Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Ilja Gogić

K-TEORIJA ZA C^*-ALGEBRE

Diplomski rad

Zagreb, siječanj 2005.

Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Ilja Gogić

K-TEORIJA ZA C^*-ALGEBRE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc.
Hrvoje Kraljević

Zagreb, siječanj 2005.

Sadržaj

1 Uvod

Jedan od najvećih napredaka 20. stoljeća je Heisenbergovo otkriće matematičke formulacije kvantne mehanike, 1925. Iz matematičkog kuta gledanja, prijelaz iz klasične mehanike u kvantnu mehaniku odgovara prijelazu iz komutativne algebre klasičnih observabli u nekomutativnu algebru kvantnih observabli. Prisjetimo se da je u klasičnoj mehanici observabla (energija, pozicija, moment, itd.) funkcija na mnogostrukosti koju zovemo fazni prostor sustava. Odmah nakon Heisenbergovog rada, iz slijedećih radova Diraca i Born-Heisenberg-Jordana postalo je jasno da su observable u kvantnoj mehanici zapravo hermitski operatori na Hilbertovom prostoru kojeg zovemo prostor stanja sustava. Prema tome, komutativna algebra funkcija na prostoru zamijenjena je nekomutativnom algebrom operatora na Hilbertovom prostoru.

Osamdesetih godina 20. stoljeća (dakle, malo više od 50 godina nakon tog otkrića), francuski matematičar Alain Connes je primijetio da se slična procedura može primijeniti na razna područja matematike gdje klasični pojam prostora (prostora mjere, lokalno kompaktnog prostora, glatkog prostora, itd.) gubi svoj smisao, te se može zamijeniti sa nekomutativnom algebrom. Connesova teorija, koja je poznata pod imenom **nekomutativna geometrija**, je novo i rapidno rastuće područje matematike koje međudjeluje i doprinosi mnogim matematičkim disciplinama i fizici. Primjeri takvih međudjelovanja i doprinosa su: teorija operatorskih algebri, teorija indeksa eliptičkih operatora, algebarska i diferencijalna topologija, teorija brojeva, standardni modeli za elementarne čestice, kvantni Hallov efekt, renormalizacija u kvantnoj teoriji polja i teorija struna. Nekomutativna geometrija, kao granični slučaj, sadrži klasičnu geometriju, ali ta je geometrija opisana algebarskim terminima. Zbog toga, za razumijevanje njene relacije s klasičnom geometrijom, treba prvo shvatiti pojam jedne od najvažnijih ideja u matematici: **ideja dualizacije između komutativne algebre i geometrije**. Radi se o tome da postoji fundamentalna relacija između prostora i komutativne algebre funkcija. Preciznije, postoji dualnost između određenih kategorija geometrijskih prostora i kategorija algebri koje reprezentiraju te prostore. Nekomutativna geometrija se temelji na toj relaciji dualnosti između geometrije i komutativne algebre i beskrajno ju proširuje.

Široka ideja nekomutativne geometrije je da se (s određenim klasama) nekomutativnih algebri postupa kao s nekomutativnim prostorima i da pokušava proširiti aparate geometrije, topologije i analize u to novo okruženje.

U ovom radu ćemo demonstrirati tu ideju na lokalno kompaktnim Hausdorffovim prostorima (njih ćemo od sada pa nadalje kratko zvati LCH-prostori). Preciznije, pokazat ćemo korespodenciju (dualnost) između kategorije LCH-prostora i kategorije komutativnih C^*-algebri i time opravdati zašto upravo C^*-algebre smatramo njihovim nekomutativnim analogonima. Nadalje, iznijet ćemo kratki pregled jedne od topoloških invarijanti LCH-prostora: K-teoriju; dat ćemo njenu algebarsku interpretaciju u terminima komutativnih C^*-algebri. Time dolazimo do K-teorije za komutativne C^*-algebre koja potpuno određuje topološku K-teoriju, kao i obratno. Od svih topoloških invarijanti, upravo K-teorija ima izravno proširenje na nekomutativno područje; ukoliko komutativnu C^*-algebru zamijenimo s općenitijom, nekomutativnom C^*-algebrom, teorija ostaje valjana. Time dobivamo K-teoriju za C^*-algebre, popularno zvanom nekomutativnom K-teorijom, koja je i tema ovog rada. Zanimljivo je da sva bitna svojstva (komutativne) K-teorije (poluegzaknost, homotopska invarijantnost, Bottova periodičnost itd.) ostaju sačuvana i u nekomutavnom slučaju, ali dobivamo i nova svojstva koja nemaju svoj komutativni analogon (npr. svojstvo stabilnosti). Dok je topološka K-teorija od male koristi pri klasifikaciji topoloških prostora, K-teorija za C^*-algebre je vrlo koristan aparat pri klasifikaciji C^*-algebri. George Elliott je 1970. godine otkrio da je tzv. AF-algebre u potpunosti moguće klasificirati preko njihove K-teorije.

Napomenimo da je K-teorija i danas aktivno istraživačko područje i jedno od glavnih oruđa koje se koristi pri proučavanju nekomutativnih prostora.

Koristim ovu priliku kako bih se zahvalio prof.dr.sc. Hrvoju Kraljeviću, voditelju ovog rada, prvenstveno na strpljenju i korisnim savjetima. Također bih se zahvalio prof.dr.sc. Šimi Ungaru na korisnim uputama vezanim uz LaTeX, te svojoj dragoj prijateljici dr.sc. Franki Miriam Brückler, koja je pažljivo pročitala prvu verziju ovog rada i uputila me na učinjene propuste.

2 Motivacija

2.1 Lokalno kompaktni Hausdorffovi prostori i komutativne C^*-algebre

Objasnimo pojam dualnosti na primjeru LCH-prostora i komutativnih C^*-algebri.

Na prvi Gelfand-Naimarkov teorem možemo gledati kao na konstrukciju dva kontravarijantna funktora (kratko, kofunktora); prvi funktor ide iz kategorije LCH-prostora u kategoriju komutativnih C^*-algebri, a drugi obratno. Neka je $\mathcal{LCH}$ kategorija čiji su objekti LCH-prostori i čiji su morfizmi *prava neprekidna preslikavanja*, tj. neprekidne funkcije $f : X \to Y$ za koje je $f^{-1}(K) \subset X$ kompaktan za svaki kompaktni $K \subset Y$. Primijetimo da je za kompaktan prostor X, svako neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ ujedno i pravo neprekidno preslikavanje. Neka je $\mathcal{KC}^*$ kategorija čiji su objekti komutativne C^*-algebre, a morfizmi *pravi $*$-homomorfizmi*, tj. takvi $*$-homomorfizmi $\phi : A \to B$ za koje je $(\phi(e_i))$ aproksimativna jedinica u B, čim je (e_i) aproksimativna jedinica u A. Također primijetimo da ako A i B imaju jedinicu, onda je svaki *unitalni $*$-homomorfizam* $\phi : A \to B$ (tj. koji jedinicu preslikava u jedinicu, $\phi(1_A) = 1_B$) ujedno pravi $*$-homomorfizam, kao i obratno.

Prvi kofunktor $C_0 : \mathcal{LCH} \rightsquigarrow \mathcal{KC}^*$ LCH-prostor X prevodi u C^*-algebru $C_0(X)$ neprekidnih kompleksnih funkcija na X koje iščezavaju u beskonačnosti. Prisjetimo se, da za funkciju $f : X \to \mathbb{C}$ kažemo da *iščezava u beskonačnosti*, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktni podskup $K \subset X$ takav da je $|f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X \setminus K$. Primijetimo, ukoliko je X i kompaktan, onda je $C_0(X) = C(X)$. Ako je $f : X \to Y$ prava neprekidna funkcija, onda ju kofunktor C_0 prevodi u njen transponat $C_0(f) : h \mapsto h \circ f : C_0(Y) \to C_0(X)$. Pokazuje se da je tada $C_0(f)$ pravi $*$-homomorfizam.

Za definiciju drugog kofunktora $M : \mathcal{KC}^* \rightsquigarrow \mathcal{LCH}$, moramo se prisjetiti nekih rezultata iz opće funkcionalne analize. Najprije se prisjetimo definicije karaktera i slabe $*$-topologije. Neka je A komutativna Banachova algebra. *Karakter* na A je svaki netrivijalni homomorfizam algebri $A \to \mathbb{C}$. Pokazuje se da je svaki karakter automatski neprekidan s normom ne većom od 1. Nadalje, ako je A još i C^*-algebra, onda je svaki karakter također i *-homomorfizam.

Slaba *-topologija na dualu A' je najslabija topologija obzirom na koju su funkcionali $\hat{a} : f \mapsto f(a) : A' \to \mathbb{C}$ neprekidni za svako $a \in A$. Pokazuje se da je obzirom na nju A' Hausdorffov prostor. Neka je sad A komutativna Banachova algebra s jedinicom i s $M(A)$ označimo njen prostor karaktera. Poznati Banach-Alaoglu-Bourbakijev teorem kaže da je jedinična kugla u A' kompaktna u slaboj *-topologiji. Kako je $M(A)$, u slaboj *-topologiji, zatvoren potprostor jedinične sfere dualnog prostora A', on je kompaktan.

Neka je sada X LCH-prostor. S $\dot{X} := X \sqcup \{\infty\}$ označimo kompaktifikaciju jednom točkom (bio X kompaktan ili ne) i za komutativnu C^*-algebru A, s $\dot{A}$ označimo (minimalnu) *unitalizaciju* od A, tj. C^*-algebru $A \times \mathbb{C}$ dobivenu dodavanjem jedinice algebri A (imala A jedinicu ili ne). Tada je $C(\dot{X}) \cong \dot{C_0(X)}$ C^*-algebra s jedinicom. Ako s ζ_0 označimo karakter $\dot{A} \to \mathbb{C}$, $(a, \lambda) \mapsto \lambda$, tada je $M(A) = M(\dot{A}) \setminus \{\zeta_0\}$ LCH-prostor kada A nema jedinicu. Primijetimo da su prostori $M(\dot{A})$

i $\dot{M}(A)$ homeomorfni. Sada, kofunktor $M : \mathcal{KC}^* \rightsquigarrow \mathcal{LCH}$ komutativnu C^*-algebru A prevodi u njen prostor karaktera $M(A)$ i ako je $\phi : A \to B$ pravi $*$-homomorfizam, kofunktor M prevodi ϕ u njegov transponat $M(\phi) : \zeta \mapsto \zeta \circ \phi : M(B) \to M(A)$. Može se pokazati da je tada $M(\phi)$ pravo neprekidno preslikavanje.

Da ni jedna informacija nije izgubljena pri prijelazu iz LCH -prostora u C^*-algebre možemo vidjeti na slijedeći način. Ako je X LCH-prostor, tada za $x \in X$, evaluacija $f \mapsto f(x)$ definira karakter $\epsilon_x \in M(C_0(X))$ i preslikavanje $\epsilon_X : x \mapsto \epsilon_x : X \to M(C_0(X))$ je (pravi) homeomorfizam. Ako je $a \in A$ (A je komutativna C^*-algebra), njegova *Gelfandova transformacija* $\hat{a} \mapsto \zeta(a) : M(A) \to \mathbb{C}$ je neprekidna funkcija na $M(A)$ i preslikavanje $\mathcal{G} : a \mapsto \hat{a} : A \to C_0(M(A))$ je (pravi) $*$-izomorfizam C^*-algebri. Ta preslikavanja su *funktorijalna* (ili prirodna), u smislu da slijedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_X"'] & Y \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\ M(C_0(X)) \arrow[r, "M(C_0(f))"] & M(C_0(Y)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathcal{G}_A"'] & B \arrow[d, "\mathcal{G}_A"] \\ C_0(M(A)) \arrow[r, "C_0(M(\phi))"] & C_0(M(B)) \end{tikzcd}$$

Na primjer, ako je $\phi : A \to B$, tada za svako $a \in A$ i $\xi \in M(B)$ dobivamo

$$((C_0(M(\phi)) \circ \mathcal{G}_A)a)\xi = ((C_0(M(\phi))\hat{a}))\xi = \hat{a}(M(\phi)\xi) = \hat{a}(\xi \circ \phi) = \xi(\phi(a)) = \widehat{\phi(a)}(\xi) = ((\mathcal{G}_B \circ \phi)a)\xi.$$

Budući da ćemo glavni rezultat ove točke iskazati terminima teorije kategorija, najprije ćemo se prisjetiti nekih pojmova.

- *Prirodna transformacija* između dva kovarijantna, odnosno kontravarijantna funktora $\Phi, \Psi : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ($\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ su kategorije) je preslikavanje $\alpha : \Phi \to \Psi$, koje svakom objektu C iz $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ pridružuje morfizam $\alpha_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(C), \Psi(C))$, tako da za svaki objekt C' iz $\mathrm{Ob}(C)$ i svaki morfizam $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ komutira lijevi dijagram, ako su Φ, Ψ kovarijantni,

$$\begin{tikzcd} \Phi(C) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\Phi(f)"'] & \Psi(C) \arrow[d, "\Psi(f)"] \\ \Phi(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & \Psi(C') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Phi(C) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C}}"] & \Psi(C) \\ \Phi(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] \arrow[u, "\Phi(f)"] & \Psi(C') \arrow[u, "\Psi(f)"'] \end{tikzcd}$$

  odnosno desni dijagram, ako su Φ, Ψ kontravarijantni.

- Ako je α_C izomorfizam za sve objekte C iz $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, tada kažemo da je α *prirodni izomorfizam* između funktora Φ i Ψ.

- Funktori $\Phi, \Psi : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ su *prirodno izomorfni*, s oznakom $\Phi \cong \Psi$, ako postoji prirodni izomorfizam između njih.

- Kategorije $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ su *ekvivalentne*, odnosno *dualne*, ako postoje kovarijantni, odnosno kontravarijantni, funktori $\Gamma : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ i $\Theta : \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ takvi da je $\Theta \circ \Gamma \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ i $\Gamma \circ \Theta \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Sada gornji rezultat kratko možemo izreći:

Teorem 2.1 *Kategorija $\mathcal{LCH}$ lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostora i pravih neprekidnih preslikavanja je dualna kategoriji $\mathcal{KC}^*$ komutativnih C^*-algebri i pravih $*$-homomorfizama.*

Ta dualnost kategorija ima nekoliko posljedica:

- Dvije komutativne C^*-algebre su izomorfne ako i samo su njihovi prostori karaktera homeomorfni. (Ako su $\phi : A \to B$ i $\psi : B \to A$ međusobno inverzni pravi *-izomorfizmi, tada su $M(\phi) : M(B) \to M(A)$ i $M(\psi) : M(A) \to M(B)$ međusobno inverzni pravi homeomorfizmi).
- Grupa automorfizama $\mathrm{Aut}(A)$ komutativne C^*-algebre A je izomorfna grupi homeomorfizama njenog prostora karaktera. Primijetimo da, budući je A komutativna, $\mathrm{Aut}(A)$ nema netrivijalnih unutrašnjih automorfizama.
- Topologija na X se može iskazati u terminima algebarskih svojstava od $C_0(X)$. Na primjer, bilo koji ideal u $C_0(X)$ je oblika $C_0(X, X \setminus U) := \{f \in C(X) : f(x) = 0, \forall x \in X \setminus U\}$, gdje je $U \subseteq X$ otvoreni podskup.

Ako je $Y \subseteq X$ zatvoreni podskup kompaktnog Hausdorffovog prostora X, s inkluzijom $\iota : Y \to X$, tada je $C_0(\iota) : C_0(X) = C(X) \to C_0(Y) = C(Y)$ restrikcija *-homomorfizma (koji je surjektivan po Tietzovom teoremu proširenja). Općenitije, $f : Y \to X$ je injekcija ako i samo ako je $C_0(f) : C_0(X) \to C_0(Y)$ surjekcija. Rezimirajmo osnovna svojstva Gelfand-Naimarkovog kofunktora slijedećom tablicom (za objašnjenje pojmova vidi [3]):

TOPOLOGIJA	ALGEBRA
lokalno kompaktan prostor	komutativna C^*-algebra
kompaktan prostor	komutativna C^*-algebra s jedinicom
kompaktifikacija jednom točkom	unitalizacija
Stone-Čechova kompaktifikacija	multiplikatorska algebra
surjekcija	injekcija
injekcija	surjekcija
homeomorfizam	automorfizam
otvoreni podskup	ideal
zatvoreni podskup	kvocijentna algebra
Borelova mjera	pozitivni funkcional
vjerojatnosna mjera	stanje
kartezijev produkt	minimalni tenzorski produkt

2.2 Topološka K-teorija

Kao što smo u uvodu napomenuli, kao motivaciju za nekomutativnu K-teoriju, najprije iznosimo kratki pregled osnovnih pojmova i svojstava topološke K-teorije. Detaljni pregled topološke K-teorije može se naći u [6], [7], ili [8].

Grubo rečeno, K-teorija je grana algebarske topologije koja se bavi proučavanjem vektorskih svežnjeva i njihovih svojstava, koja su opisana algebarskim terminima.

Definicija 2.2 Vektorski svežanj nad topološkim prostorom X je trojka (E, p, X), gdje je E topološki prostor, $p : E \to X$ neprekidna surjekcija sa svojstvom da je za svako $x \in X$, **vlakno** $E_x := p^{-1}(x)$, snabdjeveno strukturom konačnodimenzionalnog vektorskog prostora i topologija na svakom E_x je kompatibilna s induciranom topologijom od E. Nadalje, zahtjevamo da je E **lokalno trivijalan**, tj. da za svaki $x \in X$ postoji okolina U od x takva da je $E\mid_U = p^{-1}(U)$ izomorfan s trivijalnim svežnjem nad X, pri čemu za svežanj E nad X kažemo da je **trivijalan**, ako je oblika $E = X \times V$, gdje je V fiksirani konačnodimenzionalni vektorski prostor i p je projekcija na prvu koordinatu (topologija je produktna topologija).

Nas će obično zanimati situacija kada je X kompaktan Hausdorffov prostor.

Izomorfizam vektorskih svežnjeva E i F nad X je homeomorfizam $E \to F$ koji E_x preslikava u F_x za svako $x \in X$ i koji je linearan na svakom vlaknu.

Obično promatramo realne ili kompleksne vektorske svežnjeve (ili čak kvaternionske), ovisno o tome da li je vektorski prostor realan ili kompleksan.

Lokalna trivijalnost implicira da je dimenzija vlakana lokalno konstantna, pa zato i globalno konstantna ako je X povezan (zapravo, to je jedino i interesantan slučaj). Ako je dimenzija svakog vlakna n, tada kažemo da je svežanj n-dimenzionalan. Jednodimenzionalne svežnjeve katkad zovemo **linijski svežnjevi**.

Svaki prostor X ima barem jedan svežanj za svaku dimenziju: n-dimenzionalni trivijalni svežanj. Mnogi prostori imaju samo trivijalne svežnjeve.

Primjer 2.3 (i) Najjednostavniji primjer netrivijalnog (realnog) vektorskog svežnja je Möbiusova vrpca, dobivena iz $[0,1] \times \mathbb{R}$ identificikacijom $(0, x)$ sa $(1, -x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. To je vektorski svežanj nad kružnicom S^1.

(ii) Drugi primjer zanimljivog netrivijalnog vektorskog svežnja je tangencijalni svežanj 2-sfere S^2.

Nije uvijek lako prepoznati je li dani svežanj trivijalan. U slučajevima (i) i (ii) primjera 2.3, netrivijalnost se može najlakše vidjeti ako pogledamo prereze svežnja.

Prerez svežnja E nad X je neprekidna funcija $s : X \to E$ takva da je $s(x) \in E_x$, za sve $x \in X$. Trivijalni svežanj ima mnogo globalnih netrivijalnih prereza, npr. konstantni prerezi. No, Möbiusova vrpca i TS^2 nemaju globalne netrivijalne prereze. Naime, za tangencijalne svežnjeve prerezi odgovaraju vektorskim poljima na mnogostrukostima, a poznato je da S^2 nema globalnih netrivijalnih vektorskih polja.

S $\Gamma(E)$ označavamo skup svih prereza od E.
Ako je E vektorski svežanj nad X i $\phi : Y \to X$ neprekidna funkcija, tada definiramo novi vektorski svežanj, $\phi^*(E)$ nad Y, s

$$\phi^*(E) = \{(y, e) \in Y \times E : \phi(y) = p(e)\}. \tag{1}$$

$\phi^*(E)$ nazivamo **povlačenje** od E s ϕ.
Postoje mnoge operacije koje se mogu upotrebljavati da iz danih vektorskih svežnjeva nad X formiramo nove vektorske svežnjeve nad X. Za našu upotrebu, najvažnija od svih tih operacija je tzv. **Whitneyeva suma**. Za dane svežnjeve E i F nad X s projekcijama p i q, respektivno, Whitneyeva suma, u oznaci $E \oplus F$, definira se kao povlačenje od $E \times F$ s $f : X \to X \times X$ definiranom s $f(x) = (x, x)$. Znači:

$$E \oplus F = \{(e, f) \in E \times F : p(e) = q(f)\}.$$

Primijetimo da je suma n-dimenzionalnog i m-dimenzionalnog svežnja $(m + n)$-dimenzionalni svežanj, te da je suma dva trivijalna svežnja trivijalni svežanj.

Obzirom na Whitneyevu sumu, skup svih klasa izomorfizama kompleksnih vektorskih svežnjeva postaje komutativni monoid kojeg označavamo s $V_{\mathbb{C}}(X)$. Trivijalni svežnjevi formiraju podmonoid izomorfan s monoidom $(\mathbb{Z}_+, +)$. Jedinica u monoidu $V_{\mathbb{C}}(X)$ je (klasa) 0-dimenzionalnih trivijalnih svežnjeva. Neprekidno preslikavanje $\phi : Y \to X$ inducira homomorfizam $\phi^* : V_{\mathbb{C}}(X) \to V_{\mathbb{C}}(Y)$ (1), pa je $V_{\mathbb{C}}$ kontravarijantni funktor iz kategorije topoloških prostora u kategoriju Abelovih monoida. Slično, realni vektorski svežnjevi daju monoid $V_{\mathbb{R}}(X)$.

Postoje također tenzorski podukti i vanjski produkti svežnjeva, čime dobivamo dodatnu strukturu na $V_{\mathbb{F}}(X)$ ($\mathbb{F}$ je polje $\mathbb{C}$ ili $\mathbb{R}$). Nažalost, ne postoji način proširenja te dodatne strukture na nekomutativni slučaj, pa te operacije ostaju karakteristične za topološku K-teoriju.

Primjer 2.4 (*i*) Whitneyeva suma dvije Möbiusove vrpce je dvodimenzionalni trivijalni svežanj. $V_{\mathbb{R}}(S^1)$ je izomorfno s $\{0\} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}_2)$.

(*ii*) Iako je TS^2 netrivijalni dvodimenzionalni svežanj nad S^2, njegova suma s linijskim svežnjem je trivijalni trodimenzionalni svežanj. Zbog toga je $V_{\mathbb{R}}(S^2)$ komplicirani monoid koji nema **svojstvo pokrate**, tj. $x + z = y + z$ ne povlači $x = y$. Napomenimo da postoje kompaktne mnogostrukosti X (npr. 5-torus $\mathbb{T}^5$) za koje $V_{\mathbb{C}}(X)$ nema svojstvo pokrate.

(*iii*) Svaki kompleksni vektorski svežanj nad S^2 je suma linijskog svežnja i $V_{\mathbb{C}}(S^2) \cong \{0\} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$.

Ako je X kompaktan Hausdorffov prostor vrijedi slijedeći bitni teorem.

