|\delta\|$. □

Pretpostavimo da je A unitalna C*-algebra. Iz [50] slijedi da je

$$\|a \otimes 1 - 1 \otimes a\|_h = 2d(a, \mathbb{C}1) \quad (a \in A).$$

Nadalje, koristeći [67] dobivamo da u $A \otimes_{Z,h} A$ vrijedi

$$\|a \otimes 1 - 1 \otimes a\|_{Z,h} = 2d(a, Z(A)). \tag{5.6}$$

Specijalno, ako je svaki Glimmov ideal u A primalan, vrijedi

$$\|\delta_a\| = \|\delta_a\|_{cb} = \|\Theta_A^Z(a \otimes 1 - 1 \otimes a)\|_{cb} = \|a \otimes 1 - 1 \otimes a\|_{Z,h} = 2d(a, Z(A)).$$

Štoviše, Somerset je u [67] dokazao sljedeću tvrdnju:

Teorem 5.1.10 Neka je A unitalna C*-algebra. Tada vrijedi

$$\|\delta_a\| = 2d(a, Z(A)) \quad \text{za sve } a \in A$$

ako i samo ako je svaki Glimmov ideal u A 3-primalan.

□

Definirajmo preslikavanje

$$\Lambda : M(A) \to \mathrm{Inn}_{M(A)}(A), \quad \Lambda : a \mapsto \delta_a.$$

Tada je jezgra od Λ jednaka $Z(M(A))$. Neka je $q_Z : M(A) \to M(A)/Z(M(A))$ kvocijentni operator i $\Lambda_Z : M(A)/Z(M(A)) \to \mathrm{Inn}(A)$ inducirani operator (za kojeg dijagram

$$\begin{tikzcd} & M(A) \arrow[dl, "q_Z"'] \arrow[d, "\Lambda"] \\ M(A)/Z(M(A)) \arrow[r, "\Lambda_Z"] & \mathrm{Inn}_{M(A)}(A) \end{tikzcd}$$

komutira). Tada je Λ_Z ograničena bijekcija, pa je prema teoremu o otvorenom preslikavanju $\mathrm{Inn}_{M(A)}(A)$ (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{Der}(A)$ ako i samo ako je Λ_Z regularan operator. Time smo dokazali sljedeću propoziciju:

Propozicija 5.1.11 Neka je A C*-algebra. Tada je $\mathrm{Inn}_{M(A)}(A)$ (cb-)zatvoren potpostor od $\mathrm{Der}(A)$ ako i samo ako postoji konstanta $K \geq 0$ takva da je

$$d(a, Z(M(A))) \leq K\|\delta_a\| \quad \text{za sve } a \in M(A). \tag{5.7}$$

□

Neka je A unitalna C*-algebra. Posmatrajući problem zatvorenosti skupa unutarnjih derivacija na A, Archbold je u [6] definirao konstante $K(A), K_s(A) \in [0, \infty]$:

$$K(A) := \inf\{C \geq 0 : \ d(a, Z(A)) \leq C\|\delta_a\| \text{ za sve } a \in A\}, \tag{5.8}$$

$$K_s(A) := \inf\{C \geq 0 : \ d(a, Z(A)) \leq C\|\delta_a\| \text{ za sve } a \in A_h\}. \tag{5.9}$$

Napomena 5.1.12 Lako se provjeri da vrijedi $K_s(A) \leq K(A) \leq 2K_s(A)$. Također, $K(A) = K_s(A) = 0$ ako i samo ako je A komutativna. Ako A nije komutativna tada iz 5.4 slijedi da je $K(A), K_s(A) \geq \frac{1}{2}$. Iz teorema 5.1.10 slijedi da je $K(A) = K_s(A) = \frac{1}{2}$ ako i samo ako je svaki Glimmov ideal u A 3-primalan. Nadalje, iz propozicije 5.1.11 slijedi da je $\mathrm{Inn}(A)$ (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{Der}(A)$ ako i samo ako je $K(A), K_s(A) < \infty$.

Nadalje, Somerset je u [66] primijetio da zatvorenost od $\mathrm{Inn}(A)$ ovisi o jednoj strukturi grafa na $\mathrm{Prim}(A)$ koja je definirana na sljedeći način:

Definicija 5.1.13 Za primitivne ideale $P, Q \in \mathrm{Prim}(A)$ kažemo da su susjedni (i pišemo $P \sim Q$) ako se P i Q ne mogu separirati disjunktnim otvorenim okolinama u $\mathrm{Prim}(A)$. Put duljine n od P do Q je niz primitivnih ideala $P = P_0, P_1, \ldots, P_n = Q$ takav da je $P_{i-1} \sim P_i$ za sve $1 \leq i \leq n$. *Udaljenost* $d(P, Q)$ od P do Q definirana je na sljedeći način

- Ako je $P = Q$, stavljamo $d(P, Q) = d(P, P) := 1$.
- Ako $P \neq Q$ i ako postoji put od P Q, tada je $d(P, Q)$ najmanjoj duljini puta od P do Q.
- Ako ne postoji put od P do Q, stavljamo $d(P, Q) := \infty$.

Definiramo konstantu $\mathrm{Orc}(A)$ s

$$\mathrm{Orc}(A) := \sup\{d(P, Q) : \ P, Q \in \mathrm{Prim}(A) \text{ takvi da je } d(P, Q) < \infty\}.$$

Napomena 5.1.14 Primijetimo da je $\mathrm{Orc}(A) = 1$ ako i samo ako je svaki Glimmov ideal u A 2-primalan.

Dok konstanta $K(A)$ može postići razne vrijednosti iz $[0, \infty]$, pokazuje se da je $2K_s(A) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Štoviše, Somerset je u [66] dokazao sljedeći rezultat:

Teorem 5.1.15 (Somerset) Neka je A unitalna nekomutativna C*-algebra. Tada vrijedi

$$K_s(A) = \frac{1}{2}\mathrm{Orc}(A).$$

□

Korolar 5.1.16 Neka je A unitalna C*-algebra. Tada je $\mathrm{Inn}(A)$ (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{Der}(A)$ ako i samo ako je $\mathrm{Orc}(A) < \infty$.

Dokaz. Zaista, prema napomeni 5.1.12 $\mathrm{Inn}(A)$ je (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{Der}(A)$ ako i samo ako je $K_s(A) < \infty$. Ako je A komutativna, $K_s(A) = 0$, a ako A nije komutativna, onda je $K_s(A) = \frac{1}{2}\mathrm{Orc}(A)$ (teorem 5.1.15). □

5.2 Derivacije na C*-algebrama u kojima je svaki Glimmov ideal prim

U ovoj točki promatramo sljedeći problem:

Problem 5.2.1 Karakterizirati sve unitalne (odnosno kvazicentralne) C*-algebre A sa svojstvom da se jedino unutarnje derivacije nalaze u $\mathrm{Im}\,\theta_A$, odnosno za koje vrijedi

$$\mathrm{Der}(A) \cap \mathrm{Im}\,\theta_A = \mathrm{Inn}(A). \tag{5.10}$$

Napomena 5.2.2 Također možemo promatrati i dualan problem, tj. problem karakterizacije C*-algebri A sa svojstvom da se svaka derivacija na A nalazi u $\mathrm{Im}\,\theta_A$. Primijetimo da u unitalnom i separabilnom slučaju opis takvih A direktno slijedi iz teorema 5.1.7. Naime, u tom slučaju je $\mathrm{Der}(A) \subseteq \mathrm{Im}\,\theta_A$ separabilan.

Glavni rezultat ove točke je sljedeći teorem:

Teorem 5.2.3 Neka je A kvazicentralna C*-algebra. Ako je svaki Glimmov ideal od A prim, tada A zadovoljava (5.10).

Prije nego li damo dokaz teorema 5.2.3, istaknimo neke klase C*-algebri kod kojih je svaki Glimmov ideal prim.

Korolar 5.2.4 Neka je A kvazicentralna C*-algebra. Pretpostavimo da je za A ispunjena jedna od sljedećih pretpostavki:

(i) A je prim C*-algebra;

(ii) A ima Hausdorffov primitivni spektar;

(iii) A je kvocijent AW*-algebre.

Tada je svaki Glimmov ideal u A prim. Specijalno, A zadovoljava (5.10).

Dokaz. Ako je A prim tada je $\mathrm{Glimm}(A) = \{0\}$, a ako je $\mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov tada je svaki Glimmov ideal u A primitivan, dakle prim. Ako je pak A kvocijent AW*-algebre, tada je prema [67] svaki Glimmov ideal u A prim. Druga tvrdnja slijedi direktno iz teorema 5.2.3. $\square$

Za dokaz teorema 5.2.3 trebat ćemo par pomoćnih tvrdnji.

Lema 5.2.5 Neka je A prim C*-algebra.

(i) Ako je A unitalna, tada vrijedi (5.10).

(ii) Ako A nije unitalna, tada je $\mathrm{Der}(A) \cap \mathrm{Im}\, \theta_A = \{0\}$.

Dokaz. Neka je $t \in A \otimes_h A$ takav da je $\theta_A(t) = \Theta_A(t) = \delta$ (kao i uvjek, pretpostavljamo da je $A \otimes_h A \subseteq M(A) \otimes_h M(A)$, koristeći injektivnost Haagerupovog tenzorskog produkta). Prema teoremu 2.2.15 postoji reprezentacija

$$t = \mathbf{a} \odot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i,$$

gdje su $\mathbf{a} = [a_i] \in \mathrm{R}_\infty(A)$ i $\mathbf{b} = [b_i]^\tau \in \mathrm{C}_\infty(A)$, pri čemu su komponente od $\mathbf{b}$ jako nezavisne. Kako je δ derivacija na A, Leibnizovo pravilo (5.1) povlači

$$\delta(x)y = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i x - x a_i) y b_i \quad \text{za sve } x, y \in A,$$

što je ekvivalentno s

$$\Theta_A(\delta(x) \otimes 1) = \Theta_A\Big(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i x - x a_i) \otimes b_i\Big) \quad \text{za sve } x \in A. \tag{5.11}$$

Budući je A prim C*-algebra, prema teoremu 2.4.8 Θ_A je injekcija, pa je jednakost (5.11) ekvivalentna jednakosti

$$\delta(x) \otimes 1 = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i x - x a_i) \otimes b_i \quad \text{za sve } x \in A \tag{5.12}$$

tenzora u $M(A) \otimes_h M(A)$. Pretpostavimo da je $\delta \neq 0$. Tada (5.12) povlači da je A unitalna; dakle $A = M(A)$. Zaista, izaberimo $x_0 \in A$ takav da je $\delta(x_0) \neq 0$ i neka je $\varphi \in M(A)^*$ proizvljan ograničen linearni funkcional na $M(A)$ takav da je $\varphi(\delta(x_0)) \neq 0$. Prema propoziciji 2.1.5 i teoremu 2.2.13 inducirani operator $\varphi \otimes \mathrm{id} : M(A) \otimes_h M(A) \to M(A)$ je (potpuno) ograničen, pa ako s njim djelujemo na jednakost (5.12) (za $x = x_0$) dobivamo

$$1 = \frac{1}{\varphi(\delta(x_0))} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(a_i x_0 - x_0 a_i) b_i. \tag{5.13}$$

Dakle, $1 \in A$. Stavimo

$$\alpha_i := \frac{\varphi(a_i x_0 - x_0 a_i)}{\varphi(\delta(x_0))} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Kako je φ potpuno ograničen i kako red $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i x_0 - x_0 a_i)(a_i x_0 - x_0 a_i)^*$ konvergira u normi, imamo $(\alpha_i) \in \ell^2$. Iz (5.13) slijedi $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b_i = 1$. Tada (5.12) povlači

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i \delta(x) - a_i x + x a_i) \otimes b_i = 0 \quad \text{za sve } x \in A.$$

Kako su vrijednosti b_i od $\mathbf{b}$ jako nezavisne, iz teorema 2.2.15 slijedi

$$\alpha_i \delta(x) = a_i x - x a_i \quad \text{za sve } x \in A \text{ i } i \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

Kako je $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b_i = 1$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_k \neq 0$. Ako stavimo $a := \frac{a_k}{\alpha_k}$, tada iz jednakosti (5.14) slijedi $\delta = \delta_a \in \mathrm{Inn}(A)$. □

Lema 5.2.6 Neka je A C*-algebra. Za svako $t \in A \otimes_h A$ funkcija

$$\mathrm{Glimm}(A) \times \mathrm{Glimm}(A) \to \mathbb{R}_+, \quad (G, H) \mapsto \|t + (G \otimes_h A + A \otimes_h H)\|$$

je odozgo poluneprekidna u produktnoj τ_{cr} topologiji na $\mathrm{Glimm}(A) \times \mathrm{Glimm}(A)$ (pa onda također i u produktnoj τ_q topologiji na $\mathrm{Glimm}(A) \times \mathrm{Glimm}(A)$).