Teorem 2.5 (Swan) *Bilo koji vektorski svežanj E nad kompaktnim Hausdorffovim prostorom je direktni sumand trivijalnog svežnja. Drugim riječima, postoji vektorski svežanj F takav da je $E \oplus F$ trivijalni svežanj.*

Za definiciju K^0-grupe treba nam Grothendieckova konstrukcija:

Definicija 2.6 Neka je $(S,+)$ Abelova polugrupa (koja ne mora nužno imati jedinicu). **Grothendieckova grupa** $G(S)$ je Abelova grupa koja je kao skup jednaka $S \times S/\sim$, gdje je $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ ako postoji $z \in S$ takav da je $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$. Grupovna operacija je dana s $[x_1, y_1] + [x_2, y_2] := [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$ i inverzom $-[x, y] = [y, x]$. Obično pišemo $[x] - [y] := [x, y]$. **Grothendieckovo preslikavanje** $\gamma_S : S \to G(S)$ definirano je s $\gamma_S(x) := [x+y, y]$, za proizvoljno $y \in S$. To preslikavanje ne ovisi o izboru y i ono je homomorfizam Abelovih polugrupa.

Notacija "formalnih razlika" $[x]-[y]$ motivirana je jednostavnim primjerom konstrukcije Grothendieckove grupe monoida $(\mathbb{N}, +)$; imamo $G(\mathbb{N}, +) = \mathbb{Z}$. Taj nam primjer nažalost krivo sugerira da je γ_S automatski injekcija, što je slučaj ako i samo ako S ima svojstvo pokrate. Osnovna svojstva konstrukcije Grothendieckove grupe dana su slijedećom propozicijom:

Propozicija 2.7 *Konstrukcija Grothendieckove grupe ima slijedeća svojstva*

(i) ***Univerzalnost:*** *Neka je S Abelova polugrupa, neka je H Abelova grupa, te neka je $\varphi : S \to G$ homomorfizam Abelovih polugrupa. Tada postoji jedinstveni homomorfizam $\psi : G(S) \to H$ tako da slijedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\gamma_S"'] & H \\ & G(S) \arrow[u, "\exists! \psi"'] \end{tikzcd}$$

(ii) ***Funktorijalnost:*** *Ako je $\varphi : S \to T$ homomorfizam Abelovih polugrupa, tada postoji jedinstveni homomorfizam grupa $G(\varphi) : G(S) \to G(T)$ takav da dijagram*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & T \arrow[d, "\gamma_T"] \\ G(S) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(T) \end{tikzcd}$$

komutira. Eksplicitno, imamo $G(\varphi)([x, y]_S) = [\varphi(x), \varphi(y)]_T$.

(iii) $G(S) = \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : \ x, y \in S\}$.

(iv) *Neka su x, y elementi iz S. Tada je $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$ ako i samo ako je $x + z = y + z$, za neko $z \in S$*

(v) *Grothendieckovo preslikavanje $\gamma_S : S \to G(S)$ je injektivno ako i samo ako S ima svojstvo pokrate.*

(*vi*) *Neka je* $(H,+)$ *Abelova grupa i neka je* $S \subset H$ *neprazni podskup. Ako je* S *stabilan pod operacijom zbrajanja, tada vrijedi:* $(S,+)$ *Abelova polugrupa sa svojstvom pokrate,* $G(S)$ *je izomorfna s podgrupom* $H_0 \leq H$ *generiranom s* S *i* $H_0 = \{x - y : x, y \in S\}$.

Napomena 2.8 Grothendieckovu grupu možemo konstruirati i na slijedeći način:
Neka je $\mathbb{Z}(S)$ slobodna Abelova grupa nad skupom S i neka je $M(S)$ podgrupa od $\mathbb{Z}(S)$ generirana elementima oblika $x+y-(x\oplus y)$, gdje $\oplus$ označava zbrajanje u $\mathbb{Z}(S)$. Tada je $G(S) \cong \mathbb{Z}(S)/M(S)$.

Definicija 2.9 Ako je X kompaktan Hausdorffov prostor, tada je $K^0(X) = K^0_{\mathbb{C}}(X) := G(V_{\mathbb{C}}(X))$ Grothendieckova grupa od $V_{\mathbb{C}}(X)$. Analogno, $K_{\mathbb{R}}(X)$ je Grothendieckova grupa od $V_{\mathbb{R}}(X)$.

Napomena 2.10 Može se pokazati da su dvije klase $[E]$ i $[F]$ jednake u $K^0(X)$ ako i samo postoji $n \in \mathbb{Z}_+$ takav da je

$$E \oplus \theta^n \cong F \oplus \theta^n,$$

gdje je θ^n trivijalni n-dimenzionalni vektorski svežanj. Za takva dva svežnja E i F kažemo da su **stabilno ekvivalentni**.

Napomena 2.11 Primijetimo da je K^0 kontravarijantni funktor iz kategorije kompaktnih Hausdorffovih prostora u kategoriju Abelovih grupa, jer $K^0 = G \circ V_{\mathbb{C}}$.

Primjer 2.12 (*i*) Ako se prostor X sastoji od samo jedne točke, $X = \{*\}$, ili ako je $X = [0,1]$, tada je svaki svežanj nad X trivijalan; $V_{\mathbb{C}}(X) \cong V_{\mathbb{R}}(X) \cong \mathbb{Z}_+$, pa je $K^0(X) \cong K^0_{\mathbb{R}}(X) \cong \mathbb{Z}$. Primijetimo da je $[0,1]$ kontraktibilan. Ista stvar vrijedi i za bilo koji kontraktibilni prostor X (tj. $K^0(X) \cong \mathbb{Z}$). Kao što ćemo vidjeti, to je zato što je funktor K^0 homotopski invarijantan (vidi teorem 2.14).

(*ii*) $K^0_{\mathbb{R}}(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

(*iii*) $K^0(S^2) \cong \mathbb{Z}^2$.

Da teorija dobije svoj potpuni oblik, najprije moramo proširiti definiciju funktora K^0 na LCH-prostore. Napomenimo da ista definicija grupe $K^0(X)$ ima smisla i ako X nije kompaktan, ali pokazuje se da takva definicija nije od pretjerane koristi (vidi [7]). Zato postupamo na slijedeći način.
Za kompaktan Hausdorffov prostor X, preslikavanja $\pi : x \mapsto * : X \to \{*\}$ i $\iota : * \mapsto * : \{*\} \to X$ su neprekidna za sve $* \in X$ i $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{\{*\}}$. Po funktorijalnosti od K^0, inducirana preslikavanja zadovoljavaju $K^0(\iota) \circ K^0(\pi) = \mathrm{id}_{K^0(*)}$, pa je $K^0(\pi)$ injektivan. Zato $K^0(X)$ uvijek sadrži kopiju od $\mathbb{Z} \cong K^0(\{*\})$. Zbog toga, za $X \neq \emptyset$ definiramo **reduciranu K-grupu**, $\tilde{K}^0(X)$, tako da grupi $K_0(X)$ maknemo tu kopiju od $\mathbb{Z}$,

$$\tilde{K}^0(X) := K^0(X)/\mathrm{Im}((K^0(\pi)) \cong K^0(X)/\mathbb{Z}, \tag{2}$$

čime dobivamo kratki egzaktni niz (kraće, SES) Abelovih grupa

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \underset{K^0(\iota)}{\overset{K^0(\pi)}{\longleftrightarrow}} K^0(X) \xrightarrow{p} \tilde{K}^0(X) \longrightarrow 0,$$

koji je rascjepiv, tj. $K^0(\iota) \circ K^0(\pi) = \mathrm{id}_{K^0(X)}$. Ovdje je $p : K^0(X) \to \tilde{K}^0(X)$ kanonska projekcija. Slijedi da je

$$K^0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}^0(X) \quad i \quad \tilde{K}^0(X) \cong \mathrm{Ker}[K^0(X) \to \mathbb{Z}].$$

Primijetimo da je ta konstrukcija neovisna o odabiru točke $*$.
Sada, ako je X LCH-prostor koji nije kompaktan, s $\dot{X} = X \sqcup \{\infty\}$ označimo kompaktifikaciju jednom točkom i neka je $\pi : \dot{X} \to \{\infty\}$ projekcija. Tada definiramo

$$K^0(X) := \tilde{K}^0(\dot{X}) = K^0(\dot{X})/\mathrm{Im}(K^0(\pi)) \tag{3}$$

Napomena 2.13 Lako se vidi da ako je LCH-prostor X i kompaktan, da je tada $K^0(X) \cong \tilde{K}^0(\dot{X})$. Nadalje, K^0 ostaje funktorijalan, tj. on je funktor sa kategorije LCH-prostora u kategoriju Abelovih grupa.

Neka su nam dani kompaktni Hausdorffov prostor X i njegov zatvoreni potprostor $Y \subset X$. Budući da je $X \setminus Y$ LCH-prostor, sada znamo definirati i grupu $K^0(X \setminus Y)$. Naime,

$$K^0(X \setminus Y) = \tilde{K}^0(X \dot{\setminus} Y) = K^0(X/Y),$$

gdje je X/Y kvocjentni prostor, tj. prostor dobiven iz X urušavanjem potprostora Y u jednu točku. Očito je $X \dot{\setminus} Y \cong X/Y$. Prva bitna činjenica K-teorije je da su grupe $K^0(X)$, $K^0(Y)$ i $K^0(X \setminus Y)$ međusobno povezane egzaktnim nizom. Naime, inducirana preslikavanja među svežnjevima nad X, Y i $X \setminus Y$ induciraju egzaktni niz odgovarajućih K-grupa:

$$K^0(X \setminus Y) \longrightarrow K^0(X) \longrightarrow K^0(Y). \tag{4}$$

Općenito nije istina da je niz (4) SES.

Prisjetimo se, ako su X i Y topološki prostori i $f, g : Y \to X$ dva neprekidna preslikavanja, tada kažemo da su f i g **homotopna**, s oznakom $f \overset{h}{\sim} g$, ako postoji neprekidno preslikavanje $F : Y \times I \to X$, gdje je $I = [0,1]$, takvo da je $F_0 = F(\cdot, 0) = f$ i $F_1 = F(\cdot, 1) = g$. Nadalje, kažemo da su prostori X i Y **homotopski ekvivalentni**, ako postoje preslikavanja $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ takva da je $f \circ g \overset{h}{\sim} \mathrm{id}_Y$ i $g \circ f \overset{h}{\sim} \mathrm{id}_X$. Tada f i g zovemo **homotopskim ekvivalencijama**.

Teorem 2.14 (Homotopska invarijantnost) *Neka su X i Y lokalno kompaktni Hausdorffovi prostori i neka su $f, g : Y \to X$ prava neprekidna preslikavanja koja su homotopna. Tada su inducirana preslikavanja $K^0(f)$ i $K^0(g)$ ista, tj. $K^0(f) = K^0(g) : K^0(X) \to K^0(Y)$. Specijalno, ako su X i Y pravo homotopski ekvivalentni, tj. homotopske ekvivalencije su prava neprekidna preslikavanja, tada je $K^0(X) \cong K^0(Y)$.*

2.3 Algebarska formulacija K-teorije

Sada ćemo opisati put prevođenja K-teorije u algebarsku formu. Upravo takva interpretacija dat će nam motivaciju da definiramo K-teoriju za C^*-algebre. Osnovni rezultat koji će nam omogućiti prijelaz iz topologije u algebru je slijedeći fundamentalni teorem.

Teorem 2.15 (Serre-Swan) *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor i neka je $R := C(X)$ algebra neprekidnih kompleksnih funkcija na X. Ako s $Vec(X)$ označimo kategoriju kompleksnih vektorskih svežnjeva nad X i s $P(R)$ kategoriju konačno generiranih projektivnih $C(X)$-modula, onda su kategorije $Vec(X)$ i $P(R)$ ekvivalentne.*

Skica dokaza: Neka je E kompleksni vektorski svežanj nad X. Tada je skup svih prereza $\Gamma(E)$ prirodno snabdjeven strukturom modula nad algebrom $R = C(X)$. Ako je E trivijalni svežanj dimenzije n, tada se lako vidi da je $\Gamma(E)$ slobodni modul ranga n. Imamo $\Gamma(E \oplus F) \cong \Gamma(E) \oplus \Gamma(F)$. Po Swanovom teoremu (teorem 2.5), svaki vektorski svežanj je direktni sumand trivijalnog svežnja. Zato je $\Gamma(E)$ uvijek projektivni modul, tj. direktni sumand slobodnog modula. Koristeći kompaktnost od X, lokalnu trivijalnost od E i konačnu dimenzionalnost vlakana, lako se vidi da je modul $\Gamma(E)$ konačno generiran. Ako je $E : X \to F$ homomorfizam svežnjeva, tada je preslikavanje $\Gamma(f) : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$, definirano s $\Gamma(f)(s)(x) := f(s(x))$ homomorfizam $C(X)$-modula. Zbog toga je Γ funktor iz kategorije $Vec(X)$ u kategoriju $P(R)$.
Obratno, bilo koji konačno generirani projektivni modul nad R prirodno je izomorfan nekom modulu prereza nad R. To se najlakše može vidjeti ako identificiramo projektivne module sa idempotentima. Prisjetimo se da za element e prstena R kažemo da je *idempotent* ako je $e^2 = e$. Za svaki projektivni modul P nad prstenom s jedinicom R postoji R-modul Q takav da je $P \oplus Q \cong R^n$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Prsten endomorfizama slobodnog R-modula R^n je $M_n(R)$, algebra svih $n \times n$ matrica s vrijednostima iz R. Naime, imamo izomorfizam $\mathrm{End}_R(R^n) = \mathrm{Hom}_R(R^n, R^n) \cong M_n(R)$. Sada, svaka projekcija od $P \oplus Q$ na P nam daje idempotent $e \in M_n(R)$. Naravno, konstrukcija tog idempotenta ovisi o izboru cjepanja $P \oplus Q \cong R^n$. Neka je $P \oplus Q' \cong R^m$ neko drugo cjepanje i $f \in M_m(R)$ odgovarajući idempotent. Definirajmo homomorfizme $u \in \mathrm{Hom}_R(R^m, R^n)$ i $v \in \mathrm{Hom}_R(R^n, R^m)$ kao kompozicije

$$u : R^m \xrightarrow{\cong} P \oplus Q \longrightarrow P \longrightarrow P \oplus Q' \xrightarrow{\cong} R^n,$$

$$v : R^n \xrightarrow{\cong} P \oplus Q' \longrightarrow P \longrightarrow P \oplus Q \xrightarrow{\cong} R^m.$$

Imamo

$$uv = e \text{ i } vu = f \tag{5}$$

Općenitije, ako bilo koja dva idempotenta zadovoljavaju relaciju (5), onda kažemo da su oni **algebarski ekvivalentni**. Obratno, ako je e idempotent iz $M_n(R)$, tada množenje s e definira homomorfizam R- modula $P_e : x \mapsto ex : R^n \to R^n$. Ako stavimo $P := \mathrm{Im}(P_e)$, $Q := \mathrm{Ker}(P_e)$ i uvažimo uvjet idempotentnosti od e ($e^2 = e$), dobivamo dekompoziciju $P \oplus Q = R^n$, pa su P i Q projektivni moduli. Iz toga slijedi da su i konačno generirani. Nadalje, lako se vidi da dva algebarski ekvivalentna idempotenta definiraju izomorfne konačno generirane module.

Kako je $R = C(X)$, algebru $M_n(R)$ možemo identificirati s algebrom $C(X, M_n(\mathbb{C}))$ neprekidnih funkcija iz X u $M_n(\mathbb{C})$. Ako je e idempotent iz $C(X, M_n(\mathbb{C}))$, tada je e neprekidna funkcija sa X u skup idempotenata u $M_n(\mathbb{C})$. Tada formiramo svežanj E kao sliku tog idempotenta, tj.

$$E = \{(x, v) \in X \times \mathbb{C}^n : v \in \mathrm{Im}(e(x))\}$$

(Primijetimo da jedino lokalna trivijalnost netrivijalna tvrdnja za dokaz da je E zaista vektorski svežanj). Sada se lako pokaže da je $\Gamma(E) \cong P$. Uz malo više posla, pokaže se da je funktor Γ pun i vjeran, pa stoga definira ekvivalenciju kategorija. Tu se pozivamo na poznati teorem iz teorije kategorija, koji kaže da je funktor $\Phi : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ($\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ su kategorije) ekvivalencija kategorija ako i samo vrijedi: Φ je pun, vjeran i svaki objekt D iz $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ je izomorfan objektu oblika $\Phi(C)$, za neko C iz $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Za dokaz teorema vidi [19]. Za funktor $\Phi : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ kažemo da je *pun*, ako za svaki par objekata C, C' iz $\mathcal{C}$ i svaki morfizam $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(C), \Phi(C'))$ postoji morfizam $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$, takav da je $g = \Phi(f)$. Funktor $\Phi : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ je *vjeran*, ako za svaki par objekata C, C' iz $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ i svaki par morfizama $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$, jednakost $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$ povlači $f_1 = f_2$. ■

Neka je, i nadalje, X kompaktan Hausdorffov prostor i $R = C(X)$ C^*-algebra neprekidnih kompleksnih funkcija na X.
Kako su E i F izomorfni kao svežnjevi ako i samo ako su $\Gamma(E)$ i $\Gamma(F)$ izomorfni kao R-moduli, dobivamo izomorfizam monoida $V_{\mathbb{C}}(X)$ s monoidom klasa izomorfizama konačno generiranih projektivnih R-modula (operacija je standardna direktna suma). Vidjeli smo da svaki projektivni modul određuje jedinstveni idempotent iz $M_n(R)$, do na algebarsku ekvivalenciju, kao i obratno. S $I_n(R)$ označimo skup svih idempotenata iz $M_n(R) = M_n(C(X)) \cong C(X \to M_n(\mathbb{C}))$. Neka je

$$I_\infty(R) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n(R),$$

gdje s $\sqcup$ označavamo disjunktnu uniju. Na $I_\infty(R)$ definiramo relaciju $\overset{0}{\approx}$ na slijedeći način. Ako su $e \in I_n(R)$ i $f \in I_m(R)$, onda je $e \overset{0}{\approx} f$ ako i samo ako postoje $a \in M_{n,m}(R)$ i $b \in M_{m,n}(R)$ takvi da je $e = ab$ i $f = ba$, gdje smo s $M_{k,l}(R)$ označili skup svih pravokutnih $k \times l$ matrica s vrijednostima iz R. Primijetimo da tada možemo pretpostaviti da a i b zadovoljavaju $aba = a$ i $bab = b$, jer u protivnom napravimo zamijenu $a' := aba$ i $b' := bab$. Lako se vidi da je $\overset{0}{\approx}$ relacija ekvivalencije.
$I_\infty(R)$ tako postaje monoid, obzirom na operaciju

$$e \oplus f := \mathrm{diag}(e, f) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}, \quad e, f \in I_\infty(R).$$

Stavimo

$$V(R) := I_\infty(R) / \overset{0}{\approx} .$$

Za svako $e \in I_\infty(R)$, neka $[e]_V$ označava klasu ekvivalencije od e u $V(R)$. Tada se lako vidi da je operacija $+$ na $V(R)$, definirana s

$$[e]_V + [f]_V := [e \oplus f]_V, \quad e, f \in I_\infty(R)$$

dobro definirana i da je $(V(R), +)$ Abelova polugrupa.
Koristeći teorem 2.15, dobivamo izomorfizam monoida $V_{\mathbb{C}}(X)$ i $V(R)$. Tada definiramo **algebarsku K_0 grupu**, u oznaci $K_0^{\mathrm{alg}}(R)$, kao Grothendieckovu grupu od $V(R)$. Sada trivijalno imamo:

$$K_0^{\mathrm{alg}}(R) = K_0^{\mathrm{alg}}(C(X)) \cong K^0(X). \tag{6}$$

Budući da je $R = C(X)$ C^*-algebra, to su zbog izomorfizma $M_n(R) = M_n(C(X)) \cong C(X \to M_n(\mathbb{C}))$ sve $M_n(R)$ C^*-algebre. No, u C^*-algebri imamo pojam projektora. Prisjetimo se da ako je A (općenita) C^*-algebra, onda za element $p \in A$ kažemo da je projektor ako vrijedi $p^2 = p^* = p$. Skup svih projektora iz $M_n(A)$ označimo s $P_n(A)$ i neka je $P_\infty(A) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n(A)$. Kao i slučaju $A = C(X)$, skup svih idempotenata iz $M_n(A)$ označimo s $I_n(A)$ i $I_\infty(A) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n(A)$.

Propozicija 2.16 *Neka je A C^*-algebra s jedinicom. Tada vrijedi*

(i) Za svaki $e \in I_\infty(A)$ postoji projektor $p \in P_\infty(A)$ takav da je $p \overset{0}{\approx} e$.

(ii) Ako su $p \in P_n(A)$ i $q \in P_m(A)$ projektori, onda je $p \overset{0}{\approx} q$ ako i samo ako postoji element $v \in M_{n,m}(A)$ takav da je $v^*v = p$ i $vv^* = q$.

Skica dokaza: *(i)* Ako je $e \in M_n(A)$ i ako stavimo $h := 1_n + (e-e^*)(e-e^*)^*$, onda je h invertibilan i zadovoljava $eh = ee^*e = he$. Zato je $p = ee^*h^{-1}$ projektor. Budući da je $ep = p$ i $pe = e$, to je $e \overset{0}{\approx} p$.
(ii) Možemo pretpostaviti da su (dodavši nule ako je potrebno) p i q iz iste matrične algebre, npr. iz $M_n(A)$. Neka su $a, b \in M_n(A)$ takvi da je $p = ab$, $q = ba$, $a = aba$ (onda je $a = paq$), $b = bab$ (onda je $b = qbp$). Tada je $b^*b = (bab)^*b = (ab)^*b^*b = pb^*b$. Iz toga slijedi da b^*b pripada C^*-podalgebri $pM_n(A)p$ od $M_n(A)$. Budući da je $p = (ab)^*ab = b^*(a^*a)b \leq \|a\|^2 b^*b$, element b^*b je invertibilan u $pM_n(A)p$. Stavimo $v := bp(b^*b)^{-1/2}$. Direktnim računom dobivamo da je $p = v^*v$ i da vrijedi $bb^* = vb^*bv^*$.
Pokažimo da je $q = vv^*$. Iz definicije od v slijedi da je $v = qv$. Zbog toga imamo

$$vv^* = qvv^*q \leq \|v\|^2 q = q = baa^*b^* \leq \|a\|^2 bb^* = \|a\|^2 vb^*bv^* \leq \|a\|^2 \|b\|^2 vv^*.$$

Dakle, q i vv^* su projektori koji zadovoljavaju $vv^* \leq q \leq \|a\|^2\|b\|^2 vv^*$. Slijedi da je $vv^* = q$. ■

Napomena 2.17 Primijetimo da ako algebru $R = C(X)$ zamijenimo bilo kojom C^*-algebrom s jedinicom A (koja ne mora nužno biti komutativna), onda analognom konstrukcijom dobivamo Abelovu polugrupu, $V(A)$, klasa idempotenata iz $I_\infty(A)$ obzirom na algebarsku ekvivalenciju i algebarsku K_0 grupu od A, $K_0^{\mathrm{alg}}(A)$, kao Grothendieckovu grupu od $V(A)$.