Dokaz. Prema propoziciji 1.6.6, za svako $x \in A$ funkcija norme $G \mapsto \|x + G\|$ je τ_{cr}-odozgo poluneprekidna na $\mathrm{Glimm}(A)$. Analizirajući dokaz tvrdnje 1 u dokazu leme 2.5.4, vidimo da on prolazi i ako τ_s-topologiju na $\mathrm{Id}(A)$ zamijenimo s najslabijom topologijom na $\mathrm{Id}(A)$ s obzirom na koju su sve funkcije norme $J \mapsto \|x + J\|$ $(x \in A)$ odozgo poluneprekidne. Specijalo, funkcija $(G, H) \mapsto \|t + (G \otimes_h A + A \otimes_h G)\|$ je odozgo poluneprekidna u produktnoj τ_{cr} topologiji na $\mathrm{Glimm}(A) \times \mathrm{Glimm}(A)$. Budući da je τ_q jača od τ_{cr}, ista tvrdnja slijedi i za τ_q topologiju. □

Napomena 5.2.7 Neka je A C*-algebra i neka je $\delta \in \mathrm{Der}(A) \cap \mathrm{Im}\, \theta_A$, s $\delta = \theta_A(t)$ za neki tenzor $t \in A \otimes_h A$. Prema napomeni 2.4.7 za ultraslabo neprekidno proširenje δ^{**} od δ na A^{**} također vrijedi $\delta^{**} = \theta_{A^{**}}(t)$. Specijalno je $\tilde{\delta} = \delta^{**}|_{\tilde{A}} = \theta_{\tilde{A}}(t)$, gdje $\tilde{\delta}$ označava jedinstveno proširenje od δ na minimalnu unitizaciju $\tilde{A}$ od A.

Dokaz teorema 5.2.3: Neka je $\delta \in \mathrm{Der}(A) \cap \mathrm{Im}\, \theta_A$ i neka je $t \in A \otimes_h A$ tenzor takav da je $\delta = \theta_A(t)$.

Najprije pretpostavimo da je A unitalna. U tom slučaju je $\mathrm{Glimm}(A)$ kompaktan Hausdorffov prostor (i trivijalno vrijedi $\tau_q = \tau_{cr}$). Budući da sljedeći dijagram

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_h A & \xrightarrow{\theta_A} & \mathrm{ICB}(A) \\ {\scriptstyle q_J \otimes q_J}\Big\downarrow & & {\scriptstyle Q_J}\Big\downarrow \\ A/J \otimes_h A/J & \xrightarrow{\theta_{A/J}} & \mathrm{ICB}(A/J) \end{array}$$

komutira, za svako $G \in \mathrm{Glimm}(A)$ imamo

$$\delta_G = Q_G(\delta) = Q_G(\theta_A(t)) = \theta_{A/G}((q_G \otimes q_G)(t)).$$

Kako je svaki Glimmov kvocijent A/G ($G \in \mathrm{Glimm}(A)$) prim C*-algebra, $\theta_{A/G}$ je izometrija (teorem 2.4.8), pa je

$$\|\delta_G\| = \|\delta_G\|_{cb} = \|\theta_{A/G}((q_G \otimes q_G)(t))\|_{cb} = \|(q_G \otimes q_G)(t)\|_h.$$

Budući da vrijedi $A/G \otimes_h A/G \cong (A \otimes_h A)/(G \otimes_h A + A \otimes_h G)$ (potpuno) izometrički (korolar 2.2.18), imamo

$$\|(q_G \otimes q_G)(t)\|_h = \|t + (G \otimes_h A + A \otimes_h G)\|.$$

Prema lemi 5.2.6, funkcija

$$G \mapsto \|\delta_G\| = \|t + (G \otimes_h A + A \otimes_h G)\|$$

je odozgo poluneprekidna na $\mathrm{Glimm}(A)$. Fiksirajmo $G \in \mathrm{Glimm}(A)$. Kako je A/G prim C*-algebra, prema lemi 5.2.5 postoji $a \in A$ takav da je $\delta_G = (\delta_a)_G \in \mathrm{Inn}(A/G)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je, prema dokazanom, funkcija $G \mapsto \|\delta_G\|$ odozgo poluneprekidna na $\mathrm{Glimm}(A)$, postoji otvorena okolina U oko G u $\mathrm{Glimm}(A)$ takva da vrijedi

$$\|\delta_H - (\delta_a)_H\| = \|(\delta - \delta_a)_H\| < \varepsilon \quad \text{za sve } H \in U.$$

Budući da je $\mathrm{Glimm}(A)$ kompaktan, postoji konačan otvoreni pokrivač $\{U_j\}_{1 \le j \le m}$ od $\mathrm{Glimm}(A)$ i elementi $a_1, \ldots, a_m \in A$ takvi da vrijedi

$$\|\delta_G - (\delta_{a_j})_G\| < \varepsilon \quad \text{za sve } G \in U_j.$$

Neka je $\{f_j\}_{1 \le j \le m}$ particija jedinice na $\mathrm{Glimm}(A)$ podređena pokrivaču $\{U_j\}_{1 \le j \le m}$ i stavimo $z_j := \Psi_A^{-1}(f_j)$, gdje je $\Psi_A : Z(A) \to C(\mathrm{Prim}(A)) = C(\mathrm{Glimm}(A))$ Dauns-Hofmannov izomorfizam. Tada za $a := \sum_{j=1}^m z_j a_j \in A$, $G \in \mathrm{Glimm}(A)$ i $x \in \mathrm{Ball}(A)$

imamo

$$\begin{aligned}
\|(\delta-\delta_a)_G(x+G)\| &= \|\delta_G(x+G)-(\delta_a)_G(x+G)\| = \|(\delta(x)-\delta_a(x))+G\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^m [z_j(\delta(x)-\delta_{a_j}(x))+G]\right\| = \left\|\sum_{j=1}^m f_j(G)(\delta_G-(\delta_{a_j})_G)(x+G)\right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^m f_j(G)\|\delta_G-(\delta_{a_j})_G\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $\|(\delta-\delta_a)_G\| < \varepsilon$ za svako $G \in \mathrm{Glimm}(A)$, pa je

$$\|\delta-\delta_a\| = \sup\{\|(\delta-\delta_a)_G\| : G \in \mathrm{Glimm}(A)\} \leq \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, imamo $\delta \in \overline{\overline{\mathrm{Inn}(A)}}$. Budući da su svi Glimmovi ideali od A prim, oni su svakako 2-primalni, pa je $\mathrm{Orc}(A) = 1$. Iz teorema 5.1.15 slijedi $\overline{\overline{\mathrm{Inn}(A)}} = \mathrm{Inn}(A)$. Dakle, δ je unutarnja derivacija na A.

Pretpostavimo sada da je A neunitalna kvazicentralna C*-algebra u kojoj je svaki Glimmov ideal prim. Tada je također i svaki Glimmov ideal minimalne unitizacije $\tilde{A}$ prim. Zaista, kako je A kvazicentralna, prema napomeni 1.7.8 imamo $\mathrm{Glimm}(\tilde{A}) = \mathrm{Glimm}(A) \cup \{A\}$ (štoviše, $\mathrm{Glimm}(\tilde{A})$ je Aleksandrovljeva kompaktifikacija od $\mathrm{Glimm}(A)$). Neka je $\tilde{\delta}$ (jedinstveno) proširenje od δ do derivacije na $\tilde{A}$. Prema napomeni 5.2.7 imamo $\tilde{\delta} = \theta_{\tilde{A}}(t)$, pa prema prvom dijelu dokaza postoji $\tilde{a} \in \tilde{A}$ takav da je $\tilde{\delta} = \delta_{\tilde{a}} \in \mathrm{Inn}(\tilde{A})$. Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $a := \tilde{a} - \lambda 1 \in A$. Tada je $\tilde{\delta} = \delta_{\tilde{a}} = \delta_a$, pa je $\delta = \tilde{\delta}|_A \in \mathrm{Inn}(A)$. □

Općenito, za derivaciju $\delta \in \mathrm{Der}(A) \cap \mathrm{Im}\,\theta_A$ funkcija norme $G \mapsto \|\delta_G\|$ neće biti odozgo poluneprekidna na $\mathrm{Glimm}(A)$ čak i u slučaju da je A kvazistandardna[1]

Primjer 5.2.8 Neka je A C*-algebra iz primjera 1.8.8 koja se sastoji od svih neprekidnih funkcija $a : [0,1] \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ za koje je $a(1)$ dijagonalna matrica. Ako stavimo $P_s := \ker \pi_s$ $(t \in [0,1))$ i $G_1 := \ker \lambda \cap \ker \mu$ (gdje su π_s, λ i μ kao u primjeru 1.8.8), imamo

$$\mathrm{Glimm}(A) = \mathrm{MinPrimal}(A) = \{P_s : \ s \in [0,1)\} \cup \{G_1\},$$

te vrijedi jednakost topoloških prostora

$$(\mathrm{Glimm}(A), \tau_q) = (\mathrm{Glimm}(A), \tau_{cr}) = (\mathrm{MinPrimal}(A), \tau_s)$$

(topologije τ_{cr} i τ_q se podudaraju na $\mathrm{Glimm}(A)$ jer je A unitalna) i taj prostor je homeomorfan s $[0,1]$ (preko homeomorfizma danog s $P_s \mapsto s$ $(s \in [0,1))$ i $G_1 \mapsto 1$).

[1]Za C*-algebru A kažemo da je kvazistadnardna ako je svaki Glimmov ideal u A primalan i ako je potpuna regularizacija $\phi_A : \mathrm{Prim}(A) \to \mathrm{Glimm}(A)$ otvoreno preslikavanje; vidjeti [9].

Neka je a element od A takav da je

$$a(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{za sve } s \in [0,1]$$

i stavimo $\delta := \delta_a \in \mathrm{Inn}(A)$. Kako je svaki ideal P_s ($s \in [0,1)$) primitivan, koristeći Stampflijevu formulu (5.5) dobivamo

$$\|\delta_{P_s}\| = 2d(a(s), \mathbb{C}1_2) = 1.$$

S druge strane, kako je A/G_1 komutativna, imamo $\delta_{G_1} = 0$ na A/G_1. Dakle, funkcija $G \mapsto \|\delta_G\|$ nije odozgo poluneprekidna na $\mathrm{Glimm}(A)$.

Napomena 5.2.9 Nije teško vidjeti da C*-algebra A iz prethodnog primjera zadovoljava (5.10), dok A sadrži Glimmov ideal $G_1 = \ker\lambda \cap \ker\mu$ koji nije prim. Dakle, uvjet iz teorema 5.2.3 nije nužan za jednakost (5.10).

5.3 Primjer C*-algebre koja dopušta vanjsku elementarnu derivaciju

U ovoj točki ćemo dati primjer unitalne separabilne 2-SFT algebre A za koju je $\mathrm{E}(A)$ (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{ICB}(A)$, te za koju vrijedi $\mathrm{Orc}(A) = \infty$. Prema korolaru 5.1.16 skup $\overline{\overline{\mathrm{Inn}(A)}} \setminus \mathrm{Inn}(A)$ je neprazan i očito sadržan u $\mathrm{E}(A) = \overline{\overline{\mathrm{E}(A)}}$. Specijalno, takva C*-algebra A dopušta vanjsku elementarnu derivaciju.

Primjer 5.3.1 Neka je $\tilde{\Delta} := [1,\infty]$ Alexandrovljeva kompaktifikacija intervala $\Delta := [1,\infty)$. Stavimo $B := C(\tilde{\Delta}, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$ i neka je A C^*-podalgebra od B koja se sastoji od svih $a \in B$ za koje postoji konvergentan niz kompleksnih brojeva $(\lambda_n(a))$ s limesom $\lambda(a) := \lim_n \lambda_n(a)$ takav da vrijedi

$$a(n) = \begin{bmatrix} \lambda_n(a) & 0 \\ 0 & \lambda_{n+1}(a) \end{bmatrix} \ (n \in \mathbb{N}) \ \text{ i } \ a(\infty) = \begin{bmatrix} \lambda(a) & 0 \\ 0 & \lambda(a) \end{bmatrix}.$$

Tada je $\mathrm{Orc}(A) = \infty$ i $\mathrm{E}(A)$ je (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{ICB}(A)$. Dakle,

$$\mathrm{Inn}(A) \subsetneq \mathrm{E}(A) \cap \mathrm{Der}(A).$$

Dokaz. Nije teško provjeriti da je

$$\mathrm{Prim}(A) = \{P_s : \ s \in \Delta \setminus \mathbb{N}\} \cup \{Q_n : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q\},$$

gdje su sa P_s ($s \in \Delta \setminus \mathbb{N}$), Q_n ($n \in \mathbb{N}$) i Q redom označene jezgre ireducibilnih reprezentacija $a \mapsto a(s)$, $a \mapsto \lambda_n(a)$ i $a \mapsto \lambda(a)$. Također primijetimo da su primitivni ideali P_s ($s \in \Delta \setminus \mathbb{N}$) i Q separirani u $\mathrm{Prim}(A)$, dok je $Q_i \sim Q_j$ ako i samo ako je $|i-j| \le 1$. Slijedi da je $d(Q_1, Q_{n+1}) = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je $\mathrm{Orc}(A) = \infty$. Prema korolaru 5.1.16 $\mathrm{Inn}(A)$ nije (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{Der}(A)$. Tu činjenicu također možemo provjeriti direktnim računom. Naime, neka je $f \in C_0(\Delta)$ bilo koja funkcija za koju red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergira. Tada nije teško vidjeti da element

$$b := \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in B$$

derivira A (to jest, vrijedi $bx - xb \in A$ za sve $x \in A$), dok se inducirana derivacija δ_b (koja očito nije unutarnja u A) nalazi u zatvaraču od $\mathrm{Inn}(A)$.