Budući da je s projektorima lakše baratati nego s općenitim idempotentima (jer npr. na projektorima možemo koristiti funkcionalni račun), grupu K_0 za C^*-algebre definirat ćemo upravo u terminima klasa ekvivalencija projektora u matričnim algebrama. Nadalje, iz propozicije 2.16, dobit ćemo izomorfizam $K_0^{\mathrm{alg}}(A) \cong K_0(A)$ (vidi propoziciju 4.2).

3 Projektori i unitarni elementi u matričnim algebrama

Kao što smo u prošloj točki napomenuli, grupu $K_0(A)$ ćemo definirati u teminima klasa ekvivalencija projektora u matričnim algebrama. Nadalje, u idućim poglavljima, grupu $K_1(A)$ ćemo definirati u terminima klasa ekvivalencija unitarnih elemenata u matričnim algebrama. Da bi riječ "unitaran" uopće i imala smisao, danoj C^*-algebri morat ćemo dodati jedinicu, ukoliko ju ona ne posjeduje. Zato ovo poglavlje posvećujemo unitarnim elementima i projektorima.

3.1 Matrične algebre

Za svaku C^*-algebru A i za svaki prirodni broj n, s $M_n(A)$ označavamo skup svih $n \times n$ matrica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gdje su sve matrične vrijednosti a_{ij} iz A. $M_n(A)$ snabdijevamo uobičajenim operacijama: zbrajanjem, množenjem skalarom i množenjem matrica, na očit način. Time $M_n(A)$ postaje algebra. Ako definiramo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix},$$

$M_n(A)$ postaje $*$-algebra. Da definiramo C^*-normu na $M_n(A)$, izaberimo Hilbertov prostor H i vjernu (injektivnu) reprezentaciju $\varphi : A \to B(H)$. Neka je $\varphi_n : M_n(A) \to B(H^n)$ definiran s

$$\varphi_n \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \varphi(a_{1i})\xi_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \varphi(a_{ni})\xi_i \end{pmatrix}, \ \xi_j \in H.$$

Na $M_n(A)$ sada definiramo normu s

$$\|a\| := \|\varphi_n(a)\|_{B(H^n)}, \ a \in M_n(A).$$

Primijetimo da je ovako definirana norma zaista C^*-norma. Naime, jedino što zapravo trebamo provjeriti je da je $(M_n(A), \|\cdot\|)$ Banachov prostor.

Propozicija 3.1 *Vrijedi slijedeća nejednakost*

$$\max_{i,j}\{\|a_{ij}\|\} \leq \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\| \leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|. \tag{7}$$

Dokaz: Neka je $\varphi : A \to B(H^n)$ vjerna reprezentacija C^*-algebre A na Hilbertovom prostoru H. Budući je ona automatski izometrija, možemo pretpostaviti da je $A \subset B(H)$ i da su φ_n inducirani tom inkluzijom. Neka je $a = (a_{ij}) \in M_n(A)$ i $v = (v_i) \in H^n$ takav da je $\|v\| = (\sum_{i=1}^n \|v_i\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1$. Tada imamo:

$$\|av\| = (\sum_{i=1}^n \| \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|\|v_j\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|.$$

Za drugu nejednakost, pretpostavimo da je $v \in H$ sa $\|v\| \leq 1$. Neka je $E_j(v)$ vektor iz H^n čija je j-ta komponenta jednaka v, a sve ostale komponente su jednake nuli. Za $i, j = 1, \ldots n$ imamo:

$$\|a_{ij}v\| \leq (\sum \|a_{ij}v\|)^{\frac{1}{2}} = \|aE_j(v)\| \leq \|a\|.$$

Zbog toga je $\|a_{ij}\| \leq \|a\|$ za sve $i, j = 1 \ldots n$, pa dobivamo i drugu nejednakost. ■

Koristeći nejednakost (7) direktno dobivamo da je svaki Cauchyev niz u $M_n(A)$ nužno konvergentan, pa $M_n(A)$ zaista dobiva strukturu C^*-algebre. Kako je norma na C^*-algebri jedinstvena, slijedi da norma na $M_n(A)$ ne ovisi o izboru reprezentacije φ.
Primijetimo da iz gornje nejednakosti specijalno slijedi da je funkcija $f : X \to M_n(A)$ neprekidna (X je topološki prostor) ako i samo ako su sve koordinatne funkcije $f_{ij} : X \to A$ neprekidne. Za dijagonalnu matricu često ćemo kraće pisati:

$$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Napomena 3.2 Formiranje matričnih algebri je funktorijalno, u slijedećem smislu: Ako je $\varphi : A \to B$ $*$-homomorfizam, tada je preslikavanje $\varphi_n : M_n(A) \to M_n(B)$ dano s

$$\varphi_n \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \cdots & \varphi(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(a_{n1}) & \cdots & \varphi(a_{nn}) \end{pmatrix}$$

$*$-homomorfizam za sve $n \in \mathbb{N}$. Napomenimo da ćemo često ispuštati indeks n i pisati φ umjesto φ_n.

3.2 Unitarni elementi

Ako je X topološki prostor, tada kažemo da su točke $a, b \in X$ **homotopne** u X, u oznaci $a \overset{h}{\sim} b$, ako postoji **put** v u X od a do b, odnosno, ako postoji neprekidna funkcija $v : \mathrm{I} = [0,1] \to X$ takva da je $v(0) = a$ i $v(1) = b$. Relacija $\overset{h}{\sim}$ je očigledno relacija ekvivalencija na X. Put v ćemo često označavati s $t \mapsto v(t)$, ili s $t \mapsto v_t$ i smatrat ćemo da se podrazumjeva da t pripada segmentu $\mathrm{I} = [0,1]$.

Ako je $X = A$, gdje je A C^*-algebra, često ćemo put v zvati i homotopijom od a do b. Naime, ako je A komutativna, onda na A možemo gledati kao na funkcijsku algebru $A = C(X)$, za neki LCH-prostor X. Tada su a i b funkcije i koristeći standardnu identifikaciju $C(\mathrm{I} \to C(X)) \cong C(\mathrm{I} \times X)$ dobivamo da je v zaista homotopija od a do b, u klasičnom smislu.
Primijetimo da je nužno istaknuti ambijent u kojem su su a i b homotopne, u našem slučaju to je prostor X. Naime, ako opet uzmemo $X = A$, gdje je A C^*-algebra, onda su bilo koja dva elementa $a, b \in A$ homotopna. Zaista, put $t \mapsto (1-t)a + tb$ je tražena homotopija od a do b. No vidjet ćemo da dva projektora iz A ne moraju nužno biti homotopni u skupu svih projektora iz A. Kada će iz konteksta biti jasno da je $a \overset{h}{\sim} b$ u X, često ćemo samo pisati $a \overset{h}{\sim} b$.

Definicija 3.3 Neka je A C^*-algebra s jedinicom. Prisjetimo se da za element $u \in A$ kažemo da je **unitaran** ako je $uu^* = u^*u = 1$. S $U(A)$ označavamo grupu unitarnih elemenata iz A. Kako je $U(A)$ ujedno i topološki prostor (s topologijom induciranom iz norme), imamo relaciju ekvivalencije $\overset{h}{\sim}$ na $U(A)$. Nadalje, s $U(A)_0$ ćemo označavati skup svih elemenata iz $U(A)$ koji su homotopni s jedinicom u $U(A)$.

Napomena 3.4 Ako je A C^*-algebra s jedinicom i $u_1, v_1, u_2, v_2 \in U(A)$ takvi da je $u_1 \overset{h}{\sim} v_1$ i $u_2 \overset{h}{\sim} v_2$, tada je $u_1u_2 \overset{h}{\sim} v_1v_2$. Zaista, ako su $t \mapsto w_j(t)$, putevi od u_j do v_j, $j = 1, 2$, tada je $t \mapsto w_1(t)w_2(t)$ put u G od u_1u_2 do v_1v_2. Specijalno, $U(A)_0$ je stabilan obzirom na množenje.

Lema 3.5 *Neka je A C^*-algebra s jedinicom.*

(i) Za svaki hermitski element $a \in A$, $\exp(ih)$ pripada skupu $U(A)_0$.

(ii) Ako je $u \in A$ unitarni element čiji je spektar pravi podskup jedinične kružnice $\mathbb{T} = S^1$, onda u pripada skupu $U(A)_0$.

(iii) Ako su $u, v \in A$ unitarni elementi s $\|u - v\| < 2$, tada je $u \overset{h}{\sim} v$.

Dokaz: *(i)* Iz neprekidnog funkcionalnog računa slijedi da je za neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ i za hermitski element a nužno $f(a)^* = \overline{f(a)} = f^{-1}(a)$. Zbog toga je $f(a)$ unitaran, pa je posebno i $\exp(ia)$ unitaran. Za svako $t \in \mathrm{I}$ definirajmo funkcije $t \mapsto f_t : \mathrm{I} \to A$, gdje je $f_t(x) = \exp(itx)$. Kako je $t \mapsto f_t$ neprekidno, to je $t \mapsto f_t(a)$ zapravo put u $U(A)$. Zato je $\exp(ia) = f_1(a) \overset{h}{\sim} f_0(h) = 1$.
(ii) Ako je $\sigma(u) \neq \mathbb{T}$, tada postoji grana kompleksnog logaritma ln definirana na čitavom $\sigma(u)$. Stavimo $a := -i \ln(u)$. Tada je $u = \exp(ia)$, pa tvrdnja slijedi iz *(i)*.
(iii) Ako je $\|u - v\| < 2$, tada $\|v^*u - 1\| = \|v^*(u - v)\| < 2$, jer svaki unitarni element ima normu 1. Slijedi da -2 nije element od $\sigma(v^*u - 1)$. To pokazije da -1 nije element od $\sigma(v^*u)$. Koristeći *(ii)* zaključujemo da je $v^*u \overset{h}{\sim} 1$, pa je zato i $u \overset{h}{\sim} v$. ■

Kako svaki element u $M_n(\mathbb{C})$ ima konačan spektar, iz leme 3.5 *(ii)* slijedi da je $U(M_n(\mathbb{C}))_0 = U(M_n(\mathbb{C}))$. Time smo dokazali slijedeći korolar.

Korolar 3.6 *Unitarna grupa $U(M_n(\mathbb{C}))$ je putevima povezana, tj. $U(M_n(\mathbb{C}))_0 = U(M_n(\mathbb{C}))$.*

Ako je A C^*-algebra s jedinicom, tada s $U_n(A)$ označimo grupu $U(M_n(A))$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Kao i prije, ponekad ćemo umjesto $U_1(A)$ kraće pisati $U(A)$.

Lema 3.7 (Whitehead) *Neka je A C^* algebra s jedinicom i $u, v \in A$ unitarni elementi. Tada je*

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \overset{h}{\sim} \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{h}{\sim} \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{h}{\sim} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \text{ u } U_2(A).$$

Specijalno je

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \overset{h}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ u } U_2(A).$$

Dokaz: Iz leme 3.5 (ii) dobivamo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{h}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zato je

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{h}{\sim} \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ostale tvrdnje dobivamo sličnim argumentom. ■

Propozicija 3.8 *Neka je A C^*-algebra s jedinicom.*

(i) *$U(A)_0$ je normalna podgrupa od $U(A)$.*

(ii) *$U(A)_0$ je otvorena i zatvorena podgrupa od $U(A)$.*

(iii) *Element $u \in A$ pripada $U(A)_0$ ako i samo ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i hermitski elementi $h_1, h_2, \ldots, h_n \in A$ takvi da je*

$$u = \exp(ih_1) \cdot \exp(ih_2) \cdots \exp(ih_n).$$

Dokaz: (i) Po napomeni 3.4, $U(A)_0$ je stabilna obzirom na množenje. Moramo još pokazati da za $u \in U(A)_0$ i za sve $v \in U(A)$ slijedi da su u^{-1} i vuv^* također elementi iz $U(A)_0$. Neka je zato $t \mapsto w_t$ put u $U(A)$ od 1 do u. Tada su $t \mapsto w_t^{-1}$ i $t \mapsto vw_tv^*$ putevi u $U(A)$ od 1 do u^{-1} i od 1 do vuv^*, respektivno. Time smo dokazali (i).
Označimo sa G skup svih elemenata iz A koji su oblika

$$\exp(ih_1) \cdot \exp(ih_2) \cdots \exp(ih_n),$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $h_1, h_2, \ldots, h_n$ hermitski elementi iz A. Iz (i) i iz leme 3.5 (i) slijedi da je G sadržano u $U(A)_0$. Budući da je $\exp(ih)^{-1} = \exp(-ih)$ za svaki hermitski element h, slijedi da je G grupa. Uzmimo elemente $u \in U(A)$ i $v \in G$ takve da je $\|u - v\| < 2$. Tada je $\|1 - uv^*\| = \|u - v\| < 2$, pa iz dokaza od (ii) leme 3.5 slijedi da je $uv^* = \exp(ih)$ za neki hermitski element $h \in A$. Zbog toga je $u = \exp(ih)v$, pa je u element iz G. To nam pokazuje da je G otvorena podgrupa od $U(A)$. Komplement $U(A) \setminus G$ možemo napisati kao disjunktnu uniju desnih klasa Gu:

$$U(A) \setminus G = \bigsqcup_{u \in U(A)} Gu.$$

Svaka desna klasa Gu je očito homeomorfna s G, pa je zato i otvorena (obzirom na relativnu topologiju od $U(A)$). Zbog toga je G zatvorena podgrupa od $U(A)$.
Sve zajedno, imamo slijedeće: G je neprazan podskup od $U(A)_0$, G je otvorena i zatvorena podgrupa od $U(A)$ i $U(A)_0$ je putevima povezana. Zbog toga mora biti $G = U(A)_0$, pa direkto dobivamo (ii) i (iii). ■

Definicija 3.9 *Neka su A i B C^*-algebre i $\varphi : A \to B$ surjektivni $*$-homomorfizam. Neka je dan element $b \in B$. Ako je $a \in A$ takav da je $\varphi(a) = b$, tada kažemo da je a **lift** od b. Ponekad ćemo reći da se b **podiže** do a.*

Lema 3.10 *Neka su A i B C^*-algebre s jedinicom i neka je $\varphi : A \to B$ surjektivni, pa onda i unitalni, $*$-homomorfizam.*

(i) $\varphi(U(A)_0) = U(B)_0$. Specijalno, svaki unitarni element $u \in U(B)_0$ ima unitarni lift do $v \in U(A)_0$.

(ii) Za svaki $u \in U(B)$ postoji $v \in U_2(A)_0$ takav da je

$$\varphi_2(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix},$$

gdje je $\varphi_2 : M_2(A) \to M_2(B)$ preslikavanje inducirano s φ (napomena 3.2).

(iii) Ako je $u \in B$ unitarni element i ako postoji unitarni element $v \in A$ takav da je $u \overset{h}{\sim} \varphi(v)$, tada je $u \in \varphi(U(A))$, tj. u se podiže do unitarnog elementa u A.

Dokaz: (i) Ako je $*$-homomorfizam unitalan, onda on preslikava unitarne elemente u unitarne elemente. Kako je svaki $*$-homomorfizam automatski neprekidan, odmah dobivamo da je $\varphi(U(A)_0)$ sadržano u $U(B)_0$. Obratno, ako je $u \in U(B)_0$, tada je po propoziciji 3.8

$$u = \exp(ih_1) \cdot \exp(ih_2) \cdots \exp(ih_n),$$

za neke hermitske elemente h_j, $j = 1, \dots n$, iz B. Budući da je φ surjektivan, postoje elementi $x_j \in A$ takvi da je $\varphi(x_j) = h_j$. stavimo $k_j := (x_j + x_j^*)/2$. Tada su k_j hermitski elementi i $\varphi(k_j) = h_j$. Ako stavimo

$$v := \exp(ik_1) \cdot \exp(ik_2) \cdots \exp(ik_n),$$

onda po propoziciji 3.8 (iii), v pripada $U(A)_0$. Iz neprekidnog funkcionalnog računa slijedi da je

$$\exp \circ \varphi = \varphi \circ \exp,$$

jer, kako je φ multiplikativan, on komutira s polinomima, pa komutira i s exp. Zbog toga je $\varphi(v) = u$. Time smo dokazali (ii).
(ii) slijedi direktno iz (i) i leme 3.7.
(iii) Ako je $u \overset{h}{\sim} \varphi(v)$, tada je $u\varphi(v^*)$ element iz $U(B)_0$, pa je po (i), $u\varphi(v^*) = \varphi(w)$ za neko $w \in U(A)_0$. Sada dobivamo $u = \varphi(wv)$ i time smo dokazali (iii). ■

Neka je A C^*-algebra. Grupu svih invertibilnih elemenata iz A označavamo s $\mathrm{GL}(A)$ i skup svih elemenata iz $\mathrm{GL}(A)$ koji su homotopni s 1_A označavamo s $\mathrm{GL}(A)_0$. Očigledno je grupa $U(A)$ podgrupa grupe $\mathrm{GL}(A)$.

Za svaki element $a \in A$ stavimo $|a| := (a^*a)^{1/2}$. Element $|a|$ zovemo **apsolutna vrijednost** od a.

Propozicija 3.11 *Neka je A C^*-algebra s jedinicom.*

(i) *Ako je $z \in A$ invertibilan, tada je i $|z|$ invertibilan i $\omega(z) := z|z|^{-1}$ je unitarni element. Očigledno je $z = \omega(z)|z|$.*

(ii) *Preslikavanje $\omega : \mathrm{GL}(A) \to U(A)$, definirano kao u (i), je neprekidno, $\omega(u) = u$ za sve $u \in U(A)$ i $\omega(z) \overset{h}{\sim} z$ u $\mathrm{GL}(A)$ za svaki $z \in \mathrm{GL}(A)$.*

(iii) *Ako su $u, v \in U(A)$ i ako je $u \overset{h}{\sim} v$ u $\mathrm{GL}(A)$, tada je i $u \overset{h}{\sim} v$ u $U(A)$.*

Za dokaz tvrdnje (ii) trebat ćemo slijedeći rezultat.

Lema 3.12 *Neka je $K \subset \mathbb{R}$ neprazan i kompaktan podskup i neka je $f : K \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Neka je A C^*-algebra s jedinicom i neka je Ω_K skup svih hermitskih elemenata iz A čiji je spektar sadržan u K. Tada je (inducirano) preslikavanje*

$$f : \Omega_K \to A, \qquad a \mapsto f(a),$$

neprekidno.

Dokaz: Preslikavanje $a \mapsto a^n : A \to A$ je neprekidno za svako $n \geq 0$ (budući da je množenje neprekidno). Zbog toga svaki (kompleksni) polinom f inducira neprekidno preslikavanje $a \mapsto f(a) : A \to A$.
Neka je sad $f : K \to \mathbb{C}$ bilo koja neprekidna funkcija, neka je a element iz Ω_K i neka je $\varepsilon > 0$. Po Stone-Weierstrassovom teoremu, postoji polinom g takav da je $|f(z) - g(z)| \leq \varepsilon/3$ za sve $z \in K$. Neka je $\delta > 0$ takav da je $\|g(a) - g(b)\| \leq \varepsilon/3$, za svaki element $b \in A$ za kojeg je $\|a - b\| \leq \delta$. Kako je

$$\|f(c) - g(c)\| = \|(f - g)(c)\| = \sup\{|(f - g)(z)| : z \in \sigma(c)\} \leq \varepsilon/3$$

za sve $c \in \Omega_K$, to je $\|f(a) - f(b)\| \leq \varepsilon$ za sve $b \in \Omega_K$ za koje je $\|a - b\| \leq \delta$. ■

Dokaz propozicije 3.11: (i) Ako je z invertibilan, tada je i z^* invertibilan (s inverzom $(z^{-1})^*$), pa je i z^*z invertibilan. Iz teorema o preslikavanju spektra slijedi da je i $|z| = (z^*z)^{1/2}$ invertibilan (s inverzom $((z^*z)^{-1})^{1/2}$). Stavimo $u := \omega(z) = z|z|^{-1}$. Tada je $z = u|z|$. Štoviše, u je invertibilan, budući da je produkt dva invertibilna elementa. Nadalje, $u^{-1} = u^*$, jer je

$$u^*u = |z|^{-1}z^*z|z|^{-1} = |z|^{-1}|z|^2|z|^{-1} = 1.$$

(ii) Množenje u C^*-algebri je neprekidno, kao i invertiranje $z \mapsto z^{-1} : \mathrm{GL}(A) \to \mathrm{GL}(A)$. Zbog toga, da dokažemo da je ω neprekidno, dovoljno je dokazati da je preslikavanje $a \mapsto |a|$ neprekidno. To preslikavanje je kompozicija preslikavanja $a \mapsto a^*a$ i preslikavanja $h \mapsto h^{1/2} : A^+ \to A^+$, gdje je A^+ konus pozitivnih elemenata iz A. Prvo od tih preslikavanja je neprekidno, budući da su involucija i množenje neprekidna preslikavanja. Zbog toga je dovoljno dokazati da je preslikavanje $h \mapsto h^{1/2} : A^+ \to A^+$ neprekidno na bilo kojem ograničenom podskupu $\Omega \subset A^+$. No, to slijedi iz leme 3.12, budući da je svaki ograničeni podskup Ω od A^+ sadržan u Ω_K, gdje je $K := [0, R]$ i $R := \sup\{\|h\| : h \in \Omega\}$.
Ako je u unitarni element iz A, tada je $|u| = 1$, pa je $\omega(u) = u$.
Neka je dan $z \in \mathrm{GL}(A)$. Definirajmo put $z_t := \omega(z)(t|z| + (1-t)1_A)$. Tada je $\omega(z) = z_0$ i $z = z_1$. Kako je $|z|$ pozitivan i invertibilan, postoji $\lambda \in \langle 0, 1]$ takav da je $|z| \geq \lambda 1_A$. Za svako $t \in [0,1]$ imamo $t|z| + (1-t)1_A \geq \lambda 1_A$. Zbog toga je $t|z| + (1-t)1_A$, pa onda i z_t invertibilan element, za svako $t \in \mathrm{I}$. Budući da je preslikavanje $t \mapsto z_t$ neprekidno, imamo $\omega(z) = z_0 \overset{h}{\sim} z_1 = z$ u $\mathrm{GL}(A)$.
(iii) Ako je $t \mapsto z_t$ homotopija u $\mathrm{GL}(A)$ od u do v, tada je $t \mapsto \omega(z_t)$ homotopija u $U(A)$ od u do v. ■

Napomena 3.13 Tvrdnja *(ii)* iz propozicije 3.11 nam zapravo govori da je $U(A)$ deformacioni retrakt od $\mathrm{GL}(A)$. Prisjetimo se da za potprostor X_0 topološkog prostora X kažemo da je **deformacioni retrakt** od X, ako postoji neprekidno preslikavanje $\tau : X \to X_0$ takvo da je $x \overset{h}{\sim} \tau(x)$ u X, za sve $x \in X$ i $\tau(x) = x$, za sve $x \in X_0$.

Definicija 3.14 Faktorizaciju $z = \omega(z)|z|$ iz propozicije 3.11 invertibilnog elementa z zovemo **(unitarna) polarna dekompozicija** od z. Često ćemo umjesto $\omega(z)$ pisati u. Dakle, za svaki invertibilni element z iz C^*-algebre s jedinicom A postoji jedinstveni unitarni element u takav da je $z = u|z|$.

Pri kraju ove točke, prisjetimo se da, ako je A C^*-algebra s jedinicom i $a \in A$ takav da je $\|1_A - a\| < 1$, onda je a invertibilan i njegov inverz je dan konvergentnim redom (tzv. Carl Neumannovim redom):

$$a^{-1} = 1_A + (1_A - a) + (1_A - a)^2 + (1_A - a)^3 + \cdots . \tag{8}$$

Posebno, normu od a^{-1} možemo aproksimirati s

$$\|a^{-1}\| \leq 1 + \|1_A + a\| + \|1_A - a\|^2 + \|1_A - a\|^3 + \cdots = (1 - \|1_A - a\|)^{-1}. \tag{9}$$

Propozicija 3.15 *Neka je A C^*-algebra s jedinicom i neka je $a \in \mathrm{GL}(A)$. Neka je $b \in A$ takav da je $\|a - b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Tada je b invertibilan i*

$$\|b^{-1}\|^{-1} \geq \|a^{-1}\|^{-1} - \|a - b\|.$$

Također je i $a \overset{h}{\sim} b$ *u* $\mathrm{GL}(A)$.

Dokaz: Iz ocjene

$$\|1_A - a^{-1}b\| = \|a^{-1}(a-b)\| \leq \|a^{-1}\|\|a-b\| < 1,$$

slijedi da je $a^{-1}b$ invertibilan. Zbog (9) imamo

$$\|(a^{-1}b)^{-1}\| \leq (1 - \|1_A - a^{-1}b\|)^{-1}.$$

To povlači da je b invertibilan s inverzom $b^{-1} = (a^{-1}b)^{-1}a^{-1}$ i

$$\|b^{-1}\|^{-1} \geq \|(a^{-1}b)^{-1}\|^{-1}\|a^{-1}\|^{-1} \geq (1 - \|1_A - a^{-1}b\|)\|a^{-1}\|^{-1} \geq \|a^{-1}\|^{-1} - \|a-b\|.$$

Da dokažemo zadnju tvrdnju, definirajmo put $c_t := (1-t)a + tb$. Tada je $\|a - c_t\| = t\|a - b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, pa je po prvom dijelu dokaza c_t invertibilno za svako $t \in \mathrm{I}$. Iz toga slijedi da je $a = c_0 \overset{h}{\sim} c_1 = b$ u $\mathrm{GL}(A)$. ■

3.3 Projektori

Definicija 3.16 Prisjetimo se da za element $p \in A$ (A je C^*-algebra) kažemo da je projektor ako je $p^2 = p^* = p$. Skup svih projektora iz A označavamo s $P(A)$.

U komutativnom slučaju, $A = C(X)$ (X je kompaktan Hausdorffov prostor) posjeduje netrivijalne projektore, tj. projektore koji su različiti od 0 i 1, ako i samo ako je X nepovezan prostor. Naime, projektori u funkcijskim algebrama su upravo karakteristične funkcije χ_Y za neki $Y \subset X$, a takve funkcije nisu neprekidne ukoliko je X povezan (osim ako je $Y = X$ ili $Y = \emptyset$). S druge strane, čak i C^*-algebra $M_2(\mathbb{C})$ ima mnoštvo netrivijalnih projektora, kao što ćemo vidjeti u primjeru 3.17. Takvi su projektori, ako A ima jedinicu, sadržani i u $M_2(A)$, budući da imamo očito ulaganje $M_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow M_2(A)$ inducirano s $t \mapsto t1_A$, $t \in \mathbb{C}$. Štoviše, čak i ako A nema netrivijalnih projektora, $M_2(A)$ može posjedovati mnogo projektora koji nisu gornjeg oblika.

Primjer 3.17 Neka je $A = C(S^2)$, gdje je S^2 2-sfera. Za bilo koji prostor X možemo indetificirati $M_n(C(X))$ s $C(X, M_n(\mathbb{C}))$, gdje matricu (f_{ij}) funkcija $(f_{ij}) \in C(X)$ identificiramo s matričnom funkcijom $x \mapsto (f_{ij}(x))$. Slijedi da je f projektor u $M_n(C(X))$ ako i samo ako je matrica $f(x)$ projektor u $M_n(\mathbb{C})$ za svaki $x \in X$. Prelaskom na $X = S^2$ i $n = 2$, lako se pokaže da je svaki jednodimenzionalni projektor u $M_2(\mathbb{C})$ oblika:

$$p(x,y,z) := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x & y+iz \\ y-iz & 1-x \end{pmatrix}, \tag{10}$$

gdje su $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ takvi da je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Zbog toga su jednodimenzionalni projektori u $M_2(\mathbb{C})$ točno parametrizirani sa S^2, pa je posebno svaki projektor iz $M_2(C(S^2)) \cong C(S^2, M_2(\mathbb{C}))$

zapravo funkcija $\sigma \mapsto p(\sigma)$, $\sigma \in S^2$. Ukoliko napravimo standardnu identifikaciju $S^2 \cong \Sigma$, gdje je Σ Riemannova sfera, tada projektor $p(z)$, za $z \in \Sigma$, poprima oblik

$$p(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ z & |z|^2 \end{pmatrix} \; (z \neq \infty); \qquad p(\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Za fiksno $z \in \mathbb{C}$, $p(z) \in M_2(\mathbb{C})$ projicira kompleksnu ravninu na pravac kroz ishodište u smjeru vektora $(1, z)$, odnosno na točku $(0, 1)$ za $z = \infty$. Taj projektor igra veliku ulogu u K-teoriji.

Iz prošle točke slijedi da imamo relaciju homotopske ekvivalencije $\overset{h}{\sim}$ na $P(A)$. Također imamo i slijedeće dvije ekvivalencije na $P(A)$:

Definicija 3.18 Neka je A C^*-algebra. Za dva projektora $p, q \in A$ kažemo da su:

- **unitarno ekvivalentni**, u oznaci $p \overset{u}{\sim} q$, ako postoji unitarni element $u \in \dot{A}$ takav da je $q = upu^*$ (kao i prije, s $\dot{A}$ označavamo unitalizaciju od A, tj. C^*-algebru dobivenu dodavanjem jedinice C^*-algebri A).
- **Murray-von Neumann ekvivalentni**, u oznaci $p \overset{MvN}{\sim} q$, ako postoji $v \in A$ takav da je $v^*v = p$ i $vv^* = q$.

Napomena 3.19 Važnost MvN-ekvivalencije dolazi iz teorije von Neumannovih algebri, tj. od C^*- podalgebri od $B(H)$ koje su zatvorene u jakoj (operatorskoj) topologiji. Neka je $A = B(H)$ i $p, q \in A$ projektori. U propoziciji 3.30 (i) pokazat ćemo da je $p \overset{MvN}{\sim} q$ ako i samo ako je $\dim(pH) = \dim(qH)$, gdje obje strane mogu biti i beskonačne. U tom slučaju pH i qH su izomorfni Hilbertovi prostori, pa postoji unitarni operator $u : pH \to qH$. Ako definiramo $v : H \to H$ s $v = 0$ na $(pH)^\perp$ i s $v = u$ na pH, onda je $v \in A$ parcijalna izometrija i $v^*v = p$, $vv^* = q$. Obratno, ako je $v \in B(H)$ operator takav da je v^*v projektor, onda je nužno v parcijalna izometrija (u napomeni 3.21 ćemo pokazati da je onda nužno i vv^* projektor). Upravo ćemo tu karakterizaciju iskoristiti za definiciju pojma parcijalne izometrije u apstraktnoj C^*-algebri.

Definicija 3.20 Ako je A proizvoljna C^*-algebra, tada za element $v \in A$ kažemo da je **parcijalna izometrija** ako je v^*v projektor.

Napomena 3.21 Ako je $v \in A$ parcijalna izometrija, onda je nužno i vv^* projektor. Naime, ako stavimo $z = (1 - vv^*)v$, onda je $z^*z = 0$. Zato je $\|z\|^2 = \|z^*z\| = 0$, pa je $z = 0$. Zbog toga je $v = vv^*v$, pa iz toga direktno slijedi da je vv^* projektor. Ako stavimo $p := v^*v$ i $q = vv^*$, onda dobivamo slijedeće identitete:

$$v = qv = vp = qvp. \tag{12}$$

Propozicija 3.22 $\overset{MvN}{\sim}$ *je relacija ekvivalencije*

Dokaz: *Refleksivnost* je trivijalna jer je $p = pp^* = p^*p$.
Simetričnost: Neka je $p \overset{MvN}{\sim} q$. Tada postoji $x \in A$ takav da je $p = xx^*$ i $q = x^*x$. Iz $p = (x^*)^*x$ i $q = x^*(x^*)^*$ slijedi $p \overset{MvN}{\sim} q$.
Tranzitivnost: Neka su $p \overset{MvN}{\sim} q$ i $q \overset{MvN}{\sim} r$. Tada postoje $x, y \in A$ takvi da je $p = xx^*$, $q = x^*x$ i $q = yy^*$, $r = y^*y$. Ako stavimo $z := xy$ tada

$$zz^* = xyy^*x = xqx = x^*xx^*x = p^2 = p,$$

$$z^*z = y^*x^*xy = y^*qy = y^*yy^*y = r^2 = r.$$

Stoga je $p \overset{MvN}{\sim} q$. ■

Za dokaz od (*iii*) propozicije 3.24 trebat ćemo slijedeću lemu.

Lema 3.23 *Neka je A C^*-algebra s jedinicom i neka su $v_1, v_2, \dots, v_n \in A$ parcijalne izometrije. Pretpostavimo da vrijedi*

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^* v_j = 1_A = \sum_{j=1}^{n} v_j v_j^*.$$

Tada je element $\Sigma_{j=1}^n v_j$ unitaran.

Dokaz: Primijetimo da je lemu dovoljno dokazati za $n = 2$, jer tvrdnja onda trivijalno slijedi indukcijom.
Nadalje, primijetimo da ako su $p, q \in A$ projektori za koje je $p+q = 1$, onda su oni nužno ortogonalni ($pq = qp = 0$). Naime, imamo

$$pq = p(p+q)q = 2pq \;\Rightarrow\; pq = 0 \;\Rightarrow\; 0 = (pq)^* = q^*p^* = qp.$$

Neka su sada $v_1, v_2 \in A$ parcijalne izometrije za koje je

$$v_1^*v_1 + v_2^*v_2 = 1 = v_1v_1^* + v_2v_2^*$$

i stavimo $p_1 := v_1^*v_1$, $p_2 := v_2^*v_2$, $q_1 := v_1v_1^*$ i $q_2 := v_2v_2^*$. Tada je $p_1 \perp p_2$ i $q_1 \perp q_2$ i koristeći jednakosti (12) dobivamo

$$(v_1+v_2)(v_1+v_2)^* = v_1v_1^* + v_2v_1^* + v_1v_2^* + v_2v_2^* = v_1v_1^* + (v_2p_2)(v_1p_1)^* + (v_1p_1)(v_2p_2)^* + v_2v_2^*$$

$$= v_1v_1^* + \underbrace{v_2(p_2p_1)v_1^*}_{=0} + \underbrace{v_1(p_1p_2)v_2^*}_{=0} + v_2v_2^* = v_1v_1^* + v_2v_2^* = 1.$$

Analogno dobivamo $(v_1+v_2)^*(v_1+v_2) = 1$. ■

Propozicija 3.24 *Neka je A C^*-algebra s jedinicom i neka su $p, q \in B$ projektori. Tada su slijedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(*i*) $p \overset{u}{\sim} q$.

(ii) $q = upu^*$, *za neki unitarni element* $u \in A$.

(iii) $p \overset{MvN}{\sim} q$ i $1_A - p \overset{MvN}{\sim} 1_A - q$.

Dokaz: Neka je $1_{\dot{A}}$ jedinica od $\dot{A}$ i stavimo $f := 1_{\dot{A}} - 1_A = (-1_A, 1)$. Tada je $\dot{A} = A + \mathbb{C}f$ i $fa = af = 0$ za sve $a \in A$.
(i) $\Rightarrow$ (ii). Pretpostavimo da je $q = zpz^*$ za neko $z \in U(\dot{A})$. Tada je $z = u + \alpha f$, za neko $u \in A$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ i $u^*u = (z - \alpha f)^*(z - \alpha f) = 1_{\dot{A}} - f = 1_A$. Analogno dobivamo da je i $uu^* = 1_A$, pa je u unitaran.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Pretpostavimo da je $q = upu^*$, gdje je $u \in A$ unitaran. Ako stavimo $v := up$ i $w := u(1_A - p)$, onda imamo

$$p = v^*v, \quad q = vv^*, \quad 1_A - p = w^*w, \quad 1_A - q = ww^*. \tag{13}$$

Zbog toga je $p \overset{MvN}{\sim} q$ i $1_A - p \overset{MvN}{\sim} 1_A - q$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Pretpostavimo da je v parcijalna izometrija takva da vrijedi (13). Zbog leme 3.23, element $z := v + w + f$ je unitaran (u $\dot{A}$). Iz jednakosti (12) dobivamo da je $zpz^* = vpv^* = vv^* = q$. ■

Lema 3.25 *Neka je* A C^**-algebra, neka je* $a \in A$ *hermitski i neka je* $p \in A$ *projektor. Stavimo* $\delta := \|a - p\|$. *Tada je*

$$\sigma(a) \subseteq [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta].$$

Dokaz: Budući da je a hermitski, njegov spektar je realan. Spektar bilo kojeg idempotenta, pa specijalno i projektora, je sadržan u skupu $\{0, 1\}$. Naime, ako na polinom $P \in \mathbb{C}[z]$, $P(T) := z^2 - z$, primijenimo teorem o preslikavanju spektra, dobivamo:

$$P(\sigma(p)) = \sigma(P(z)) = \sigma(0) = \{0\}.$$

Kako su (sve) kompleksne nultočke polinoma P 0 i 1, imamo $\sigma(p) \subset \{0, 1\}$.
Zbog toga je dovoljno dokazati slijedeću tvrdnju: Ako je $s \in \mathbb{R}$ takav da je $d := d(\{0, 1\}, s) > \delta$, tada δ ne pripada $\sigma(a)$. Neka je stoga $s \in \mathbb{R}$ takav da je $d(s, \{0, 1\}) > \delta$. Zbog toga je $p - s1$ invertibilan u $\dot{A}$. Budući da je

$$\|(p - s1)^{-1}\| = \max\{|-s|^{-1}, |1 - s|^{-1}\} < 1/\delta,$$

imamo da je

$$\|(a - s1)(p - s1)^{-1} - 1\| \leq \|(p - s1)^{-1}\| \|a - p\| \leq 1.$$

Zbog toga su $(a - s1)(p - s1)^{-1}$ i $a - s1$ invertibilni, pa je tvrdnja dokazana. ■

Propozicija 3.26 *Neka je* A C^**-algebra i neka su* $p, q \in A$ *projektori. Tada vrijedi:*

(i) $\|p - q\| \leq 1$.

(*ii*) *Ako je* $p \perp q$ *(tj.* $pq = qp = 0$*) , tada je* $\|p - q\| = 1$

(*iii*) *Ako je* $\|p - q\| < 1$*, onda je* $p \overset{h}{\sim} q$.

Dokaz: (*i*) Možemo pretpostaviti da A ima jedinicu, jer u protivnom prijeđemo na C^*-algebru $\dot{A}$ (A je izometrički uložena u $\dot{A}$). Budući da je $p - q$ hermitski, postoji stanje ω na A takvo da je $|\omega(p - q)| = \|p - q\|$. Kako su p i q projektori iz A, oni su pozitivni, pa imamo $0 \leq \omega(p) \leq \|\omega\|\|p\| = 1$, $0 \leq \omega(q) \leq \|\omega\|\|q\| = 1$. Stoga je $\|p - q\| = |\omega(p - q)| = |\omega(p) - \omega(q)| \leq 1$.
(*ii*) Kako je $p \perp q$ ako i samo ako je $p + q$ projektor, za $p \neq 0$ ili $q \neq 0$ imamo $\|p - q\| = 1$. Sada je $\|p - q\|^2 = \|(p - q)^2\| = \|p + q\| = 1$.
(*iii*) Definirajmo $a_t := (1 - t)p + tq$. Tada je $t \mapsto a_t$ put hermitskih elemenata u A i imamo

$$\delta := \min\{\|a_t - p\|, \|a_t - q\|\} = \min\{t, 1 - t\}\|p - q\| \leq \|p - q\|/2 < 1/2.$$

Koristeći notaciju leme 3.12, svaki a_t je element skupa Ω_K, gdje je $K := [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta]$. Definirajmo funkciju $f : K \to \mathbb{C}$ na slijedeći način: $f = 0$ na $[-\delta, \delta]$ i $f = 1$ na $[1 - \delta, 1 + \delta]$. Budući da su segmenti $[-\delta, \delta]$ i $[1 - \delta, 1 + \delta]$ disjunktni, f je neprekidna. Budući da je i $f = \bar{f} = f^2$, slijedi da je $f(a_t)$ projektor za sve $t \in \mathrm{I}$. Po lemi 3.12, funkcija $t \mapsto f(a_t)$ je neprekidna, pa imamo

$$p = f(p) = f(a_0) \overset{h}{\sim} f(a_1) = f(q) = q \quad \text{u } P(A). \quad \blacksquare$$

Slijedeća lema je bitna, jer nam govori da su hermitski elementi a, b iz C^*-algebre s jedinicom slični ako i samo ako su unitarno ekvivalentni.

Propozicija 3.27 *Neka je* A C^**-algebra s jedinicom i neka su* $a, b \in A$ *hermitski elementi koji su slični, tj. postoji* $z \in GL(A)$ *takav da je* $b = zaz^{-1}$*. Nadalje, neka je* $z = u|z|$ *polarna dekompozicija od* z*, s* $u \in U(A)$*. Tada je* $b = uau^*$*.*

Dokaz: Jednakost $b = zaz^{-1}$ povlači da je $bz = za$, pa kako su a i b hermitski, to je i $z^*b = az^*$. Zbog toga je

$$|z|^2 a = (z^*z)a = z^*bz = a(z^*z) = a|z|^2,$$

pa a komutira s $|z|^2$. Zato a komutira i sa svim elementima iz $C^*(1, |z|^2)$ (za $S \subset A$, sa $C^*(S)$ označavamo C^*-podalgebru od A generiranu sa S). Specijalno, a komutira sa $|z|^{-1}$. Slijedi da je

$$uau^* = z|z|^{-1}au^* = za|z|^{-1}u^* = bz|z|^{-1}u^* = buu^* = b,$$

kao što smo i htjeli dokazati. $\blacksquare$

Propozicija 3.28 *Neka je* A C^**-algebra i neka su* p, q *projektori iz* A*. Tada je* $p \overset{h}{\sim} q$ *u* $P(A)$ *ako i samo ako postoji unitarni element* $u \in U(\dot{A})_0$ *takav da je* $q = upu^*$*.*

Dokaz: Tokom ovog dokaza, s 1 ćemo označavati jedinicu u $\dot{A}$.
Pretpostavimo da je $q = upu^*$ za neko $u \in U(\dot{A})_0$. Neka je $t \mapsto u_t$ put unitarnih elemenata u $\dot{A}$ od 1 do u. Budući da je A ideal u $\dot{A}$, preslikavanje $t \mapsto u_t p u_t^*$ je put projektora u A od p do q.
Obratno, pretpostavimo da je $p \overset{h}{\sim} q$. Primijetimo da tada postoje projektori $p = p_0, p_1, \ldots, p_n = q$ iz A, takvi da je $\|p_{j+1} - p_j\| < 1/2$ za svako j. Naime, to se trivijalno vidi, budući da je $\{p_t : t \in \mathrm{I}\}$ kompaktan potprostor metričkog prostora $P(A)$, pa stoga i potpuno ograničen. Zbog toga je propoziciju dovoljno dokazati u slučaju $\|p - q\| < 1/2$.
Stavimo $z := pq + (1-p)(1-q)$. Tada je z element iz $\dot{A}$ i vrijedi $pz = pq = zq$. Nadalje, imamo ocjenu

$$\|z - 1\| = \|p(q-p) + (1-p)((1-q) - (1-p))\| \leq 2\|q - p\| < 1.$$

Po propoziciji 3.15, z je invertibilan i $z \overset{h}{\sim} 1$ u $\mathrm{GL}(\dot{A})$. Neka je $z = u|z|$ polarna dekompozicija od z, gdje je u unitaran. Tada je po propoziciji 3.27, $p = uqu^*$. Iz svojstava polarne dekompozicije (tj. iz propozicije 3.11), dobivamo da je $u \overset{h}{\sim} z \overset{h}{\sim} 1$ u $\mathrm{GL}(\dot{A})$. Također, iz propozicije 3.11 (*iii*) slijedi da je $u \in U(\dot{A})_0$ ■

Ako je A C^*-algebra, tada na skupu $P(A)$ projektora iz A imamo tri relacije ekvivalencije. U primjeru 3.31 vidjet ćemo da je općenito $\overset{u}{\sim} \neq \overset{MvN}{\sim}$. U propoziciji 3.29 pokazat ćemo da je homotopska ekvivalencija jača od unitarne ekvivalencije i da je unitarna ekvivalencija jača od MvN-ekvivalencije. Nadalje, iz propozicije 3.33 slijedi da se te tri relacije zapravo poklapaju, do na peijelaz u matrične algebre.

Propozicija 3.29 *Neka je A C^*-algebra i neka su $p, q \in A$ projektori.*

(*i*) *Ako je $p \overset{h}{\sim} q$, onda je $p \overset{u}{\sim} q$.*

(*ii*) *ako je $p \overset{u}{\sim} q$, onda je $p \overset{MvN}{\sim} q$.*

Dokaz: (*i*) je direktna posljedica propozicije 3.28.
Ako je $upu^* = q$ za neki unitarni $u \in \dot{A}$, onda je $v := up$ element iz A, budući da je A ideal u $\dot{A}$ i vrijedi $v^*v = p$, $vv^* = q$. Time smo dokazali (*ii*). ■

Ako je $A = B(H)$, gdje je H separabilni beskonačnodimenzionalni Hilbertov prostor, onda imamo slijedeću karakterizaciju.

Propozicija 3.30 (*i*) *$p \overset{MvN}{\sim} q$ ako i samo ako je $\dim(pH) = \dim(qH)$.*

(*ii*) *$p \overset{u}{\sim} q$ ako i samo ako je $\dim(pH) = \dim(qH)$ i $\dim((pH)^{\perp})) = \dim((qH)^{\perp})$.*

Dokaz: (*i*) Ako je $\dim(pH) = \dim(qH)$, onda iz diskusije u napomeni 3.19 slijedi da je $p \overset{MvN}{\sim} q$.
Obratno, neka je $p \overset{MvN}{\sim} q$ i neka je $v \in B(H)$ parcijalna izometrija za koju je $v^*v = p$ i $vv^* = q$. Tvrdimo da restrikcija u operatora v na $\mathrm{Im}(v^*v)$, $u := v_{|\mathrm{Im}(v^*v)} : \mathrm{Im}(v^*v) \to \mathrm{Im}(vv^*)$ definira izometrički izomorfizam. Najprije, u je dobro definiran zbog relacija (12). Sada primijetimo da su $\mathrm{Im}(v^*v)$ i $\mathrm{Im}(vv^*)$ zatvoreni prostori, kao slike projektora, te da je adjungirani operator u^* :

$\mathrm{Im}(vv^*) \to \mathrm{Im}(v^*v)$ dan restrikcijom od v^* na prostor $\mathrm{Im}(vv^*)$. Uzmimo $x \in \mathrm{Im}(v^*v)$. Tada je $v^*vx = x$, pa imamo:

$$u^*ux = u^*vx = u^* \underbrace{vv^*vx}_{\in \mathrm{Im}(vv^*)} = (v^*v)(v^*v)x = v^*vx = x.$$

Zato je $u^*u = 1_{\mathrm{Im}(v^*v)}$. Analogno dobivamo i da je $uu^* = 1_{\mathrm{Im}(vv^*)}$. Budući da je u izometrički izomorfizam, to je $\dim(pH) = \dim(qH)$.
(ii) slijedi iz (i) i propozicije 3.24, budući da je $(rH)^\perp = (1-r)H$, za svaki (ortogonalni) projektor $r \in B(H)$. ■

Primjer 3.31 Vrlo se lako može dogoditi da je $p \stackrel{MvN}{\sim} q$, ali da nije $p \stackrel{u}{\sim} q$. Npr. neka je $H = \ell^2(\mathbb{N})$ s ortonormiranom bazom (ONB) $\{e_1, e_2, ...\}$. Neka je $S \in B(H)$ unilateralni shift, tj. operator definiran na ONB s $Se_n := e_{n+1}$. Tada je $SS^* = 1$ i $S^*S = p$, gdje je p projektor na ortogonalni komplement od $[e_1]$. Zbog toga je S parcijalna izometrija i vrijedi $p \stackrel{MvN}{\sim} 1$ u $B(H)$. No nema govora da su projektori p i 1 unitarno ekvivalentni. Kako je $S^*S = 1$, to je $\dim(pH) = 0$, pa iz (ii) propozicije 3.30 slijedi $p \stackrel{u}{\nsim} 1$.
Da je općenito i $\stackrel{h}{\sim} \subsetneq \stackrel{u}{\sim}$, nije tako trivijalno. Kontraprimjer se može naći u [1].