Dokažimo da je $\mathrm{E}(A)$ (cb-)zatvoren. Za dokaz te činjenice koristit ćemo notaciju iz definicije 4.2.10 i lemu 4.2.13. Neka je

$$J := \{a \in A : \ a(n) = 0 \text{ za sve } n \in \mathbb{N}\}$$

2-homogeni (Glimmov) ideal u A. Tada je J esencijalan u A i B, pa je prema lemi 4.2.13 dovoljno dokazati da je $\mathrm{E}_{A/J}(B/J)$ (cb-)zatvoren potprostor od $\mathrm{ICB}(B/J) = \mathrm{E}(B/J)$ (zadnja jednakost slijedi iz propozicije 3.0.21). Stavimo

$$\dot{B} := C(\tilde{\mathbb{N}}, \mathrm{M}_2(\mathbb{C})) \quad \text{i} \quad \dot{A} := \left\{ \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & \tilde{f} \end{bmatrix} : \ f \in C(\tilde{\mathbb{N}}) \right\},$$

gdje $\tilde{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ označava Aleksandrovljevu kompaktifikaciju od $\mathbb{N}$, a za $f \in C(\tilde{\mathbb{N}})$, $\tilde{f}$ označava funkciju $\tilde{f}(n) := f(n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$. Očito je $B/J \cong \dot{B}$ i $A/J \cong \dot{A}$, pa ćemo u daljnjem te C*-algebre identificirati. Neka su $(e_{i,j})_{1 \le i,j \le 2}$ standardne matrične jedinice u $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ koje poistovjećujemo s konstantnim funkcijama u $\dot{B}$. Tvrdimo da je $\mathrm{E}_{\dot{A}}(\dot{B})$ jednak skupu svih operatora $T \in \mathrm{E}(\dot{B})$ koji se mogu zapisati u obliku

$$T = \theta_{\dot{B}}(fe_{1,1} \otimes e_{1,1} + ge_{1,1} \otimes e_{2,2} + he_{2,2} \otimes e_{1,1} + \tilde{f}e_{2,2} \otimes e_{2,2}), \tag{5.15}$$

za neke funkcije $f, g, h \in C(\tilde{\mathbb{N}})$ za koje vrijedi

$$L(T) := f(\infty) = g(\infty) = h(\infty).$$

Lako se provjeri da se svaki $T \in \mathrm{E}_{\dot{A}}(\dot{B})$ može zapisati u obliku (5.15). Obratno, ako je $T \in \mathrm{E}(\dot{B})$ zapisan u obliku (5.15), tada je

$$\begin{aligned} T &= \theta_{\dot{B}}[(f - L(T))e_{1,1} \otimes e_{1,1} + (g - L(T))E_{1,1} \otimes e_{2,2} \\ &+ (h - L(T))e_{2,2} \otimes e_{1,1} + (\tilde{f} - L(T))e_{2,2} \otimes e_{2,2}] + L(T)\mathrm{Id}_{\dot{\mathrm{B}}}, \end{aligned}$$

gdje $\mathrm{Id}_{\dot{B}}$ označava identitetu na $\dot{B}$. Dakle, kako bi dokazali da je $T \in \mathrm{E}_{\dot{A}}(\dot{B})$, dovoljno je dokazati da su za proizvoljne funkcije $f, g, h \in C_0(\mathbb{N})$ operatori T_1, T_2 i T_3 elementi od $\mathrm{E}_{\dot{A}}(\dot{B})$, gdje su

$$\begin{aligned} T_1 &:= \theta_{\dot{B}}(fe_{1,1} \otimes e_{1,1} + \tilde{f}e_{2,2} \otimes e_{2,2}), \\ T_2 &:= \theta_{\dot{B}}(ge_{1,1} \otimes e_{2,2}), \\ T_3 &:= \theta_{\dot{B}}(he_{2,2} \otimes e_{1,1}). \end{aligned}$$

Tvrdnja 1. T_1 se može zapisati u obliku

$$T_1 = \theta_{\dot{B}}(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2) \quad \text{za neke } a_i, b_i \in \dot{A}.$$

Kako bi to dokazali, posmatrajući vrijednosti od odgovarajuće dekompozicije od T_1, dovoljno je naći dva niza vektora $(\vec{v}_n)$ i $(\vec{w}_n)$ u $\mathbb{C}^2$ tako da vrijedi $\lim_n \vec{v}_n = \lim_n \vec{w}_n = (0,0)$, i

$$\vec{v}_n \cdot \vec{w}_n^* = f(n), \quad \vec{v}_n \cdot \vec{w}_{n+1}^* = \vec{v}_{n+1} \cdot \vec{w}_n^* = 0 \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}, \tag{5.16}$$

gdje $\cdot$ označava standarni skalarni produkt na $\mathbb{C}^2$, a $\vec{v}^* := (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ za $\vec{v} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Neka su $\varphi, \psi \in C_0(\mathbb{N})$ bilo koje funkcije takve da vrijedi $f = \varphi\psi$. Tada (5.16) možemo postići ako npr. stavimo

$$\vec{v}_n = ([n+1]\varphi(n), [n]\varphi(n)) \quad \text{and} \quad \vec{w}_n = ([n+1]\psi(n), [n]\psi(n)) \ (n \in \mathbb{N}),$$

gdje je $[n] = 1$ ako je n paran i $[n] = 0$ ako je n neparan.

Tvrdnja 2. T_2 se može zapisati u obliku

$$T_2 = \theta_{\dot{B}}(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2 + a_3 \otimes b_3) \quad \text{za neke } a_i, b_i \in \dot{A}.$$

Kako bi to dokazali, slično kao u dokazu tvrdnje 1, dovoljno je naći dva niza vektora $(\vec{v}_n)$ i $(\vec{w}_n)$ u $\mathbb{C}^3$ tako da vrijedi $\lim_n \vec{v}_n = \lim_n \vec{w}_n = (0,0,0)$ i

$$\vec{v}_n \cdot \vec{w}_n^* = \vec{v}_{n+1} \cdot \vec{w}_n^* = 0, \quad \vec{v}_n \cdot \vec{w}_{n+1}^* = g(n) \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}. \tag{5.17}$$

Neka su $\varphi, \psi \in C_0(\mathbb{N})$ bilo koje funkcije takve da vrijdi $g = \varphi\psi$. Ako sa $(\vec{e}_i)_{1 \le i \le 3}$ označimo kanonsku bazu za $\mathbb{C}^3$, tada (5.17) možemo postići ako npr. stavimo

$$\vec{v_n} = \varphi(n)\vec{e}_{\langle n \rangle} \quad \text{i} \quad \vec{w_i} = \psi(n-1)\vec{e}_{\langle n+2 \rangle} \ (n \in \mathbb{N}),$$

gdje je $\psi(0) := 1$, a za $n = 3k + l$, $\langle n \rangle = l$ ako je $l = 1, 2$ i $\langle n \rangle = 3$ ako je $l = 0$.

Tvrdnja 3. T_3 se može zapisati u obliku

$$T_3 = \theta_{\dot{B}}(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2 + a_3 \otimes b_3) \quad \text{za neke } a_i, b_i \in \dot{A}.$$

To se može dokazati kao tvrdnja 2.