Napomena 3.32 Primijetimo da se relacije $\stackrel{u}{\sim}$ i $\stackrel{MvN}{\sim}$ poklapaju na $A = M_n(\mathbb{C})$. Naime, ako su $p, q \in M_n(\mathbb{C})$ takvi da je $p \stackrel{MvN}{\sim} q$, onda iz propozicije 3.30 (i) dobivamo $\mathrm{r}(p) = \mathrm{r}(q)$, gdje smo s $\mathrm{r}(p)$ označili rang od p. Budući da je $\mathbb{C}^n = p\mathbb{C}^n \oplus (1-p)\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^n = q\mathbb{C}^n \oplus (1-q)\mathbb{C}^n$, dobivamo

$$\mathrm{r}(1-p) = n - \mathrm{r}(p) = n - \mathrm{r}(q) = \mathrm{r}(1-p),$$

pa iz propozicije 3.30 (ii) dobivamo da je $p \stackrel{u}{\sim} q$

Propozicija 3.33 *Neka su p, q projektori iz C^*-algebre A.*

(i) Ako je $p \stackrel{MvN}{\sim} q$, tada je $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{u}{\sim} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ u $M_2(A)$.

(ii) Ako je $p \stackrel{u}{\sim} q$, tada je $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{h}{\sim} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ u $M_2(A)$.

Dokaz: (i) Neka je $v \in A$ takav da je $p = v^*v$ i $q = vv^*$. Tvrdimo da su

$$u := \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix}, \qquad w := \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

unitarni elementi iz $M_2(\dot{A})$. Pokažimo npr. da je $u^*u = 1$. Jednakosti $uu^* = w^*w = ww^* = 1$ slijede potpuno analogno. Koristeći relacije (12), dobivamo:

$$u^*u = \begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + (1-p)^2 & v^*(1-q) + (1-p)v^* \\ (1-q)v + v(1-p) & (1-q)^2 + q \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2v^* - v^*q - pv^* \\ 2v - qv - vp & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (2v - qv - vp)^* \\ 2v - qv - vp & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je

$$wu \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^* w^* = w \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^* = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i da

$$wu = \begin{pmatrix} v + (1-q)(1-p) & (1-q)v^* \\ q(1-p) & (1-q) + qv^* \end{pmatrix}$$

pripada algebri $M_2(\dot{A})$. Naime, ovdje smatramo da je $M_2(\dot{A})$ C^*-podalgebra s jedinicom od $M_2(\dot{A})$, preko ulaganja,

$$\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \alpha \right) \mapsto \begin{pmatrix} (x, \alpha) & (y, 0) \\ (z, 0) & (w, \alpha) \end{pmatrix}$$

wu a priori pripada algebri $M_2(\dot{A})$, no zbog definicije unitarne ekvivalencije, nama je bitno da pripada i $M_2(\dot{A})$. Time je tvrdnja (i) dokazana.

(ii) Neka je $u \in U(\dot{A})$ takav da je $q = upu^*$. Lema 3.7 povlači da postoji put $t \mapsto w_t$ u $U_2(\dot{A})$ takav da je

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

Stavimo $e_t := w_t \mathrm{diag}(p, 0) w_t^*$. Tada je očito svaki e_t projekor iz $P(M_2(A))$, pa je $t \mapsto e_t$ homotopija u $P(M_2(A))$ od $e_0 = \mathrm{diag}(p, 0)$ do $e_1 = \mathrm{diag}(q, 0)$. ■

3.4 Polugrupa projektora

Definicija 3.34 Neka je A C^*-algebra. Definiramo skupove

$$P_n(A) := P(M_n(A)), \qquad P_\infty(A) := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n(A),$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$ i simbol $\sqcup$ označava disjunktnu uniju.

Na $P_\infty(A)$ definiramo relaciju $\overset{0}{\sim}$ na slijedeći način: Ako su $p \in P_n(A)$ i $q \in P_m(A)$, tada

$$p \overset{0}{\sim} q :\Longleftrightarrow \exists v \in M_{m,n}(A) \text{ takav da je } p = v^*v \text{ i } q = vv^*. \tag{14}$$

Ovdje smo sa $M_{m,n}(A)$ označili skup svih pravokutnih $m \times n$ matrica $A = (a_{i,j})$ čije su vrijednosti a_{ij} iz A. Adjungirani element, v^*, od $v \in M_{m,n}(A)$ je matrica iz $M_{n,m}(A)$, dobivena uobičajenim transponiranjem i adjungiranjem matričnih elemenata. Produkti v^*v i vv^* su uobičajeni matrični produkti.

Na $P_\infty(A)$ definiramo binarnu operaciju $\oplus$ na slijedeći način: Ako su $p \in P_n(A)$ i $q \in P_m(A)$, tada je

$$p \oplus q := \mathrm{diag}(p, q) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in P_{n+m}(A). \tag{15}$$

Kao u dokazu propozicije 3.22 dobivamo da je $\overset{0}{\sim}$ relacija ekvivalencije na $P_\infty(A)$.

Napomena 3.35 Primijetimo da relacijom $\overset{0}{\sim}$ u stvari kombiniramo Murray-von Neumannovu relaciju ekvivalencije $\overset{MvN}{\sim}$ i relaciju koja identificira projektore u matričnim algebrama $M_n(A)$ različitih dimenzija. Nadalje, ako su oba projektora p, q iz $P_n(A)$, za neko n, tada je očigledno $p \overset{0}{\sim} q$ akko su p i q Murray-von Neumann ekvivalentni.

Pomoću relacije $\overset{0}{\sim}$ definirat ćemo K_0-grupu, pa zato i stavljamo indeks 0 iznad simbola $\sim$.

Propozicija 3.36 *Neka je A C^*-algebra i neka su p, q, r, p', q, r' projektori iz $P_\infty(A)$. Vrijedi slijedeće:*

(i) $p \overset{0}{\sim} p \oplus 0_n$ *za sve $n \in \mathbb{N}$, gdje 0_n označava nulu u algebri $M_n(A)$.*

(ii) Ako je $p \overset{0}{\sim} p'$ *i* $q \overset{0}{\sim} q'$, *onda je* $p \oplus q \overset{0}{\sim} p' \oplus q'$.

(iii) $p \oplus q \overset{0}{\sim} q \oplus p$.

(iv) Ako su p i q projektori iz $P_n(A)$ koji su ortogonalni, onda je $p+q$ projektor i $p + q \overset{0}{\sim} p \oplus q$.

(v) $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$.

Dokaz: *(i)* Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i neka je $p \in P_m(A)$. Stavimo

$$u_1 := \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{m+n,m}(A).$$

Tada je $p = u_1^* u_1 \overset{0}{\sim} u_1 u_1^* = p \oplus 0_n$.
(ii) Ako je $p \overset{0}{\sim} p'$ i $q \overset{0}{\sim} q'$, tada postoje v, w takvi da je

$$p = v^*v, \quad p' = vv^*, \quad q = w^*w, \quad q' = ww^*.$$

Stavimo $u_2 := \operatorname{diag}(v, w)$. Tada je $p \oplus q = u_2^* u_2 \overset{0}{\sim} u_2 u_2^* = p' \oplus q'$.
(iii) Pretpostavimo da je $p \in P_n(A)$ i da je $q \in P_m(A)$. Stavimo

$$u_3 := \begin{pmatrix} 0_{n,m} & q \\ p & 0_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{n+m}(A).$$

Ovdje smo s $0_{k,l}$ označili nulmatricu iz $M_{k,l}(A)$. Sada imamo $p \oplus q = u_3^* u_3 \overset{MvN}{\sim} u_3 u_3^* = q \oplus p$.
(iv) Ako je $n = m$ i ako je $pq = 0$, tada je $(p+q)^2 = p^2 + q^2 = p + q$ i $(p+q)^* = p^* + q^* = p + q$, pa je $p + q$ projektor. Stavimo

$$u_4 := \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in M_{2n,n}(A).$$

Tada je $p + q = u_4^* u_4 \overset{0}{\sim} u_4 u_4^* = p \oplus q$.
(v) je trivijalno. ■

Definicija 3.37 Neka je $(P_\infty(A), \overset{0}{\sim}, \oplus)$ kao u definiciji 3.34. Stavimo

$$D(A) := P_\infty(A)/\overset{0}{\sim}. \tag{16}$$

Za svako $p \in P_\infty(A)$, neka $[p]_D$ označava klasu ekvivalencije od p u $D(A)$. Na $D(A)$ definiramo zbrajanje s

$$[p]_D + [q]_D := [p \oplus q]_D, \; p, q \in P_\infty(A). \tag{17}$$

Iz propozicije 3.36 slijedi da je ta operacija dobro definirana i da je $(D(A), +)$ Abelova polugrupa.

4 Grupa K_0 za C^*-algebre s jedinicom

4.1 Definicija grupe K_0 za C^*-algebre s jedinicom

Definicija 4.1 Neka je A C^*-algebra s jedinicom i neka je $(D(A), +)$ Abelova polugrupa iz definicije 3.37. Grupu $K_0(A)$ definiramo kao Grothendickeovu grupu (definicija 2.6) od $D(A)$, tj.

$$K_0(A) := G(D(A)).$$

Definirajmo preslikavanje $[\cdot]_0 : P_\infty(A) \to K_0(A)$ s

$$[p]_0 := \gamma([p]_D) \in K_0(A), \quad p \in P_\infty(A), \tag{18}$$

gdje je $\gamma : D(A) \to K_0(A)$ Grothendieckovo preslikavanje (definicija 2.6).

Primijetimo da koristeći propoziciju 2.16 dobivamo slijedeću bitnu posljedicu:

Propozicija 4.2 *Neka je A C^*-algebra s jedinicom. Neka je $V(A)$ Abelova polugrupa klasa idempotenata iz $I_\infty(A)$ obzirom na algebarsku ekvivalenciju i $K_0^{\mathrm{alg}}(A)$ algebarska K_0-grupa od A, kao u napomeni 2.17. Preslikavanje*

$$D(A) \to V(A), \qquad [p]_{\mathcal{D}} \mapsto [p]_V$$

definira izomorfizam polugrupa. Specijalno, imamo

$$K_0^{\mathrm{alg}}(A) \cong K_0(A). \tag{19}$$

Napomena 4.3 Definicija 4.1 grupe K_0 ima smisla i za C^*-algebre bez jedinice. Neka je A C^*-algebra (s ili bez jedinice). Neka je $K_{00}(A)$ Grothendieckova grupa polugrupe $D(A)$, tj. $K_{00}(A) := G(D(A))$. Ako A ima jedinicu, očito je $K_{00}(A) = K_0(A)$. U slijedećim propozicijama pokazat ćemo da je K_0 funktor iz kategorije C^*-algebri s jedinicom u kategoriju Abelovih grupa, koji ima niz dobrih svojstava (npr. poluegzaktnost, homotopska invarijantnost, itd.). Ako bi htjeli proširiti funktor K_0 do funktora K_{00}, definiranog na kategoriji svih C^*-algebri, tada se (kao i kod topološke K-teorije pri prijelazu s kompaktnih Hausdorffovih na LCH-prostore) pokazuje da K_{00} ima niz bitnih mana, tj. da gubi neka dobra svojstva koja ima K_0, kao npr. svojstvo poluegzaktnosti (vidi [1]).

Kao i u topološkoj K-teoriji, definiramo pojam stabilne ekvivalencije (vidi napomenu 2.10).

Definicija 4.4 Neka je A C^*-algebra i $p, q \in P_\infty(A)$ projektori. Tada kažemo da su p i q **stabilno ekvivalentni** i pišemo $p \stackrel{s}{\sim} q$, ako postoji projektor $r \in P_\infty(A)$ takav da je $p \oplus r \stackrel{0}{\sim} q \oplus r$. Relaciju $\stackrel{s}{\sim}$ zovemo **stabilna ekvivalencija**.

Napomena 4.5 *Primijetimo da je, ako A ima jedinicu, $p \stackrel{s}{\sim} q$ za $p, q \in P_\infty(A)$ ako i samo ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $p \oplus 1_n \stackrel{0}{\sim} q \oplus 1_n$, gdje 1_n označava jedinicu iz $M_n(A)$. Zaista, ako je $p \oplus r \stackrel{0}{\sim} q \oplus r$, za neko $r \in P_n(A)$, tada imamo:*

$$p \oplus 1_n \stackrel{0}{\sim} p \oplus r \oplus (1_n - r) \stackrel{0}{\sim} q \oplus r \oplus (1_n - r) \stackrel{0}{\sim} q \oplus 1_n.$$

Propozicija 4.6 (Standardna slika K_0-grupe za C^*-algebre s jedinicom) *Neka je A C^*-algebra s jedinicom. Tada je*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in P_\infty(A)\} = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in P_n(A),\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{20}$$

Štoviše, vrijedi:

(*i*) $[p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$ *za sve projektore $p, q \in P_\infty(A)$.*

(*ii*) $[0_A]_0 = 0$, *gdje je 0_A nulprojektor iz A.*

(*iii*) *Ako su p, q projektori iz $P_n(A)$ (za neko $n \in \mathbb{N}$) takvi da je $p \stackrel{h}{\sim} q$, onda je $[p]_0 = [q]_0$.*

(*iv*) *Ako su p i q međusobno ortogonalni projektori iz $P_n(A)$, tada je $[p + q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.*

(*v*) *Za sve $p, q \in P_\infty(A)$ vrijedi: $[p]_0 = [q]_0$ ako i samo ako je $p \stackrel{s}{\sim} q$.*

Dokaz: Prva jednakost u (20) slijedi direktno iz propozicije 2.7 (*iii*). Neka je sada $g \in K_0(A)$. Tada je $g = [p']_0 - [q']_0$ za neke $p' \in P_k(A)$ i $q' \in P_l(A)$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > \max\{k, l\}$ i stavimo $p := p' \oplus 0_{n-k}$ i $q := q' \oplus 0_{n-l}$. Tada su p i q projektori iz $P_n(A)$ i po propoziciji 3.36 (*i*) vrijedi $p \stackrel{0}{\sim} p'$, $q \stackrel{0}{\sim} q'$. Zbog toga je $g = [p]_0 - [q]_0$.
(*i*) Imamo: $[p \oplus q]_0 = \gamma([p \oplus q]_D) = \gamma([p]_D + [q]_D) = \gamma([p]_D) + \gamma([q]_D) = [p]_0 + [q]_0$.
(*ii*) Kako je $0_A \oplus 0_A \stackrel{0}{\sim} 0_A$, iz (*i*) slijedi da je $[0_A]_0 + [0_A]_0 = [0_A]_0$, pa je $[0_A]_0 = 0$.
(*iii*) Ako su $p, q \in P_n(A)$ takvi da je $p \stackrel{h}{\sim} q$, onda je po propoziciji 3.29 $p \stackrel{MvN}{\sim} q$. Zato je $p \stackrel{0}{\sim} q$, pa je $[p]_D = [q]_D$, a onda je i $[p]_0 = [q]_0$.
(*iv*) Po propoziciji 3.36 imamo $p + q \stackrel{0}{\sim} p \oplus q$, pa iz (*i*) slijedi da je $[p + q]_0 = [p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.
(*v*) Ako je $[p]_0 = [q]_0$, tada po propoziciji 2.7 (*iv*) postoji projektor $r \in P_\infty(A)$ takav da je $[p]_D + [r]_D = [q]_D + [r]_D$. Zbog toga je $[p \oplus r]_D = [q \oplus r]_D$, pa je $p \oplus r \stackrel{0}{\sim} q \oplus r$, tj. $p \stackrel{s}{\sim} q$. Obratno, ako je $p \stackrel{s}{\sim} q$, tada postoji projektor $r \in P_\infty(A)$ takav da je $p \oplus r \stackrel{0}{\sim} q \oplus r$. Iz (*i*) dobivamo da je $[p]_0 + [r]_0 = [q]_0 + [r]_0$ i budući da je $K_0(A)$ grupa, to je $[p]_0 = [q]_0$. ■

Propozicija 4.7 (Univerzalno svojstvo od K_0) *Neka je A C^*-algebra s jedinicom i neka je G Abelova grupa. Pretpostavimo da je $\nu : P_\infty(A) \to G$ preslikavanje koje zadovoljava slijedeća tri svojstva:*

(*i*) $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q)$, *za sve projektore* $p, q \in P_\infty(A)$.

(*ii*) $\nu(0_A) = 0$.

(*iii*) *Ako su p, q projektori iz $P_n(A)$ (za neko $n \in \mathbb{N}$) takvi da je $p \overset{h}{\sim} q$ u $P_n(A)$, onda je $\nu(p) = \nu(q)$.*

Tada postoji jedinstveni homomorfizam $\alpha : K_0(A) \to G$ takav da slijedeći dijagram komutira.

$$\begin{tikzcd} P_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_0(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd} \tag{21}$$

Dokaz: Najprije ćemo dokazati slijedeću tvrdnju: Ako su p, q projektori iz $P_\infty(A)$ i ako je $p \overset{0}{\sim} q$, onda je $\nu(p) = \nu(q)$. Naime, neka su $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $p \in P_k(A)$ i $q \in P_l(A)$ i uzmimo takav $n \in \mathbb{N}$ koji je veći od k i od l. Stavimo $p' := p \oplus 0_{n-k}$ i $q' := q \oplus 0_{n-l}$. Tada su p' i q' projektori iz $P_n(A)$, a budući da je $p' \overset{0}{\sim} p \overset{0}{\sim} q \overset{0}{\sim} q'$, to je $p' \overset{MvN}{\sim} q'$. Iz propozicije 3.29 slijedi da je $p' \oplus 0_{3n} \overset{h}{\sim} q' \oplus 0_{3n}$ u $P_{4n}(A)$. Zato je

$$\nu(p) = \nu(p) + \underbrace{\nu(0) + \cdots + \nu(0)}_{4n-k} = \nu(p' \oplus 0_{3n}) = \nu(q).$$

Zbog toga je preslikavanje $\beta : D(A) \to G$ dano s $\beta([p]_D) := \nu(p)$ dobro definirano. Tvrdimo da je β aditivno preslikavanje. To slijedi iz

$$\beta([p]_D + [q]_D) = \beta([p \oplus q]_D) = \nu(p \oplus q) = \beta([p]_D) + \beta([q]_D).$$

Iz univerzalnog svojstva konstrukcije Grothendieckove grupe, tj. iz propozicije 2.7 (*i*), slijedi da postoji homomorfizam grupa $\alpha : K_0(A) \to G$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} D(A) \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ K_0(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

komutira. Zbog toga je i dijagram (21) također komutativan. Neka je sada $\alpha' : P_\infty(A) \to K_0(A)$ homomorfizam grupa takav da dijagram dobiven iz (21) zamijenom α s α' komutira. Neka je sada $g \in K_0(A)$. Tada je po (20) $g = [p]_0 - [q]_0$ za neke $p, q \in P_\infty(A)$. Iz komutativnosti oba dijagrama dobivamo

$$\alpha'(g) = \alpha'([p]_0 - [q]_0) = \alpha'([p]_0) - \alpha'([q]_0) = \nu(p) - \nu(q) = \alpha([p]_0) - \alpha([q]_0) = \alpha([p]_0 - [q]_0) = \alpha(g).$$

Time je dokazana jedinstvenost od α. ■

4.2 Funktorijalnost od K_0 za C^*-algebre s jedinicom

Neka su A i B C^*-algebre s jedinicom i neka je $\varphi : A \to B$ (ne nužno unitalni) $*$-homomorfizam. Tada φ inducira homomorfizam grupa $K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$ na slijedeći način. Po napomeni 3.2, za svako $n \in \mathbb{N}$, φ inducira $*$-homomorfizam $\varphi : M_n(A) \to M_n(B)$. Budući da $*$-homomorfizam preslikava projektore u projektore, to je $\varphi(P_\infty(A)) \subset P_\infty(B)$. Sada definiramo preslikavanje $\nu : P_\infty(A) \to K_0(B)$ s $\nu(p) := [\varphi(p)]_0$, $p \in P_\infty(A)$. Tada ν očigledno zadovoljava svojstva $(i), (ii)$ i (iii) propozicije 4.7, pa iz iste propozicije slijedi da se ν na jedinstven način faktorizira preko homomorfizma grupa $K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$, koji je dan formulom

$$K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0, \qquad p \in P_\infty(A). \tag{22}$$

Drugim riječima, slijedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} P_\infty(A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] & P_\infty(B) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"] \\ K_0(A) \arrow[r, "K_0(\varphi)"'] & K_0(B) \end{tikzcd} \tag{23}$$

Sličan postupak prolazi i pri definiranju homomorfizma $K_{00}(\varphi) : [p]_{00} \mapsto [\varphi(p)]_{00} : K_{00}(A) \to K_{00}(B)$, gdje su A i B C^*-algebre (koje ne moraju nužno imati jedinicu). Naime, najprije primijetimo da propoziciju 4.7 možemo proširiti do slučaja u kojem barem jedna od A i B nema jedinicu, i to tako, da svugdje u istoj propoziciji riječ K_0 zamijenimo s K_{00}. Sada tvrdnju dobivamo iz konstrukcije od $K_0(\varphi)$, također zamjenom riječi K_0 (svugdje u konstrukciji od $K_0(\varphi)$) s K_{00}.

Propozicija 4.8 (Funktorijalnost od K_0 za C^*-algebre s jedinicom)

(i) *Ako je A C^*-algebra s jedinicom onda je $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$.*

(ii) *Ako su A, B i C C^*-algebre s jedinicom i ako su $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$ $*$-homomorfizmi, tada je $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.*

(iii) *$K_0(0) = 0$, gdje 0 na lijevoj strani označava trivijalnu C^*-algebru, a 0 na desnoj strani označava trivijalnu (Abelovu) grupu.*

(iv) *Za svaki par C^*-algebri A, B imamo $K_0(0_{B,A}) = 0_{K_0(B),K_0(A)}$, gdje $0_{B,A}$ označava trivijalni (nul) $*$-homomorfizam $A \to B$. Analogno, $0_{K_0(B),K_0(A)}$ označava trivijalni homomorfizam $K_0(A) \to K_0(B)$.*

Dokaz: Iz (22) slijedi da je $K_0(\mathrm{id}_A)([p]_0) = [p]_0$, za sve $p \in P_\infty(A)$. Također, za sve $p \in P_\infty(A)$ imamo $K_0(\psi \circ \varphi)([p]_0) = [(\psi \circ \varphi)(p)]_0 = [\psi(\varphi(p))]_0 = K_0(\psi)([\varphi(p)]_0) = K_0(\psi)(K_0(\varphi)([p]_0)) = (K_0(\psi) \circ K_0(\varphi))([p]_0)$. Sada tvrdnje (i) i (ii) slijede iz jednakosti (20).
(iii) Očito je $P_n(0) = \{0_n\}$, gdje je 0_n nula iz $M_n(0)$. Svi nul-projektori $0 = 0_1, 0_2, \ldots$ su međusobno ekvivalentni, pa je $D(0) = \{[0]_D\}$. Zbog toga je $K_0(0) = G(\{[0]_D\}) = 0$.
(iv) Kako je $0_{B,A} = 0_{B,0} \circ 0_{0,A} : A \to 0 \to B$, (iv) slijedi direktno iz (ii) i (iii). ∎

Napomena 4.9 Primijetimo da iz (i) i (ii) propozicije 4.8 slijedi da je K_0 kovarijantni funktor iz kategorije C^*-algebri s jedinicom u kategoriju Abelovih grupa. Nadalje, (iii) i (iv) iz iste propozicije daju da K_0 čuva nul-objekte, tj. K_0 preslikava nul-objekte (iz kategorije C^*-algebri s jedinicom) u nul-objekte (iz kategorije Abelovih grupa). Ovdje smo nul-C^*-algebre uključili u klasu C^*-algebri s jedinicom.
Sličnim argumentom dobivamo i da je K_{00} funktor koji čuva nul-objekte.

Kao što smo u uvodu napomenuli, gotovo sva svojstva topološke K-teorije se prenose u K-teoriju za C^*-algebre. Jedno od tih svojstava je homotopska invarijantnost (teorem 2.14). Prije nego što definiramo pojam homotopije u kontekstu C^*-algebri, najprije ćemo dati motivaciju za tu definiciju, krenuvši naravno iz komutativnog slučaja.

Pretpostavimo da su Z i T kompaktni Hausdorffovi prostori i $F : Z \to T$, $G : Z \to T$ dva homotopna preslikavanja preko homotopije $\Phi : \mathrm{I} \times Z \to T$. Dakle, $\Phi_0 = F$ i $\Phi_1 = G$, gdje je $\Phi_t := \Phi(t, \cdot)$. Ako na to primijenimo prvi Gelfand-Naimarkov kofunktor, $X \rightsquigarrow C_0(X) = C(X)$, odmah dobivamo ideju za definiciju homotopije između $*$-homomorfizama $\varphi := C_0(F) : C(T) \to C(Z)$ i $\psi := C_0(G) : C(T) \to C(Z)$. Naprosto proglasimo φ i ψ homotopnima ako postoji unitalni $*$-homomorfizam $\tilde{\Phi} : C(T) \to C(\mathrm{I} \times Z)$ takav da je $\tilde{\Phi}_0 = \varphi$ i $\tilde{\Phi}_1 = \psi$, gdje je za $t \in \mathrm{I}$, $\tilde{\Phi}_t(f) := (\tilde{\Phi}(f))(t, -)$. Zbog teorema 2.1, jasno je da su $F : Z \to T$, $G : Z \to T$ homotopna ako i samo ako s njihovi transponati $C_0(F) : C(T) \to C(Z)$ i $C_0(G) : C(T) \to C(Z)$ homotopni $*$-homomorfizmi, u smislu kao gore.

Primijetimo da je $C(\mathrm{I} \times Z) \cong C(\mathrm{I} \to C(Z))$ preko izomorfizma $\tilde{f} \mapsto f$ definiranog s $(f(t))(z) := \tilde{f}(t, z)$. Zato za komutativne C^*-algebre s jedinicom A i B možemo definirati da su *-homomorfizmi $\varphi, \psi : A \to B$ homotopni, ako postoji unitalni $*$-homomorfizam $\tilde{\Phi} : A \to C(\mathrm{I} \to B)$, takav da je $\tilde{\Phi}_0 = \varphi$ i $\tilde{\Phi}_1 = \psi$. To je isto kao i da kažemo: Postoji put $t \mapsto \Phi_t : A \to B$ $*$-homomorfizama, za koje je $\Phi_t(1_A) = 1_B$ za sve $t \in \mathrm{I}$; funkcija $t \to \Phi_t(a) := (\Phi(a))(t)$ je u $C(\mathrm{I} \to B)$ za sve $a \in A$ i $\Phi_0 = \varphi$ i $\Phi_1 = \psi$. Pokazuje se da je K-teorija za C^*-algebre invarijantna obzirom na ta preslikavanja, čak i ako promatramo komutativne C^*-algebre bez jedinice. Sada komutativnu definiciju generaliziramo na proizvoljne C^*-algebre.

Definicija 4.10

- Neka su A i B C^*-algebre. $*$-homomorfizmi $\varphi, \psi : A \to B$ su **homotopni**, s oznakom $\varphi \overset{h}{\sim} \psi$, ako postoji put $t \mapsto \Phi_t : A \to B$ $(t \in \mathrm{I})$ $*$-homomorfizama, takav da je $\Phi_0 = \varphi$ i $\Phi_1 = \psi$ i da je funkcija $t \mapsto \Phi_t(a)$ neprekidna za sve $a \in A$. U tom slučaju kažemo da je preslikavanje $t \mapsto \Phi_t$ **po točkama neprekidni put**.
- C^*-algebre A i B su **homotopski ekvivalentne** i pišemo $A \overset{h}{\sim} B$, ako postoje $*$-homomorfizmi $\varphi : A \to B$ i $\psi : B \to A$, takvi da je $\varphi \circ \psi \overset{h}{\sim} \mathrm{id}_B$ i da je $\psi \circ \varphi \overset{h}{\sim} \mathrm{id}_A$, i kažemo da je

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A.$$

homotopija između A i B.

- C^*-algebra A je **kontraktibilna** ako je $A \overset{h}{\sim} 0$.

Propozicija 4.11 (Homotopska invarijantnost od K_0 za C^*-algebre s jedinicom) *Neka su A i B C^*-algebre s jedinicom. Tada vrijedi:*

(i) *Ako su $\varphi, \psi : A \to B$ homotopni $*$-homomorfizmi, tada je $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.*

(ii) *Ako su A i B homotopski ekvivalentne, tada je $K_0(A)$ izomorfna s $K_0(B)$. Preciznije, ako je*

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A.$$

homotopija između A i B, onda su $K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$ i $K_0(\psi) : K_0(B) \to K_0(A)$ izomorfizmi koji su međusobno inverzni.

(iii) *Ako je A kontraktibilna, onda je $K_0(A) = 0$.*

Dokaz: Neka je $t \mapsto \Phi_t : A \to B$ po točkama neprekidni put $*$-homomorfizama koje povezuje φ sa ψ. Tada, kao u napomeni 3.2, preslikavanje $t \mapsto \Phi_t$ inducira po točkama neprekidni put $*$-homomorfizama $t \mapsto \Phi_t : M_n(A) \to M_n(B)$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Za svaki projektor $p \in P_n(A)$, preslikavanje $t \mapsto \Phi_t(p)$ je neprekidno, pa je ono homotopija od $\Phi_0(p) = \varphi(p)$ do $\Phi_1(p) = \psi(p)$. Iz propozicije 3.29 slijedi da je $\varphi(p) \overset{0}{\sim} \psi(p)$, pa imamo:

$$K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0 = [\psi(p)]_0 = K_0(\psi)([p]_0).$$

Sada zbog (20) zaključujemo da je $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.
(ii) slijedi direktno iz (i) i propozicije 4.8 (i) i (ii), dok (iii) slijedi trivijalno iz (ii). ■

Definicija 4.12 Za (konačan ili beskonačan) niz C^*-algebri i $*$-homomorfizama kažemo da je **egzaktan** i pišemo

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_n} A_n \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+2}} A_{n+2} \longrightarrow \cdots ,$$

ako je $\mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1})$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Za egzaktan niz oblika

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \tag{24}$$

kažemo da je **kratko egzaktan** (ili kraće, SES).
Ako u (24) postoji $*$-homomorfizam $\lambda : B \to A$ takav da je $\psi \circ \lambda = \mathrm{id}_B$, tada λ zovemo **lift** od ψ i za SES (24) kažemo da je **rascjepiv**. Tu činjenicu zapisujemo s

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, shift left, "\psi"] & B \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Napomena 4.13 Primijetimo, ako je A C^*-algebra i I ideal u A, onda je niz

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

kratko egzaktan, gdje je ι inkluzija, a π kanonska projekcija.
Obratno, ako je dan SES (24), tada je $\varphi(I)$ ideal u A i C^*-algebra B je izomorfna C^*-algebri $A/\varphi(I)$. Štoviše, slijedeći dijagram je komutativan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \varphi(I) \arrow[r, "\iota"'] & A \arrow[r, "\pi"'] & A/\varphi(I) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Napomena 4.14 Neka je A C^*-algebra i s $\dot{A}$, kao i prije, označimo unitalizaciju od A. Tada je A ideal u $\dot{A}$ i imamo izomorfizam $\dot{A}/A \cong \mathbb{C}$.
Neka je $\iota : A \to \dot{A}$ inkluzija, $\pi : \dot{A} \to \mathbb{C}$ kvocijentno preslikavanje i $\lambda : \mathbb{C} \to \dot{A}$ $*$-homomorfizam definiran s $\lambda(\alpha) = \alpha 1_{\dot{A}}$. Tada je SES

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & \dot{A} \arrow[r, shift left, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{25}$$

rascjepiv.

Sada nam je cilj dokazati da K_0 čuva egzaktnost rascjepivog SES-a (25).
Za dva $*$-homomorfizma $\varphi, \psi : A \to B$ (A i B su C^*-algebre) kažemo da su **međusobno ortogonalni**, u oznaci $\varphi \perp \psi$, ako je $\varphi(x)\psi(y) = 0$ za sve $x, y \in A$.

Lema 4.15 *Neka su A i B C^*-algebre s jedinicom. Ako su $\varphi, \psi : A \to B$ međusobno ortogonalni $*$-homomorfizmi, onda je $\varphi + \psi : A \to B$ također $*$-homomorfizam i $K_0(\varphi + \psi) = K_0(\varphi) + K_0(\psi)$.*

Dokaz: Da je $\varphi + \psi$ $*$-homomorfizam je trivijalno, jer jedino što u stvari trebamo provjeriti je njegovu multiplikativnost, a to vrijedi zato što su φ i ψ međusobno ortogonalni. Po napomeni 3.2, imamo $*$-homomorfizme $\varphi_n, \psi_n : M_n(A) \to M_n(B)$, koji su također očito ortogonalni i za svako $n \in \mathbb{N}$ je $(\varphi + \psi)_n = \varphi_n + \psi_n$. Sada, ako je $p \in P_n(A)$ i ako iskoristimo propoziciju 4.6 (*iv*), dobivamo

$$K_0(\varphi+\psi)([p]_0) = [(\varphi+\psi)_n(p)]_0 = [\varphi_n(p)+\psi_n(p)]_0 = [\varphi_n(p)]_0+[\psi_n(p)]_0 = K_0(\varphi)([p]_0)+K_0(\psi)([p]_0).$$

Iz (20) dobivamo $K_0(\varphi + \psi) = K_0(\varphi) + K_0(\psi)$. ■

Lema 4.16 *Za svaku C^*-algebru s jedinicom A, rascjepivi SES*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & \dot{A} \arrow[r, shift left, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

inducira rascjepivi SES K_0-grupa:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\iota)"] & K_0(\dot{A}) \arrow[r, shift left, "K_0(\pi)"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[l, shift left, "K_0(\lambda)"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}. \tag{26}$$

Dokaz: Kao u dokazu propozicije 3.24, stavimo $f := 1_{\dot{A}} - 1_A \in \dot{A}$. Tada je f projektor, $\dot{A} = A + \mathbb{C}f$ i $fa = af = 0$ za sve $a \in A$. Definirajmo $*$-homomorfizme

$$\mu : a + \alpha f \mapsto a : \dot{A} \to A, \qquad \lambda' : \alpha \mapsto \alpha f : \mathbb{C} \to \dot{A}.$$

Tada trivijalno dobivamo slijedeće jednakosti

$$\mathrm{id}_A = \mu \circ \iota, \quad \mathrm{id}_{\dot{A}} = \iota \circ \mu + \lambda' \circ \pi, \quad \pi \circ \iota = 0, \quad \pi \circ \lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}.$$

Nadalje, kako je $af = fa = 0$ za sve $a \in A$, $*$-homomorfizmi $\iota \circ \mu$ i $\lambda' \circ \pi$ su međusobno ortogonalni. Koristeći funkorijalnost od K_0 (propozicija 4.8) i lemu 4.15 dobivamo četiri jednakosti:

$$0 = K_0(0) = K_0(\pi \circ \iota) = K_0(\pi) \circ K_0(\iota),$$

$$\mathrm{id}_{K_0(\mathbb{C})} = K_0(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = K_0(\pi \circ \lambda) = K_0(\pi) \circ K_0(\lambda),$$

$$\mathrm{id}_{K_0(A)} = K_0(\mathrm{id}_A) = K_0(\mu \circ \iota) = K_0(\mu) \circ K_0(\iota),$$

$$\mathrm{id}_{K_0(\dot{A})} = K_0(\mathrm{id}_{\dot{A}}) = K_0(\iota \circ \mu + \lambda' \circ \pi) = K_0(\iota) \circ K_0(\mu) + K_0(\lambda') \circ K_0(\pi).$$

Da je (26) rascjepivi SES, slijedi iz te četiri jednakosti. Naime, injektivnost od $K_0(\iota)$ slijedi iz treće jednakosti. Surjektivnost od $K_0(\pi)$ slijedi iz druge jednakosti. Inkluzija $\mathrm{Im}(K_0(\iota)) \subset \mathrm{Ker}(K_0(\pi))$ slijedi iz prve jednakosti. I napokon, obrnutu inkluziju $\mathrm{Im}(K_0(\iota)) \supset \mathrm{Ker}(K_0(\pi))$, dobivamo slijedećim argumentom: Ako je $g \in \mathrm{Ker}(K_0(\pi))$, onda je po zadnjoj jednakosti $g = K_0(\iota)(K_0(\mu)(g))$, iz čega slijedi da je $g \in \mathrm{Im}(K_0(\iota))$. ■

Primjer 4.17 (*i*) Neka je A C^*-algebra s jedinicom. Ograničeni **trag** na C^*-algebri A je ograničeni linearni funkcional $\tau : A \to \mathbb{C}$ za kojeg vrijedi *svojstvo traga*:

$$\tau(ab) = \tau(ba), \quad \forall a, b \in A. \tag{27}$$

Svojstvo traga automatski daje slijedeću implikaciju: Ako su $p, q \in A$ projektori koji su Murray-von Neumann ekvivalentni, onda je $\tau(p) = \tau(q)$.
Za trag τ kažemo da je *pozitivan* ako je $\tau(a) \geq 0$, za sve pozitivne elemente $a \in A^+$. Ako A posjeduje jedinicu, onda kažemo da je τ *trag-stanje* ako je τ pozitivan i unitalan ($\tau(1_A) = 1$).
Trag τ na C^*-algebri A proširujemo do traga τ_n na $M_n(A)$ za kojeg vrijedi $\tau_n(\mathrm{diag}(a, 0, \ldots, 0)) = \tau(a)$. Tada je τ_n dan formulom

$$\tau_n \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \tau(a_{ii}). \tag{28}$$

Ograničenost od τ_n slijedi iz nejednakosti (7), a svojstvo (27) dobivamo direktnim množenjem matrica (kao što to dobivamo i za standardni trag Tr na $M_n(\mathbb{C})$). Zbog toga je τ_n zaista trag na $M_n(A)$.

Na gore opisani način, trag τ na C^*-algebri s jedinicom A inducira funkciju $\tau : P_\infty(A) \to \mathbb{C}$ i ta funkcija trivijalno zadovoljava uvjete (i), (ii) propozicije 4.7. Uvijet (iii) iste propozicije slijedi zbog implikacija $p \overset{h}{\sim} q \Rightarrow p \overset{MvN}{\sim} q \Rightarrow \tau(p) = \tau(q)$. Zbog toga postoji jedinstveni homomorfizam grupa $K_0(\tau) : K_0(A) \to \mathbb{C}$ za kojeg vrijedi

$$K_0(\tau)([p]_0) = \tau(p), \quad p \in P_\infty(A). \tag{29}$$

Ako je τ još i pozitivan, onda je $K_0(\tau)([p]_0) = \tau(p)$ pozitivan realan broj za sve $p \in P_\infty(A)$ (jer je $\sigma(p) \subseteq \{0, 1\}$), pa $K_0(\tau)$ preslikava $K_0(A)$ u $\mathbb{R}$.

(ii) Za svako $n \in \mathbb{N}$, grupa $K_0(M_n(\mathbb{C}))$ je izomorfna sa $\mathbb{Z}$

Dokaz: Uzmimo da je $\tau = \mathrm{Tr}$ standardni trag na $M_n(\mathbb{C})$. Tvrdimo da je

$$K_0(\mathrm{Tr}) : K_0(M_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{Z}$$

izomorfizam grupa. Ako se sada prisjetimo poznate činjenice iz linearne algebre, da za svaki projektor $p \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{r}(p)$ ($r(p)$ označava rang od p), onda za $p, q \in P_\infty(M_n(\mathbb{C}))$, iz propozicije 4.6 (iv), napomene 4.5, propozicije 3.30 i napomene 3.32 slijedi:

$$[p]_0 = [q]_0 \Leftrightarrow p \overset{s}{\sim} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\; p \oplus 1_n \overset{0}{\sim} q \oplus 1_n \Leftrightarrow \mathrm{r}(p \oplus 1_n) = \mathrm{r}(p \oplus 1_n) \Leftrightarrow \mathrm{r}(p) = \mathrm{r}(q) \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(q). \tag{30}$$

Sada primijetimo da za svako $m \in \mathbb{Z}_+$ postoji projektor $p \in P_\infty(M_n(\mathbb{C}))$ ranga m. Zaista, to lagano slijedi zbog očitog izomorfizma $M_k(M_n(\mathbb{C})) \cong M_{kn}(\mathbb{C})$. Zbog toga i zbog (30) slijedi da je restrikcija preslikavanja $[p]_0 \mapsto K_0(\mathrm{Tr})([p]_0) = r(p)$ na skup $\{[p]_0 : p \in P_\infty(M_n(\mathbb{C}))\} \subseteq K_0(M_n(\mathbb{C}))$ bijekcija na $\mathbb{Z}_+$. Koristeći (20) dobivamo da je $K_0(\mathrm{Tr}) : K_0(M_n(\mathbb{C})) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ izomorfizam grupa. □

(iii) Ako je H beskonačnodimenzionalni separabilni Hilbertov prostor, onda je $K_0(B(H)) = 0$.

Dokaz: Neka je H^n Hilbertov prostor $H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$ (n puta) i primijetimo da možemo identificirati matričnu algebru $M_n(B(H))$ s operatorskom algebrom $B(H^n)$. Preslikavanje $\dim : P_\infty(B(H)) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ dano s

$$\dim(p) = \dim(pH^n), \quad p \in P_n(B(H)) = P(B(H^n)),$$

je surjektivno. Koristeći propoziciju 3.30 (i), dobivamo da je za sve projektore $p, q \in P_n(B(H))$ $\dim(p) = \dim(q)$ ako i samo ako je $p \overset{MvN}{\sim} q$. Kako je $\dim(p \oplus 0) = \dim(p)$, dobivamo da je za sve projektore $p, q \in P_\infty(B(H))$ $\dim(p) = \dim(q)$ ako i samo ako je $p \overset{0}{\sim} q$. Dimenzija je aditivna, pa je $\dim(p \oplus q) = \dim(p) + \dim(q)$. To nam pokazuje da je s $d([p]_D) = \dim(p)$ dobro definiran izomorfizam polugrupa

$$d : D(B(H)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}. \tag{31}$$

Zbog toga je $K_0(B(H))$ izomorfna Grothendieckovoj grupi $G(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$. Budući da je $n + \infty = m + \infty = \infty$, za sve $m, n \in \mathbb{Z}_+$, zaključujemo da se $G(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$ sastoji od samo jedne klase ekvivalencije, pa je $G(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}) = 0$. Zato je i $K_0(B(H)) = 0$. □

5 Funktor K_0

U ovoj točki proširujemo funktor K_0, kojeg smo definirali u prošloj točki, do funktora definiranog na kategoriji svih C^*-algebri. Nadalje, dokazat ćemo da funktor K_0 ima slijedeća svojstva: poluegzaktnost, homotopska invarijantnost, rascjepivost, a u slijedećoj točki ćemo dokazati da K_0 ima i još dva bitna svojstva: neprekidnost i stabilnost.

5.1 Definicija i funktorijalnost od K_0

Definicija 5.1 Neka je A C^*-algebra bez jedinice i neka je dan rascjepivi SES

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & \dot{A} \arrow[r, shift left, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{32}$$

gdje su ι, π, λ, $\dot{A}$ definirani kao u napomeni 4.14. Grupu $K_0(A)$ definiramo kao jezgru induciranog homomorfizma $K_0(\pi) : K_0(\dot{A}) \to K_0(\mathbb{C})$.

Napomena 5.2 Primijetimo da je $K_0(A)$ Abelova grupa, budući da je podgrupa od $K_0(\dot{A})$.

Neka je $p \in P_\infty(A)$ i promotrimo klasu ekvivalencije $[p]_0 \in K_0(\dot{A})$. Budući da je $K_0(\pi)([p]_0) = [\pi(p)]_0 = 0$, slijedi da je $[p]_0$ element od $K_0(A) = \mathrm{Ker}(K_0(\pi))$. Na taj način dolazimo do preslikavanja $[\cdot]_0 : P_\infty(A) \to K_0(A)$.
Za svaku C^*-algebru (s jedinicom ili bez nje), imamo SES

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(\dot{A}) \xrightarrow{\quad K_0(\pi) \quad} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0. \tag{33}$$

Napomena 5.3 Ako A ima jedinicu, preslikavanje $K_0(A) \to K_0(\dot{A})$ je upravo $K_0(\iota)$ i iz leme 4.16, dobivamo da je niz (33) egzaktan.

Napomena 5.4 Ako A ima jedinicu, $K_0(A)$ je izomorfna svojoj slici u $K_0(\dot{A})$ pod $K_0(\iota)$ i $K_0(\iota)$ preslikava $[p]_0$ iz $K_0(A)$ u $[p]_0$ iz $K_0(\dot{A})$, za sve $p \in P_\infty(A)$. Zbog egzaktnosti od (33) i napomene 5.3, slika od $K_0(\iota)$ je jednaka jezgri od $K_0(\pi)$, pa jednakost

$$K_0(A) = \mathrm{Ker}(K_0(\pi)) \tag{34}$$

vrijedi za sve C^*-algebre (s jedinicom, ili bez nje). Naravno, ako A ima jedinicu, pod (34) mislimo na $K_0(A) \cong \mathrm{Ker}(K_0(\pi))$.