Napokon, koristeći (5.15) sada nije teško provjeriti da je $\mathrm{E}_{\dot{A}}(\dot{B})$ (cb-)zatvoren u $\mathrm{ICB}(\dot{B}) = \mathrm{E}(\dot{B})$. Zaista, neka je R operator iz (cb-)zatvarača od $\mathrm{E}_{\dot{A}}(\dot{B})$. Kako je $R \in \mathrm{E}(\dot{B})$, R se može zapisati u obliku

$$R = \sum_{i,j,p,q=1}^{2} \theta_{\dot{B}}(f_{i,j,p,q} e_{i,j} \otimes e_{p,q}),$$

za neke funkcije $f_{i,j,p,q} \in C(\tilde{\mathbb{N}})$. Kako se R može po volji dobro u (cb-)normi aproksimirati s operatorima iz $\mathrm{E}_{\dot{A}}(\dot{B})$, te kako se svi operatori iz $\mathrm{E}_{\dot{A}}(\dot{B})$ mogu zapisati u obliku (5.15), slijedi da je $f_{i,j,p,q} = 0$ ako je $i \neq j$ ili $p \neq q$. Radi jednostavnije notacije, stavimo $f_{i,j} := f_{i,i,j,j}$ $(1 \leq i, j \leq 2)$. Također trebamo pokazati da su vrijednosti $f_{i,j}(\infty)$ nezavisne od i i j, te da je $f_{2,2} = \tilde{f}_{1,1}$. Npr. dokažimo da je $f_{2,2} = \tilde{f}_{1,1}$. Pretpostavimo da za neko $n \in \mathbb{N}$ imamo $f_{1,1}(n+1) \neq f_{2,2}(n)$ i neka je $\alpha := |f_{1,1}(n+1) - f_{2,2}(n)|$. Kako se operator R nalazi u (cb-)zatvaraču od $\mathrm{E}_{\dot{A}}(\dot{B})$, možemo naći operator $T \in \mathrm{E}_{\dot{A}}(\dot{B})$ koji je zapisan u obliku (5.15) takav da je $\|R(1) - T(1)\| < \frac{\alpha}{2}$. Tada je

$$\|R(1) - T(1)\| = \left\| \begin{bmatrix} f_{1,1} - f & 0 \\ 0 & f_{2,2} - \tilde{f} \end{bmatrix} \right\| = \max\{\|f_{11} - f\|, \|f_{2,2} - \tilde{f}\|\} < \frac{\alpha}{2}.$$

Specijalno,

$$|f_{1,1}(n+1) - f(n+1)| < \frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad |f_{2,2}(n) - f(n+1)| < \frac{\alpha}{2},$$

pa je

$$\alpha = |f_{1,1}(n+1) - f_{2,2}(n)| \leq |f_{1,1}(n+1) - f(n+1)| + |f(n+1) - f_{2,2}(n)| < \alpha;$$

kontradikcija. □

Neka je A separabilna C*-algebra i $J \in \mathrm{Id}(A)$. Prema [55] znamo da se svaka derivacija $\dot{\delta} \in \mathrm{Der}(A/J)$ može podići do derivacije $\delta \in \mathrm{Der}(A)$ (drugim riječima, preslikavanje $\mathrm{Der}(A) \to \mathrm{Der}(A/J)$, $\delta \mapsto \delta_J$ je surjektivno). Naravno, svaki operator $\dot{T} \in \mathrm{Im}\,\theta_{A/J}$ se također može podići do operatora $T \in \mathrm{Im}\,\theta_A$. Sljedeći primjer nam pokazuje da se općenito derivacija $\dot{\delta} \in \mathrm{Der}(A/J) \cap \mathrm{Im}\,\theta_{A/J}$ ne može podići do derivacije $\delta \in \mathrm{Der}(A) \cap \mathrm{Im}\,\theta_A$.

Primjer 5.3.2 Neka je A C*-algebra iz primjera 5.3.1 i izaberimo bilo koju vjernu unitalnu reprezentaciju π od A na separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_\pi$ tako da vrijedi $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi) = \{0\}$ (gdje je, kao i prije, s $\mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$ označena C*-algebra svih kompaktnih operatora na $\mathcal{H}_\pi$). Kako bi opravdali egzistenciju takve reprezentacije π, najprije možemo izabrati vjernu reprezentaciju ρ od A na separabilnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_\rho$ (takva ρ postoji jer je A separabilna), te zatim staviti $\mathcal{H} := \mathcal{H}_\rho^{(\infty)}$ i $\pi := \rho^{(\infty)}$, gdje je s $\rho^{(\infty)}$ označena odgovarajuća amplifikacija od ρ.

Stavimo $B := \pi(A) + \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Očito je B unitalna, separabilna i primitivna C*-algebra, pa je prema lemi 5.2.5 $\mathrm{Der}(B) \cap \mathrm{Im}\,\theta_B = \mathrm{Inn}(B)$. S druge strane, imamo

$$B/\mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi) \cong \pi(A)/(\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)) \cong \pi(A) \cong A,$$

pa prema dokazanom, postoji vanjska elementarna derivacija $\dot{\delta} \in \mathrm{E}(B/\mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)) \setminus \mathrm{Inn}(B/\mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi))$. Slijedi da se takva derivacija ne može podići do (nužno unutarnje) derivacije $\delta \in \mathrm{Im}\,\theta_B$.

Bibliografija

[1] Charles A. Akemann, Joel Anderson, and Gert K. Pedersen, *Excising states of C^*-algebras*, Canad. J. Math. **38** (1986), no. 5, 1239–1260.

[2] Charles A. Akemann, George A. Elliott, Gert K. Pedersen, and Jun Tomiyama, *Derivations and multipliers of C^*-algebras*, Amer. J. Math. **98** (1976), no. 3, 679–708.

[3] Charles A. Akemann and Gert K. Pedersen, *Central sequences and inner derivations of separable C^*-algebras*, Amer. J. Math. **101** (1979), no. 5, 1047–1061.

[4] Stephen D. Allen, Allan M. Sinclair, and Roger R. Smith, *The ideal structure of the Haagerup tensor product of C^*-algebras*, J. Reine Angew. Math. **442** (1993), 111–148.

[5] Pere Ara and Martin Mathieu, *Local multipliers of C^*-algebras*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London Ltd., London, 2003.

[6] R. J. Archbold, *On the norm of an inner derivation of a C^*-algebra*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **84** (1978), no. 2, 273–291.

[7] ______, *Topologies for primal ideals*, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), no. 3, 524–542.

[8] R. J. Archbold and C. J. K. Batty, *On factorial states of operator algebras. III*, J. Operator Theory **15** (1986), no. 1, 53–81.

[9] R. J. Archbold and D. W. B. Somerset, *Quasi-standard C^*-algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **107** (1990), no. 2, 349–360.