Neka su A i B C^*-algebre, neka je $\varphi : A \to B$ $*$-homomorfizam i neka je $\dot{\varphi} : \dot{A} \to \dot{B}$ njegovo proširenje na unitalizacije ($\dot{\varphi}(a + \alpha 1_{\dot{A}}) = \varphi(a) + \alpha 1_{\dot{B}},\ a \in A, \alpha \in \mathbb{C}$). Po funktorijalnosti od K_0 za

C^*-algebre s jedinicom, komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \dot{A} \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\dot{\varphi}"'] & \mathbb{C} \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\iota_B"'] & \dot{B} \arrow[r, "\pi_B"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

i (33) induciraju komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "K_0(\varphi)"'] & K_0(\dot{A}) \arrow[r, "K_0(\pi_A)"] \arrow[d, "K_0(\dot{\varphi})"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\ K_0(B) \arrow[r] & K_0(\dot{B}) \arrow[r, "K_0(\pi_B)"'] & K_0(\mathbb{C}) \end{tikzcd} \tag{35}$$

Postoji jedan i samo jedan homomorfizam grupa $K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$ (koji je u dijagramu (35) označen s iscrtkanom strelicom) takav da dijagram (35) komutira, i $K_0(\varphi) = K_0(\dot{\varphi})_{|K_0(A)}$, tj. $K_0(\varphi)$ je restrikcija od $K_0(\dot{\varphi})$ na $K_0(A)$.
Pretpostavimo da su A i B C^*-algebre s jedinicom. Homomorfizam $K_0(\varphi)$ smo definirali u prošloj točki, s (22). Po funktorijalnosti od K_0 za C^*-algebre s jedinicom (propozicija 4.8), dijagram (35) (s $K_0(\varphi)$ kao u (22)) je komutativan. To nam pokazuje da sadašnja definicija od $K_0(\varphi)$ proširuje definiciju od $K_0(\varphi)$ iz prošle točke.
Primijetimo da je

$$K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0, \quad p \in P_\infty(A), \tag{36}$$

imala A jedinicu ili ne.

U analogiji s propozicijom 4.8, slijedeća propozicija 5.5 nam govori da je K_0 funktor iz kategorije C^*-algebri u kategoriju Abelovih grupa. Dijelovi (*iii*) i (*iv*) nam govore da K_0 preslikava nul-objekte u nul-objekte i nul-morfizme u nul-morfizme.

Propozicija 5.5 (Funktorijalnost od K_0)

(*i*) $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$, *za svaku* C^**-algebru* A.

(*ii*) *Ako su* A, B *i* C C^**-algebre i ako su* $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$ $*$*-homomorfizmi, tada je* $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.

(*iii*) $K_0(0) = 0$.

(*iv*) $K_0(0_{B,A}) = 0_{K_0(B),K_0(A)}$, *za svaki par* C^**-algebri* A *i* B.

Dokaz: Tvrdnje (*i*) i (*ii*) slijede direktno iz propozicije 4.8, budući da je $\dot{\mathrm{id}}_A = \mathrm{id}_{\dot{A}}$ i $\dot{\overline{\psi \circ \varphi}} = \dot{\psi} \circ \dot{\varphi}$.
(*iii*) Očito je $\dot{0} = \mathbb{C}$, pa niz (32), za $A = 0$, postaje

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

gdje je $\pi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Slijedi da je $K_0(0) = \mathrm{Ker}(K_0(\pi)) = 0$.
(iv) slijedi direktno iz (iii) (kao što smo dokazali (iv) iz propozicije 4.8). ■

Propozicija 5.6 (Homotopska invarijantnost od K_0) *Neka su A i B C^*-algebre. Tada vrijedi:*

(i) Ako su $\varphi, \psi : A \to B$ homomtopni $*$-homomorfizmi, onda je $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Ako su A i B homotopski ekvivalentne C^*-algebre, onda je $K_0(A)$ izomorfna s $K_0(B)$. Preciznije, ako je

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$$

homotopija, onda su $K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$ i $K_0(\psi) : K_0(B) \to K_0(A)$ izomorfizmi i $K_0(\varphi)^{-1} = K_0(\psi)$.

(iii) Ako je A kontraktibilna, onda je $K_0(A) = 0$.

Dokaz: (i) Ako je $\varphi \overset{h}{\sim} \psi$, tada je očito i $\dot{\varphi}$ homotopan s $\dot{\psi}$, pa je po propoziciji 4.11 $K_0(\dot{\varphi}) = K_0(\dot{\psi})$. Budući da su $K_0(\varphi)$ i $K_0(\psi)$ restrikcije od $K_0(\dot{\varphi})$ i $K_0(\dot{\psi})$ na $K_0(A)$ (respektivno), slijedi da je $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.
(ii) slijedi iz (i) i propozicije 4.11 (i), (ii), a (iii) slijedi direktno iz (ii). ■

Primjer 5.7 Za C^*-algebru A definiramo **konus** CA i **suspenziju** SA na slijedeći način:

$$CA := \{f \in C([0,1] \to A) : f(0) = 0\}, \tag{37}$$

$$SA := \{f \in C([0,1] \to A) : f(0) = f(1) = 0\}. \tag{38}$$

Ako s $\iota : SA \to CA$ označimo inkluziju i s $\pi : CA \to A$ $*$-homomorfizam definiran s $\pi(f) = f(1)$, $f \in CA$, onda dobivamo SES

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\iota} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \ .$$

Primijetimo da je konus CA kontraktibilan. Zaista, ako stavimo

$$\Phi_t : CA \to CA, \quad \Phi_t(f)(s) := f(st), \quad f \in CA, \ s,t \in \mathrm{I} = [0,1],$$

onda je preslikavanje $t \mapsto \Phi_t(f)$ neprekidno za sve $f \in CA$, $\Phi_0 = 0$ i $\Phi_1 = \mathrm{id}$. To nam pokazuje da je

$$CA \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} CA$$

homotopija. Iz propozicije 5.6 (iii) dobivamo $K_0(CA) = 0$.

5.2 Standardna slika grupe $K_0(A)$

Kao što smo propozicijom 4.6 dali opis elemenata grupe $K_0(A)$ za C^*-algebre s jedinicom, ovdje ćemo dati opis elemenata grupe $K_0(A)$ za općenite C^*-algebre (s jedinicom ili bez nje).

Definicija 5.8 Promotrimo SES

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & \dot{A} \arrow[r, shift left, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dobiven unitalizacijom C^*-algebre A. Definiramo **skalarno preslikavanje** s:

$$s = \lambda \circ \pi : \dot{A} \to \dot{A}, \quad \text{tj. } s(a + \alpha 1) = \alpha 1, \ a \in A, \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Napomena 5.9 Primijetimo da je $\pi(s(x)) = \pi(x)$ i da je $x - s(x)$ element od A, za sve $x \in \dot{A}$.

Neka je

$$s_n : M_n(\dot{A}) \to M_n(\dot{A})$$

$*$-homomorfizam induciran preslikavanjem s, kao u napomeni 3.2. Slika od s_n je podskup $M_n(\mathbb{C})$ od $M_n(\dot{A})$, koji se sastoji od svih matrica sa skalarnim vrijednostima i $x - s_n(x) \in M_n(A)$ za sve $x \in M_n(\dot{A})$. Napomenimo da ćemo ubuduće često ispuštati indeks n u s_n, pa ćemo jednostavno pisati s.
Za element x iz $\dot{A}$ (ili iz $M_n(\dot{A})$) kažemo da je **skalarni element** ako je $x = s(x)$, tj. ako su sve vrijednosti od s skalarni multipli od $1_{\dot{A}}$.
Skalarno preslikavanje je prirodno, u slijedećem smislu: Ako su A i B C^*-algebre i $\varphi : A \to B$ $*$-homomorfizam, tada dobivamo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd} \dot{A} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\dot{\varphi}"'] & \dot{A} \arrow[d, "\dot{\varphi}"] \\ \dot{B} \arrow[r, "s"] & \dot{B} \end{tikzcd}$$

Propozicija 5.10 (Standardna slika od $K_0(A)$) *Za svaku C^*-algebru A imamo*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : \ p \in P_\infty(\dot{A})\}. \tag{39}$$

Štoviše, vrijedi slijedeće:

(i) Za svaki par projektora $p, q \in P_\infty(\dot{A})$, slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(a) $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$.

(b) Postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $p \oplus 1_k \overset{0}{\sim} q \oplus 1_l$ u $P_\infty(\dot{A})$.

(c) Postoje skalarni projektori r_1, r_2 takvi da je $p \oplus r_1 \overset{0}{\sim} q \oplus r_2$.

(ii) *Ako je $p \in P_\infty(\dot{A})$ takav da je $[p]_0 - [s(p)]_0 = 0$, tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $p \oplus 1_m \overset{MvN}{\sim} s(p) \oplus 1_m$.*

(iii) *Ako je $\varphi : A \to B$ $*$-homomorfizam, tada je*

$$K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\dot{\varphi}(p)]_0 - [s(\dot{\varphi}(p))]_0,$$

za sve $p \in P_\infty(\dot{A})$.

Dokaz: Za dokaz jednakosti (39), najprije primijetimo da je za $p \in P_\infty(\dot{A})$

$$K_0(\pi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\pi(p)]_0 - [(\pi \circ s)(p)]_0 = 0 \ ,$$

budući da je $\pi = \pi \circ s$. Iz toga vidimo da je $[p]_0 - [s(p)]_0$ element od $\mathrm{Ker}(\pi) = K_0(A)$, za sve projektore $p \in P_\infty(\dot{A})$.
Obratno, ako je $g \in K_0(A)$, tada postoji $n \in \mathbb{N}$ i projektori $e, f \in P_n(\dot{A})$, takvi da je $g = [e]_0 - [f]_0$. Stavimo

$$p := \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1_n - f \end{pmatrix}, \qquad q := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} .$$

Tada su p i q projektori iz $P_{2n}(\dot{A})$ i imamo

$$[p]_0 - [q]_0 = [e]_0 + [1_n - f]_0 - [1_n]_0 = [e]_0 - [f]_0 = g \ .$$

Budući da je $q = s(q)$ i $K_0(\pi)(g) = 0$, zaključujemo da je

$$[s(p)]_0 - [q]_0 = [s(p)]_0 - [s(q)]_0 = K_0(s)(g) = (K_0(\lambda) \circ K_0(\pi))(g) = 0.$$

To nam pokazuje da je $g = [p]_0 - [s(p)]_0$.
(i) Neka su nam dani $p, q \in P_\infty(\dot{A})$ i pretpostavimo da vrijedi $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$. Tada je $[p \oplus s(q)]_0 = [q \oplus s(p)]_0$, pa je po propoziciji 4.6 $p \oplus s(q) \overset{s}{\sim} q \oplus s(p)$ u $P_\infty(\dot{A})$. Po napomeni 4.5, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $p \oplus s(q) \oplus 1_n \overset{0}{\sim} q \oplus s(p) \oplus 1_n$. To nam pokazuje implikaciju $(a) \Rightarrow (c)$. Da vidimo da $(c) \Rightarrow (b)$, najprije primijetimo da ako su r_1, r_2 skalarni projektori iz $P_\infty(\dot{A})$ dimenzija k i l (respektivno), onda je $r_1 \overset{0}{\sim} 1_k$ i $r_2 \overset{0}{\sim} 1_l$. Naime, imamo izomorfizam $M_n(\mathbb{C}1_{\dot{A}}) \cong M_n(\mathbb{C})$, a u $M_n(\mathbb{C})$ je trag projektora jednak svome rangu i po (30) je $q_1 \overset{0}{\sim} q_2 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(q_1) = \mathrm{Tr}(q_2)$, $q_1, q_2 \in M_n(\mathbb{C})$. Zbog toga je $p \oplus 1_k \overset{0}{\sim} q \oplus 1_l$.
Da vidimo da $(b) \Rightarrow (a)$, najprije primijetimo da je

$$[p \oplus 1_k]_0 - [s(p \oplus 1_k)]_0 = [p]_0 + [1_k]_0 - [s(p)]_0 - [1_k]_0 = [p]_0 - [s(p)]_0.$$

Zbog toga je dovoljno pokazati da je $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$, čim je $p \overset{0}{\sim} q$. Neka je stoga $p = v^*v$ i $q = vv^*$ za neku parcijalnu izometriju $v \in M_{m,n}(\dot{A})$. Neka je $s(v) \in M_{m,n}(\mathbb{C}) \subset M_{m,n}(\dot{A})$ matrica dobivena primjenom operatora s na svaku vrijednost od v. Tada je $s(v)^*s(v) = s(p)$ i $s(v)s(v)^* = s(q)$, pa je i $s(p) \overset{0}{\sim} s(q)$. Zato je $[p]_0 = [q]_0$ i $[s(p)]_0 = [s(q)]_0$, pa vrijedi (a).
(ii) Ako je $[p]_0 - [s(p)]_0 = 0$, tada je po propoziciji 4.6 (v) $p \overset{s}{\sim} s(p)$, pa po napomeni 4.5 postoji

$m \in \mathbb{N}$ takav da je $p \oplus 1_m \overset{MvN}{\sim} s(p) \oplus 1_m$.
(iii) Po definiciji, imamo

$$K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) = K_0(\dot{\varphi})([p]_0 - [s(p)]_0) = [\dot{\varphi}(p)]_0 - [\dot{\varphi}(s(p))]_0 = [\dot{\varphi}(p)]_0 - [s(\dot{\varphi}(p))]_0 \ . \quad \blacksquare$$

Slijedeća tehnička lema će nam trebati u dokazu svojstva poluegzaktnosti funktora K_0.

Lema 5.11 *Neka su A i B C^*-algebre i neka je $\varphi : A \to B$ $*$-homomorfizam. Pretpostavimo da element $g \in K_0(A)$ pripada jezgri od $K_0(\varphi)$.*

(i) *Tada postoje $n \in \mathbb{N}$, projektor $p \in P_n(\dot{A})$ i unitarni element $u \in M_n(\dot{B})$ takvi da je $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ i $u\dot{\varphi}(p)u^* = s(\dot{\varphi}(p))$.*

(ii) *Ako je φ surjektivan, tada postoji projektor $p \in P_\infty(\dot{A})$ za je ispunjeno $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ i $\dot{\varphi}(p) = s(\dot{\varphi}(p))$.*

Dokaz: (i) Iz propozicije 5.10 slijedi da postoje $k \in \mathbb{N}$ i projektor $p_1 \in P_k(\dot{A})$ takav da je $g = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0$ i $[\dot{\varphi}(p_1)]_0 - [s(\dot{\varphi}(p_1))]_0 = 0$. Iz propozicije 5.10 (ii) dobivamo da je $\dot{\varphi}(p_1) \oplus 1_m \overset{MvN}{\sim} s(\dot{\varphi}(p_1)) \oplus 1_m$, za neko $m \in \mathbb{N}$. Stavimo $p_2 := p_1 \oplus 1_m$. Tada je $p_2 \in P_{k+m}(\dot{A})$, $g = [p_2]_0 - [s(p_2)]_0$ i

$$\dot{\varphi}(p_2) = \dot{\varphi}(p_1) \oplus 1_m \overset{MvN}{\sim} s(\dot{\varphi}(p_1)) \oplus 1_m = s(\dot{\varphi}(p_2)).$$

Neka je $n := 2(k+m)$ i neka je 0_{k+m} nulprojektor iz $M_{k+m}(\dot{A})$. Stavimo $p := p_2 \oplus 0_{k+m}$, tako da p leži u $P_n(\dot{A})$. Očito je $g = [p]_0 - [s(p)]_0$. Iz propozicije 3.33 slijedi da postoji unitarni element $u \in M_n(\dot{B})$ takav da je $u\dot{\varphi}(p)u^* = s(\dot{\varphi}(p))$.
(ii) Iz (i) slijedi da možemo naći $n \in \mathbb{N}$, projektor $p_1 \in M_n(\dot{A})$ i unitarni element $u \in M_n(\dot{B})$ za koje je $g = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0$ i $u\dot{\varphi}(p_1)u^* = s(\dot{\varphi}(p_1))$. Po lemi 3.10, postoji unitarni element $v \in M_{2n}(\dot{A})$ takav da je $\dot{\varphi}(v) = \mathrm{diag}(u, u^*)$. Stavimo $p := v\mathrm{diag}(p_1, 0_n)v^*$. Tada je p projektor iz $M_{2n}(\dot{A})$ i

$$\dot{\varphi}(p) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(p_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(\dot{\varphi}(p_1)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

Iz toga vidimo da je $s(\dot{\varphi}(p)) = \dot{\varphi}(p)$. Konačno, budući da je $p \overset{0}{\sim} p_1$, iz propozicije 5.10 (i) slijedi da je $g = [p]_0 - [s(p)]_0$. $\blacksquare$

5.3 Poluegzaktnost i rascjepivost funktora K_0

Lema 5.12 *Neka je*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

SES C^*-algebri i neka je $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Preslikavanje $\dot{\varphi}_n : M_n(\dot{I}) \to M_n(\dot{A})$ je injektivno.*

(ii) Element $a \in M_n(\dot{A})$ pripada slici od $\dot{\varphi}_n$ ako i samo ako je $\dot{\psi}_n(a) = s_n(\dot{\psi}_n(a))$.

Dokaz: (i) je trivijalno.
(ii) Neka je $a \in M_n(\dot{A})$, $a = ((x_{ij}, z_{ij}))_{i,j}$. Po definiciji je $\dot{\psi}_n(a) = (\psi(x_{ij}), z_{ij})_{i,j}$, pa je $\dot{\psi}_n(a) = s_n(\dot{\psi}(a)) \Leftrightarrow x_{ij} \in \mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$ za sve $i, j \Leftrightarrow$ postoje $a_{ij} \in I$ takvi da je $\varphi(a_{ij}) = x_{ij}$ za sve i, j $\Leftrightarrow a \in \mathrm{Im}(\varphi_{\mathrm{n}})$. ■

Teorem 5.13 (Poluegzaktnost i rascjepivost funktora K_0) *Svaki SES C^*-algebri*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \tag{40}$$

inducira egzaktni niz Abelovih grupa

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B).$$

Ako je niz (40) još i rascjepiv

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, shift left, "\psi"] & B \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

tada je niz K_0-grupa

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(I) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(A) \arrow[r, shift left, "K_0(\psi)"] & K_0(B) \arrow[l, shift left, "K_0(\lambda)"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{41}$$

egzaktan i rascjepiv.

Dokaz: Inkluziju $\mathrm{Im}(K_0(\varphi)) \subset \mathrm{Ker}(K_0(\psi))$ dobivamo iz funktorijalnosti od K_0,

$$K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(0) = 0.$$

Obratno, pretpostavimo da je $g \in \mathrm{Ker}(K_0(\psi))$. Po lemi 5.11 (ii), postoji $n \in \mathbb{N}$ i projektor $p \in P_n(\dot{A})$ takav da je $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ i $\dot{\psi}(p) = s(\dot{\psi}(p))$. Po lemi 5.12 (ii), postoji $e \in M_n(\dot{I})$ takav da je $\dot{\varphi}(e) = p$. Iz leme 5.12 također znamo da je $\dot{\varphi}$ injektivan. Zato e mora biti projektor. Sada imamo

$$g = [\dot{\varphi}(e)]_0 - [s(\dot{\varphi}(e))]_0 = K_0(\varphi)([e]_0 - [s(e)_0]) \in \mathrm{Im}(K_0(\varphi)).$$

Pretpostavimo sada da je niz (41) rascjepiv. Po prethodnom, niz (41) je egzaktan kod $K_0(A)$. Kako je $\psi \circ \lambda = \mathrm{id}_B$, iz funktorijalnosti od K_0 dobivamo $K_0(\psi) \circ K_0(\lambda) = \mathrm{id}_{K_0(B)}$. Zato jedino što treba dokazati je injektivnost od $K_0(\varphi)$.
Neka je $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Po lemi 5.11 (i), postoje $n \in \mathbb{N}$, projektor $p \in P_n(\dot{I})$ i unitarni element $u \in M_n(\dot{A})$ takvi da je $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ i $u\dot{\varphi}(p)u^* = s(\dot{\varphi}(p))$. Stavimo $v := (\dot{\lambda} \circ \dot{\psi})(u^*)u$. Tada je v unitarni element iz $M_n(\dot{A})$ i $\dot{\psi}(v) = 1$. Po lemi 5.12 (ii), postoji $w \in M_n(\dot{I})$ takav da je $\dot{\varphi}(w) = v$. Budući da je $\dot{\varphi}$ injektivan, w mora biti unitaran. Sada iz računa

$$\dot{\varphi}(wpw^*) = v\dot{\varphi}(p)v^* = (\dot{\lambda} \circ \dot{\psi})(u^*)s(\dot{\varphi}(p))(\dot{\lambda} \circ \dot{\psi})(u) = (\dot{\lambda} \circ \dot{\psi})(u^* s(\dot{\varphi}(p))u)$$

$$= (\dot{\lambda} \circ \dot{\psi})(\dot{\varphi}(p)) = s(\dot{\varphi}(p)) = \dot{\varphi}(s(p))$$

i iz injektivnosti od $\dot{\varphi}$ zaključujemo da je $wpw^* = s(p)$. To nam pokazuje da je $p \overset{u}{\sim} s(p)$ u $M_n(\dot{I})$, pa je zato $g = 0$. ■

Prisjetimo se pojma **direktne sume** dviju C^*-algebri.
Ako su A i B C^*-algebre, tada je njihova direktna suma $A \oplus B$ C^*-algebra formirana od svih parova (a, b), $a \in A$ i $b \in B$. Operacije u $A \oplus B$ su definirane po komponentama, dok je norma definirana s

$$\|(a, b)\| := \max\{\|a\|, \|b\|\}.$$

Ako definiramo preslikavanja $\iota_A : A \to A \oplus B$, $\iota_B : B \to A \oplus B$, $\pi_A : A \oplus B \to A$ i $\pi_B : A \oplus B \to B$ s $\iota_A(a) := (a, 0)$, $\iota_B(b) := (0, b)$, $\pi_A(a, b) := a$ i $\pi_B(a, b) := b$, tada je niz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota_A"] & A \oplus B \arrow[r, shift left, "\pi_B"] & B \arrow[l, shift left, "\iota_B"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

rascjepivi SES.

Propozicija 5.14 (Aditivnost funktora K_0) *Za svaki par C^*-algebri A i B imamo:*

$$K_0(A \oplus B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B).$$

Preciznije, ako su $\iota_A : A \to A \oplus B$ i $\iota_B : B \to A \oplus B$ kanonske inkluzije, tada je preslikavanje

$$K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B) : K_0(A) \oplus K_0(B) \to K_0(A \oplus B),$$

koje preslikava par $(g, h) \in K_0(A) \oplus K_0(B)$ u $K_0(\iota_A)(g) + K_0(\iota_B)(h)$ izomorfizam.

Dokaz: Promotrimo dijagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & K_0(A) \oplus K_0(B) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)"] & K_0(B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\iota_A)"'] & K_0(A \oplus B) \arrow[r, "K_0(\pi_B)"'] & K_0(B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

gdje su $\alpha(g) := (g, 0)$, $\beta(g, h) := h$ i $\pi_B(a, b) = b$. Prvi red u dijagramu je očito egzaktan, a da je i drugi red egzaktan, slijedi iz teorema 5.13. Nadalje, primijetimo da je dijagram komutativan, jer je $\pi_B \circ \iota_A = 0$ i $\pi_B \circ \iota_B = \mathrm{id}_B$. Uvjeti Pet-leme su zadovoljeni, pa je preslikavanje $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)$ izomorfizam. ■

Primjer 5.15 U primjeru 4.17 (ii) smo pokazali da je $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$. Iz toga i iz rascjepivosti od K_0 (propozicija 5.13) dobivamo da je za svaku C^*-algebru

$$K_0(\dot{A}) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}.$$

Primjer 5.16 Funktor K_0 nije egzaktan, tj. ako je $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ SES C^*-algebri, tada inducirani niz K_0-grupa $0 \longrightarrow K_0(I) \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow K_0(B) \longrightarrow 0$ ne mora nužno biti egzaktan. Jednostavan primjer za to dobivamo ako promotrimo niz

$$0 \longrightarrow C_0(\langle 0,1\rangle) \xrightarrow{\iota} C([0,1]) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0, \tag{42}$$

gdje je ι inkluzija i $\psi(f) := (f(0), f(1))$. Očito je niz (42) egzaktan. Budući da je $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$, iz propozicije 5.14 dobivamo da je $K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Zbog (19) i (6) imamo izomorfizme $K_0(C([0,1])) \cong K_0^{\text{alg}}(C([0,1])) \cong K^0([0,1]) \cong \mathbb{Z}$, jer je $[0,1]$ kontraktibilan, pa $K_0(\psi)$ ne može biti surjektivan.