[10] ______, *Transition probabilities and trace functions for C^*-algebras*, Math. Scand. **73** (1993), no. 1, 81–111.

[11] Robert J. Archbold, Douglas W. B. Somerset, Eberhard Kaniuth, and Günter Schlichting, *Ideal spaces of the Haagerup tensor product of C^*-algebras*, Internat. J. Math. **8** (1997), no. 1, 1–29.

[12] Robert J. Archbold, Douglas W. B. Somerset, and Richard M. Timoney, *On the central Haagerup tensor product and completely bounded mappings of a C^*-algebra*, J. Funct. Anal. **226** (2005), no. 2, 406–428.

[13] ______, *Completely bounded mappings and simplicial complex structure in the primitive ideal space of a C^*-algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 3, 1397–1427.

[14] William Arveson, *An invitation to C^*-algebras*, Springer-Verlag, New York, 1976, Graduate Texts in Mathematics, No. 39.

[15] Damir Bakić and Boris Guljaš, *On a class of module maps of Hilbert C^*-modules*, Math. Commun. **7** (2002), no. 2, 177–192.

[16] B. Blackadar, *Operator algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 122, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III.

[17] D. P. Blecher, *Geometry of the tensor product of C^*-algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **104** (1988), no. 1, 119–127.

[18] David P. Blecher and Christian Le Merdy, *Operator algebras and their modules—an operator space approach*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 30, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2004, Oxford Science Publications.

[19] Avi Chatterjee and Roger R. Smith, *The central Haagerup tensor product and maps between von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **112** (1993), no. 1, 97–120.

[20] John B. Conway, *A course in functional analysis*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1990.

[21] ______, *A course in operator theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 21, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[22] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein, *Introduction to algorithms*, second ed., MIT Press, Cambridge, MA, 2001.

[23] Claire Delaroche, *Sur les centres des C^*-algèbres*, Bull. Sci. Math. (2) **91** (1967), 105–112.

[24] ______, *Sur les centres des C^*-algèbres. II*, Bull. Sci. Math. (2) **92** (1968), 111–128.

[25] J. Dixmier, *Sur les espaces localement quasi-compacts*, Canad. J. Math. **20** (1968), 1093–1100.

[26] Jacques Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977, Translated from the French by Francis Jellett, North-Holland Mathematical Library, Vol. 15.

[27] Edward G. Effros and Zhong-Jin Ruan, *Operator spaces*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 23, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.

[28] George A. Elliott, *Some C^*-algebras with outer derivations*, Rocky Mountain J. Math. **3** (1973), 501–506.

[29] ______, *Some C^*-algebras with outer derivations. III*, Ann. Math. (2) **106** (1977), no. 1, 121–143.

[30] ______, *On derivations of AW^*-algebras*, Tôhoku Math. J. (2) **30** (1978), no. 2, 263–276.

[31] J. M. G. Fell, *The structure of algebras of operator fields*, Acta Math. **106** (1961), 233–280.

[32] ______, *A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 472–476.

[33] J. M. G. Fell and R. S. Doran, *Representations of *-algebras, locally compact groups, and Banach *-algebraic bundles. Vol. 1*, Pure and Applied Mathematics, vol. 125, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988, Basic representation theory of groups and algebras.

[34] Leonard Gillman and Meyer Jerison, *Rings of continuous functions*, Springer-Verlag, New York, 1976, Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, No. 43.

[35] Ilja Gogić, *Derivations which are inner as completely bounded maps*, to appear in Operators and Matrices.

[36] ______, *Elementary operators and subhomogeneous C^*-algebras*, to appear in Proc. Edin. Math. Soc.

[37] Uffe Haagerup, *The α-tensor product of C^*-algebras*, unpublished manuscript, University of Odense, 1980.

[38] Dale Husemoller, *Fibre bundles*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1975, Graduate Texts in Mathematics, No. 20.

[39] Richard V. Kadison, *Derivations of operator algebras*, Ann. of Math. (2) **83** (1966), 280–293.

[40] Richard V. Kadison and John R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 15, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, Elementary theory, Reprint of the 1983 original.

[41] ______, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 16, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, Advanced theory, Corrected reprint of the 1986 original.

[42] Irving Kaplansky, *Normed algebras*, Duke Math. J. **16** (1949), 399–418.

[43] Max Karoubi, *K-theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1978, An introduction, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 226.

[44] Aldo J. Lazar, *Hyperspaces of closed limit sets*, preprint.

[45] ———, *Quotient spaces determined by algebras of continuous functions*, preprint.

[46] Bojan Magajna, *A transitivity theorem for algebras of elementary operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 119–127.

[47] ———, *Pointwise approximation by elementary complete contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 7, 2375–2385.

[48] ———, *Uniform approximation by elementary operators*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **52** (2009), no. 3, 731–749.

[49] Martin Mathieu, *Elementary operators on prime C^*-algebras. I*, Math. Ann. **284** (1989), no. 2, 223–244.

[50] ———, *The cb-norm of a derivation*, Algebraic methods in operator theory, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994, pp. 144–152.

[51] Yosinao Misonou, *On a weakly central operator algebra*, Tôhoku Math. J. (2) **4** (1952), 194–202.

[52] Gerard J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1990.

[53] Dorte Olesen, *Derivations of AW^*-algebras are inner*, Pacific J. Math. **53** (1974), 555–561.

[54] Vern Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 78, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[55] Gert K. Pedersen, *Lifting derivations from quotients of separable C^*-algebras*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **73** (1976), no. 5, 1414–1415.

[56] ———, *C^*-algebras and their automorphism groups*, London Mathematical Society Monographs, vol. 14, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1979.

[57] N. Christopher Phillips, *Recursive subhomogeneous algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 10, 4595–4623 (electronic).

[58] Iain Raeburn and Dana P. Williams, *Morita equivalence and continuous-trace C^*-algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 60, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[59] Shôichirô Sakai, *Derivations of W^*-algebras*, Ann. of Math. (2) **83** (1966), 273–279.

[60] ______, *Derivations of simple C^*-algebras*, J. Functional Analysis **2** (1968), 202–206.

[61] ______, *Derivations of simple C^*-algebras. II*, Bull. Soc. Math. France **99** (1971), 259–263.

[62] Allan M. Sinclair and Roger R. Smith, *Hochschild cohomology of von Neumann algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 203, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. MR MR1336825 (96d:46094)

[63] R. R. Smith, *Completely bounded module maps and the Haagerup tensor product*, J. Funct. Anal. **102** (1991), no. 1, 156–175.

[64] D. W. B. Somerset, *The central Haagerup tensor product of a C^*-algebra*, J. Operator Theory **39** (1998), no. 1, 113–121.

[65] ______, *Derivations of 2-subhomogeneous C^*-algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **43** (2000), no. 3, 449–456.

[66] Douglas W. B. Somerset, *The inner derivations and the primitive ideal space of a C^*-algebra*, J. Operator Theory **29** (1993), no. 2, 307–321.

[67] ______, *Inner derivations and primal ideals of C^*-algebras*, J. London Math. Soc. (2) **50** (1994), no. 3, 568–580.

[68] M. Takesaki, *Theory of operator algebras. I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 124, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Reprint of the first (1979) edition, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5.

[69] Jun Tomiyama, *Topological representation of C^*-algebras*, Tôhoku Math. J. (2) **14** (1962), 187–204.

[70] Jørgen Vesterstrøm, *On the homomorphic image of the center of a C^*-algebra*, Math. Scand. **29** (1971), 134–136.

[71] Nik Weaver, *A prime C^*-algebra that is not primitive*, J. Funct. Anal. **203** (2003), no. 2, 356–361.

[72] N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993, A friendly approach.

[73] Dana P. Williams, *Crossed products of C^*-algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 134, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

Sažetak

Neka je A C*-algebra i neka je Θ_A kanonska kontrakcija s Haagerupovog tenzorskog produkta od $M(A)$ sa samom sobom u prostor potpuno ograničenih operatora na A.

U prvom dijelu disertacije promatramo sljedeće uvjete na A:

(i) A je konačno generirani modul nad centrom svoje multiplikatorske algebre;

(ii) $\mathrm{Im}\,\Theta_A$ je najmanja moguća, dakle jednaka $\mathrm{E}(A)$;

(iii) Elementarni operatori na A su uniformno konačne duljine.

Pokazujemo da A zadovoljava (i) ako i samo ako je A konačna direktna suma unitalnih homogenih C*-algebri. Nadalje pokazujemo da ako separabilna A zadovoljava (ii) ili (iii), tada je ona nužno SFT algebra, tj. A je subhomogena i C*-svežnjevi koji odgovaraju homogenim subkvocijentima od A su konačnog tipa. Štoviše, u tom slučaju su i kodimenzije 2-primalnih ideala u A konačne i uniformno ograničene. Koristeći tu činjenicu dajemo primjer unitalne i separabilne 2-SFT algebre koja ne zadovoljava niti (ii) niti (iii). Također dokazujemo i parcijalni obrat; ako je primitivni spektar (unitalne) SFT algebre A Hausdorffov, tada A zadovoljava (ii) i (iii).

U drugom dijelu disertacije promatramo derivacije na unitalnoj (ili općenitije kvazicentralnoj) A koje se nalaze u slici od Θ_A (u kvazicentralnom slučaju promatramo restrikciju od Θ_A na $A \otimes_h A$). Pokazujemo da su takve derivacije nužno unutarnje ako je svaki Glimmov ideal u A prim. Također dajemo primjer C*-algebre koja dopušta vanjsku derivaciju koja se može implementirati s elementarnim operatorom.

Summary

Let A be a C*-algebra and let Θ_A be the canonical contraction form the Haagerup tensor product of $M(A)$ with itself to the space of completely bounded maps on A.

In the first part of the thesis we consider the following conditions on A:

(i) A is a finitely generated module over the center of $M(A)$;

(ii) The image of Θ_A equals to the set $\mathrm{E}(A)$ of all elementary operators on A;

(iii) The lengths of elementary operators on A are uniformly bounded.

We show that A satisfies (i) if and only if it is a finite direct sum of unital homogeneous C*-algebras. We also show that if a separable A satisfies (ii) or (iii) then A is necessarily SFT algebra, i.e. A is subhomogeneous and the C*-bundles corresponding to the homogeneous sub-quotients of A must be of finite type. Moreover, in this (and unital) case codimensions of 2-primal ideals of A are finite and uniformly bounded. Using this result we give an example of a unital separable 2-SFT algebra which does not satisfy (ii) and (iii). We also show a partial converse; a unital C*-algebra A with Hausdorff primitive specturm satisfies both conditions (ii) and (iii).

In the second part of the thesis we consider derivations on a unital (or more generally quasicentral) A which lie in the image of Θ_A (in quasicentral case we consider the restriction of Θ_A to $A \otimes_h A$). We show that such derivations are necessarily inner if every Glimm ideal of A is prime. We also provide an example of a C*-algebra which admit an outer derivation implemented by an elementary operator.

Životopis

Osobni podaci

- rođen 9. ožujka 1982. godine u Zagrebu, Hrvatska

Školovanje

- **studeni 2004. –** student doktorskog studija na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematičkom odjelu u Zagrebu
- **rujan 2000. – siječanj 2005.** dodiplomski studij na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematičkom odjelu u Zagrebu, diplomski rad *K-teorija za C^*-algebre* pod vodstvom prof. dr. sc. Hrvoja Kraljevića
- **rujan 1996. – lipanj 2000.** V. prirodoslovno-matematička gimnazija u Zagrebu
- **rujan 1988. – lipanj 1996.** Osnovna škola Julija Klovića u Zagrebu

Profesionalno iskustvo

- **ožujak 2005 –** asistent i znanstveni novak na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematičkom odjelu u Zagrebu

Znanstveni radovi

1. I. Gogić, *Derivations which are inner as completely bounded maps* (2009), prihvaćeno za objavljivanje u časopisu Operators and Matrices.
2. I. Gogić, *Elementary operators and subhomogeneous C^*-algebras* (2009), prihvaćeno za objavljivanje u časopisu Proc. Edin. Math. Soc.

Projekti

- **2007–** : Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske, projekt br. 037-0372784-2753 *Hilbertovi C^*-moduli*

- **2002–2006.**: Ministarstvo znanosti i tehnologije Republike Hrvatske, projekt br. 0037106 *Hilbertovi moduli i operatorski prostori*

Konferencije, radionice i ljetne škole

- Operators, Spaces, Algebras, Modules, Zagreb, Hrvatska, 1-4. ožujka, 2010.
- Sedano Winter School on K-theory, Sedano, Španjolska, 22-27. siječnja, 2007.
- Summer School and Conference on Poisson Geometry, Trst, Italija, 4-22. srpnja, 2005.
- Functional Analysis IX, Dubrovnik, Hrvatska, 15-23. lipnja, 2005.
- Wavelets and Frames, Terme Tuhelj, Hrvatska, 30. svibnja - 1. lipnja, 2005.
- Spring School on Noncommutative Geometry, Varšava, Poljska, 23-28. svibnja, 2005.

Izlaganja na međunarodnim znanstvenim skupovima

- *Derivations, completely bounded maps and the ideal structure of C^*-algebras*, Operators, Spaces, Algebras, Modules, Zagreb, Hrvatska, 1-4. ožujka, 2010.

Nagrade

- 2004. - Dekanova nagrada za jednog od najuspješnijih studenata na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematičkom odjelu u Zagrebu.

Stipendije

- Stipendija za postdiplomsko usavršavanje, Ljubljana, Slovenija, 1. listopada 2008. - 31. ožujka 2009.