Primjer 5.17 Drugi primjer da funktor K_0 nije egzaktan dobivamo na slijedeći način: Neka je H beskonačnodimenzionalni separabilni Hilbertov prostor i neka je $\mathcal{K} := K(H)$ ideal kompaktnih operatora u $B(H)$. Ako s $\mathrm{Cal}(H)$ označimo Calkinovu algebru $B(H)/\mathcal{K}$, onda je niz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} B(H) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cal}(H) \longrightarrow 0$$

egzaktan. No vidjeli smo da je $K_0(B(H)) = 0$, a u korolaru 6.15 ćemo pokazati da je $K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$, pa $K_0(\iota)$ ne može biti injektivan.

6 Neprekidnost i stabilnost funktora K_0

U ovom poglavlju dokazujemo dva bitna svojstva funktora K_0: neprekidnost i stabilnost. No najprije moramo uvesti pojam induktivnog limesa niza C^*-algebri i dokazati njegovu egzistenciju.

6.1 Produkti i sume C^*-algebri

Ako je dana familija $\{A_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ C^*-algebri, tada možemo konstruirati dvije nove C^*-algebre, produkt $\prod_{i\in\mathbb{I}} A_i$ i sumu $\sum_{i\in\mathbb{I}} A_i$, na slijedeći način. Neka je $\prod_{i\in\mathbb{I}} A_i$ skup svih funkcija $a : \mathbb{I} \to \bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i$ za koje je $a_i := a(i) \in A_i$, za sve $i \in \mathbb{I}$ i za koje je

$$\|a\| := \sup\{\|a_i\|_{A_i} : i \in \mathbb{I}\} < \infty.$$

Od sada pa nadalje ćemo ispuštati indeks A_i u $\|a_i\|_{A_i}$ i jednostavno pisati $\|a_i\|$. Nadalje, element $(a_i)_{i\in\mathbb{I}}$ iz $\prod A_i$ ćemo kraće zapisivati s (a_i).
Skup $\prod A_i$ prirodno snabdjevamo operacijom zbrajanja, množenja, množenja skalarom i involucijom, naravno, po koordinatama. Time $\prod A_i$ postaje $*$-algebra.

Propozicija 6.1 *Produkt $\prod_{i\in\mathbb{I}} A_i$ je C^*-algebra.*

Dokaz: Pokazat ćemo nejednakost trokuta, C^*-svojstvo ($\|a^*a\| = \|a\|^2$) i da je $\prod A_i$ potpuna.
Neka su stoga dani $a = (a_i)$ i $b = (b_i)$ iz $\prod A_i$. Primijetimo da je $\|a_i\| \leq \|a\|$, za sve $i \in \mathbb{I}$. Zato imamo

$$\|(a+b)_i\| = \|a_i + b_i\| \leq \|a_i\| + \|b_i\| \leq \|a\| + \|b\|,$$

za sve $i \in \mathbb{I}$, pa je $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$.
Budući da imamo $\|(a^*a)_i\| = \|a_i^* a_i\| = \|a_i\|^2$, za sve $i \in \mathbb{I}$, zaključujemo da je $\|a^*a\| = \|a\|^2$.
Neka je $(a^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset \prod A_i$ Cauchyev niz. Tada je $(a_i^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ Cauchyev niz u A_i i neka je $a_i := \lim_{n\to\infty} a_i^{(n)}$, gdje je $i \in \mathbb{I}$ fiksno. Stavimo $a := (a_i)_{i\in\mathbb{I}}$. Neka je dan $\varepsilon > 0$ i uzmimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\|a^{(n)} - a^{(m)}\| \leq \varepsilon$, čim je $n, m \geq n_0$. Tada je za svako $n \geq n_0$ i za svaki $i \in \mathbb{I}$

$$\|a_i^{(n)} - a_i\| = \lim_{m\to\infty} \|a_i^{(n)} - a_i^{(m)}\| \leq \varepsilon. \tag{43}$$

Zato je

$$\|a_i\| \leq \|a_i^{(n_0)}\| + \varepsilon \leq \|a^{(n_0)}\| + \varepsilon,$$

za sve $i \in \mathbb{I}$ i time odmah vidimo da a pripada produktu $\prod A_i$. Iz (43) slijedi da je $\|a^{(n)} - a\| \leq \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$, iz čega slijedi da $a^{(n)} \to a$, kada $n \to \infty$. Time je dokazana potpunost od $\prod A_i$. ■

Neka je $\sum_{i\in\mathbb{I}} A_i$ zatvarač podskupa

$$\mathcal{I} := \{a \in \prod_{i\in\mathbb{I}} A_i : \ \mathrm{card}\{i \in I : a(i) \neq 0\} < \infty\}$$

od $\prod A_i$. Očigledno vrijedi tvrdnja slijedeće propozicije.

Propozicija 6.2 *Skup $\mathcal{I}$ je obostrani (i ne nužno zatvoreni) ideal u $\prod_{i\in\mathbb{I}} A_i$ i $\sum_{i\in\mathbb{I}} A_i$ je obostrani i zatvoreni ideal u $\prod_{i\in\mathbb{I}} A_i$. Posebno, $\sum_{i\in\mathbb{I}} A_i$ je C^*-algebra.*

Neka je π kvocijentno preslikavanje $\prod A_i \to \prod A_i / \sum A_i$. Ako je $\mathbb{I} = \mathbb{N}$, vrijedi slijedeća lema.

Lema 6.3 *Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz C^*-algebri i neka je $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ element od $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Tada je*

$$\|\pi(a)\| = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|.$$

Posebno, a je element od $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ako i samo ako je $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0$.

Dokaz: Budući da je $\mathcal{I}$ gust u $\sum A_n$ i zbog neprekidnosti preslikavanja $b \mapsto \|a - b\| : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ imamo $\|\pi(a)\| = \inf\{\|a - b\| : b \in \mathcal{I}\}$. No $b = (b_n)$ je iz $\mathcal{I}$, pa je $b_n = 0$ za skoro sve $n \in \mathbb{N}$. Zbog toga je

$$\|a - b\| \geq \limsup_{n\to\infty} \|a_n - b_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|.$$

To nam daje nejednakost $\|\pi(a)\| \geq \limsup \|a_n\|$.
Za svako $k \in \mathbb{N}$, neka je $b^{(k)} = (b_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ element iz $\mathcal{I}$ definiran s

$$b_n^{(k)} := \begin{cases} a_n \ , \ n \leq k, \\ 0 \ \ , \ n > k. \end{cases}$$

Imamo

$$\|\pi(a)\| \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \|a - b^{(k)}\| = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n>k} \|a_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|. \quad ■$$

6.2 Induktivni limesi C^*-algebri

Kao što smo već i napomenuli, svojstvo neprekidnosti funktora K_0 bit će iskazano u terminima induktivnih limesa niza C^*-algebri. No, pokazuje se korisnim da definiciju induktivnog limesa damo u terminima jezika teorije kategorija. Naša primjena induktivnih limesa obuhvaćat će samo kategoriju C^*-algebri i kategoriju Abelovih grupa.

Definicija 6.4 **Induktivni niz** u kategoriji $\mathcal{C}$ je niz $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ objekata iz $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ i niz morfizama $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ s $\varphi_n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_n, A_{n+1})$, što obično zapisujemo s

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots .$$

Za $m > n$ definiramo morfizme

$$\varphi_{m,n} := \varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-2} \circ \cdots \varphi_n : A_n \to A_m,$$

koje, zajedno s morfizmima φ_n zovemo **vezni morfizmi**. Ponekad je korisno promatrati i vezne morfizme $\varphi_{m,n}$ za $m \leq n$. Njih definiramo s $\varphi_{n,n} := \mathrm{id}_{A_n}$ i $\varphi_{m,n} := 0$, za $m < n$ (ako kategorija $\mathcal{C}$ ima nul-objekt.)

Definicija 6.5 **Induktivni limes** induktivnog niza

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \tag{44}$$

u kategoriji $\mathcal{C}$ je sistem $(A, (\mu_n)_{n=1}^{\infty})$, takav da je A objekt iz $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, μ_n je morfizam iz $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_n, A)$, za svako $n \in \mathbb{N}$ i pri čemu, slijedeći uvjeti moraju biti zadovoljeni:

(*i*) Dijagram

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\mu_{n+1}"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{45}$$

komutira za svako $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) Ako je $(B, (\lambda_n)_{n=1}^{\infty})$ sistem, gdje je B objekt iz $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\lambda_n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_n, B)$ je morfizam takav da je $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$, tada postoji jedan i samo jedan morfizam $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\lambda_n"] & \\ A \arrow[rr, "\lambda"'] & & B \end{tikzcd} \tag{46}$$

komutira za sve $n \in \mathbb{N}$.

Induktivni limesi ne postoje u svim kategorijama. Na primjer, kategorija čiji su objekti konačni skupovi, a morfizmi funkcije ne podržava induktivne limese.
No ako postoje, induktivni limesi su esencijalno jedinstveni, u smislu da ako su $(A, (\mu_n))$ i $(B, (\lambda_n))$ induktivni limesi induktivnog niza (44), tada postoji jedan i samo jedan *izomorfizam* $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ za kojeg dijagram (46) komutira.
Zaista, iz definicije 6.5 (ii) slijedi da postoje jedinstveni morfizmi $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ i $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ za koje lijevi dijagram

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[d, "\lambda_n"] \arrow[dr, "\mu_n"] & \\ A \arrow[r, "\lambda"'] & B \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\mu_n"] & \\ A \arrow[rr, "\mathrm{id}_A"'] & & A \end{tikzcd}$$

komutira. Ako uvjet (ii) definicije 6.5 primijenimo na oba dijagrama, dobivamo da $\mu \circ \lambda$ mora biti identiteta na A. Slično, dobivamo da je $\lambda \circ \mu = \mathrm{id}_B$, pa su λ i μ izomorfizmi.
Induktivni limes niza (44) označavamo s $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$, ili jednostavnije, s $\varinjlim A_n$. Također ćemo pisati

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \longrightarrow A,$$

kako bi naglasili da je upravo A induktivni limes niza (44).

Propozicija 6.6 (Induktivni limesi C^*-algebri) *Svaki induktivni niz C^*-algebri*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

ima induktivni limes $(A, (\mu_n))$. Štoviše, vrijedi slijedeće:

(i) $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)}$.

(ii) $\|\mu_n(a)\| = \lim_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\|$, *za sve* $n \in \mathbb{N}$, $a \in A_n$.

(iii) $\mathrm{Ker}(\mu_n) = \{a \in A_n : \lim_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\| = 0\}$.

(iv) *Ako su $(B, (\lambda_n))$ i $\lambda : A \to B$ kao u (ii) definicije 6.5, tada vrijedi*

- (a) $\mathrm{Ker}(\mu_n) \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda_n)$, *za sve* $n \in \mathbb{N}$.
- (b) *λ je injektivan ako i samo ako je* $\mathrm{Ker}(\lambda_n) \subseteq \mathrm{Ker}(\mu_n)$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$.
- (c) *λ je surjektivan ako i samo ako je* $B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n)}$.

Dokaz: Neka je

$$\pi : \prod_{n=1}^{\infty} A_n \to \prod_{n=1}^{\infty} A_n / \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

kvocijentno preslikavanje i neka su $\varphi_{m,n} : A_n \to A_m$ vezna preslikavanja pridružena danom nizu C^*-algebri. Za svako $a \in A_n$, stavimo $\nu_n(a) := (\varphi_{m,n}(a))_{m=1}^\infty$ (prisjetimo se da je $\varphi_{n,n}(a) = a$ i da je $\varphi_{m,n}(a) = 0$, za $m < n$) i stavimo $\mu_n := \pi \circ \nu_n$. Tada su

$$\nu_n : A_n \to \prod_{m=1}^\infty A_m, \qquad \mu_n : A_n \to \prod_{m=1}^\infty A_m / \sum_{m=1}^\infty A_m$$

$*$-homomorfizmi. Neka je $a \in A_n$. Tada je $\nu_n(a) - (\nu_{n+1} \circ \varphi_n)(a)$ jednako nizu $(c_m)_{m=1}^\infty$, gdje je $c_n = a$ i $c_m = 0$ za $m \neq n$, pa taj niz pripada algebri $\sum_{m=1}^\infty A_m$. Zato je

$$\mu_n(a) - (\mu_{n+1} \circ \varphi_n)(a) = \pi(\nu_n(a) - (\nu_{n+1} \circ \varphi_n)(a)) = 0,$$

pa je $\mu_{n+1} \circ \varphi_n = \mu_n$. Iz toga slijedi da je $(\mu_n(A_n))_{n=1}^\infty$ rastući niz C^*-algebri. Zato je

$$A = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n)}$$

C^*-algebra i korestrikcija svakog μ_n je $*$-homomorfizam $A_n \to A$ i sistem $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ zadovoljava definiciju 6.5 (i).
(i) sada slijedi direktno iz konstrukcije od A.
(ii) Neka je $a \in A_n$. Tada je $\mu_n(a) = \pi(\nu_n(a))$, gdje je $\nu_n(a)$ niz $(\varphi_{m,n}(a))_{m=1}^\infty$. Koristeći lemu 6.3 dobivamo

$$\|\mu_n(a)\| = \|\pi(\nu_n(a))\| = \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\| = \lim_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\|. \tag{47}$$

Limes u (47) postoji, jer je $(\|\varphi_{m,n}(a)\|)_{m=n}^\infty$ padajući niz.
(iii) slijedi direktno iz (ii).
Dokazujemo $(iv)(a)$ i da $(A, (\mu_n))$ zadovoljava uvjet (ii) definicije 6.5. Pretpostavimo da je $(B, (\lambda_n))$ sistem kao u definiciji 6.5 (ii). Tada je $\lambda_m \circ \varphi_{m,n} = \lambda_n$ za sve $m > n$, pa je $\|\lambda_n(a)\| \leq \|\varphi_{m,n}(a)\|$, a zato je i

$$\|\lambda_n(a)\| \leq \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\| = \|\mu_n(a)\|.$$

Slijedi da je jezgra od λ_n sadržana u jezgri od μ_n. Iz prvog teorema o izomorfizmu slijedi da postoji jedinstveni $*$-homomorfizam $\lambda'_n : \mu_n(A_n) \to B$ takav da je $\lambda'_n \circ \mu_n = \lambda_n$. Zbog svoje jedinstvenosti, slijedi da λ'_{n+1} nužno proširuje λ'_n. Time dobivamo $*$-homomorfizam

$$\lambda' : \bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n) \to B$$

koji proširuje svaki λ'_n. Preslikavanje λ' je kontrakcija (tj. operatorska norma mu nije veća od 1), budući da su svi λ'_n kontrakcije. Zbog toga, po uniformnoj neprekidnosti možemo proširiti λ' do $*$-homomorfizma $\lambda : A \to B$. Ako restringiramo λ na $\mu_n(A_n)$ dobivamo λ'_n, pa je $\lambda \circ \mu_n = \lambda'_n \circ \mu_n = \lambda_n$. Jedinstvenost od λ obzirom na to svojstvo slijedi iz činjenice da je unija $\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n)$ gusta u A.
$(iv)(b)$ $*$-homomorfizam λ je injektivan ako i samo ako je izometrija, a to je slučaj ako i samo ako je λ' izometrija, a to je pak slučaj ako i samo su svi λ'_n izometrije, ili ekvivalentno, ako i samo ako su svi λ'_n injektivni. No λ'_n je injektivan ako i samo ako je $\mathrm{Ker}(\lambda_n) = \mathrm{Ker}(\mu_n)$.
$(iv)(c)$ slijedi iz činjenice da je slika od λ jednaka $\overline{\bigcup_{n=1}^\infty \lambda_n(A_n)}$. ■

Slično, ali ipak jednostavnije, dobivamo slijedeći rezultat:

Propozicija 6.7 (Induktivni limesi Abelovih grupa) *Svaki induktivni niz Abelovih grupa*

$$G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_3 \xrightarrow{\alpha_3} \cdots$$

ima induktivni limes $(G, (\beta_n))$. Štoviše, vrijedi slijedeće:

(i) $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(G_n)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(\beta_n) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \mathrm{Ker}(\alpha_{m,n})$, *za sve* $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Ako su $(H, (\gamma_n))$ i $\gamma : G \to H$ kao u (ii) definicije 6.5, tada vrijedi

(a) γ *je injektivan ako i samo ako je* $\mathrm{Ker}(\gamma_n) = \mathrm{Ker}(\beta_n)$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$.

(b) γ *je surjektivan ako i samo ako je* $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n(G_n)$.

Primjer 6.8 *(i)* Neka je D C^*-algebra i neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz C^*-podalgebri od D. Stavimo

$$A := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n},$$

i neka su $\iota_n : A_n \to A$ inkluzije. Tada je $(A, (\iota_n))$ induktivni limes niza $A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow \cdots$, gdje su vezna preslikavanja inkluzije $A_n \hookrightarrow A$.

(ii) Promotrimo niz

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi_1} M_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} M_3(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots, \tag{48}$$

gdje vezno preslikavanje φ_n preslikava $n \times n$ matricu u gornji lijevi kut $(n+1) \times (n+1)$ matrice čiji su svi elementi zadnjeg stupca i zadnjeg retka jednaki nula. Tada je induktivni limes tog niza izomorfan algebri kompatnih operatora $\mathcal{K} \subset B(H)$, gdje je H separabilni beskonačnodimenzionalni Hilbertov prostor.

Dokaz: U propoziciji 6.6 smo pokazati da svaki induktivni niz C^*-algebri ima induktivni limes, pa neka je $(\mathcal{K}\mathbb{C}, (\kappa_n))$ induktivni limes niza (48) (oznaka $\mathcal{K}\mathbb{C}$ bit će objašnjena u definiciji 6.12). Izaberimo ortonormiranu bazu $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ za H i neka je H_n potprostor od H razapet s $\{e_1, \dots e_n\}$. Tada je $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ rastući niz potprostora od H i $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ je gusto u H. Neka je $F_n \in B(H)$ projektor na H_n. Izaberimo izomorfizam $\psi_n : M_n(\mathbb{C}) \to B(H_n)$ takav da je a matrica operatora $\psi_n(a) \in B(H_n)$ obzirom na bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$, za sve $a \in M_n(\mathbb{C})$. Primijetimo da algebru $B(H_n)$ možemo na očit način identificirati s podalgebrom $F_nB(H)F_n$ od $B(H)$. Kao što znamo, $\mathcal{K}$ je jednaka zatvaraču unije $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_nB(H)F_n$ (vidi [18]), pa sa tim identifikacijama dobivamo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & M_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\psi_2"] & M_3(\mathbb{C}) \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\psi_3"] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{K}\mathbb{C} \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
F_1B(H)F_1 \arrow[r, "\iota"'] & F_2B(H)F_2 \arrow[r, "\iota"'] & F_3B(H)F_3 \arrow[r, "\iota"'] & \cdots \arrow[r, "\iota"'] & \mathcal{K}
\end{tikzcd} \tag{49}$$

Iz (i) slijedi da je $\mathcal{K}$ induktivni limes donjeg retka dijagrama (49), gdje su vezna preslikavanja inkluzije. Očigledno je $\psi_n = \psi_{n+1} \circ \varphi_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa iz (ii) definicije 6.5 slijedi da postoji jedinstveni $*$-homomorfizam $\psi : \mathcal{K}\mathbb{C} \to \mathcal{K}$ takav da je $\psi \circ \kappa_n = \psi_n$. Budući da su svi ψ_n injektivni, iz propozicije 6.6 $(iv)(b)$ slijedi injektivnost od ψ. Budući da je $\mathcal{K} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n B(H) F_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \psi_n(M_n(\mathbb{C}))}$, iz $(iv)(c)$ propozicije 6.6 slijedi surjektivnost od ψ. $\square$

(iii) U kategoriji Abelovih grupa, induktivni limes niza

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \cdots$$

je izomorfan grupi $\mathbb{Q}$, gdje su vezna preslikavanja $n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dana s $1 \mapsto n$.

6.3 Neprekidnost funktora K_0

Lema 6.9 *Neka je A C^*-algebra.*

(i) Ako je $a \in A$ hermitski element s $\delta := \|a - a^2\| < 1/4$, onda postoji projektor $p \in A$ takav da je $\|a - p\| \leq 2\delta$.

(ii) Neka su p, q projektori iz A. Ako postoji element $x \in A$ takav da je $\|x^*x - p\| < 1/2$ i $\|xx^* - q\| < 1/2$, onda je $p \overset{MvN}{\sim} q$.

Dokaz: (i) Ako je $t \in \sigma(a)$, onda po teoremu o preslikavanju spektra slijedi da je $t - t^2 \in \sigma(a - a^2)$. Budući da je a hermitski, to je $t \in \mathbb{R}$, a iz $\|a - a^2\| = \delta < 1/4$ slijedi da je $|t - t^2| \leq \delta < 1/4$, pa t svakako pripada skupu $[-2\delta, 2\delta] \cup [1 - 2\delta, 1 + 2\delta]$. Dakle,

$$\sigma(a) \subseteq \{t \in \mathbb{R} : |t - t^2| \leq \delta\} \subseteq [-2\delta, 2\delta] \cup [1 - 2\delta, 1 + 2\delta].$$

Zbog toga, na $\sigma(a)$ možemo definirati neprekidnu funkciju f s

$$f(t) := \begin{cases} 0\,, & t \leq 2\delta, \\ 1\,, & t \geq 1 - 2\delta. \end{cases} \tag{50}$$

Stavimo $p := f(a)$. Budući da je $f = f^2 = \bar{f}$, p je projektor, a kako je $|t - f(t)| \leq 2\delta$ za sve $t \in \sigma(a)$, onda je i $\|a - p\| \leq 2\delta$.
(ii) Neka je

$$\delta := \frac{1}{2} \max\{\|x^*x - p\|, \|xx^* - q\|\} < \frac{1}{4}$$

i stavimo $\Gamma := \sigma(x^*x) \cup \sigma(xx^*)$. Tada je, po lemi 3.25, $\Gamma \subseteq [-2\delta, 2\delta] \cup [1 - 2\delta, 1 + 2\delta]$. Neka je $f \in C(\Gamma)$ definirana s (50). Tada su, kao u (i), elementi $p_0 := f(x^*x)$ i $q_0 := f(xx^*)$ projektori iz A koji zadovoljavaju $\|p - p_0\| \leq 4\delta < 1$, $\|q - q_0\| \leq 4\delta < 1$. Iz propozicije 3.26 slijedi da je $p \overset{h}{\sim} p_0$ i $q \overset{h}{\sim} q_0$, pa je pogotovo $p \overset{MvN}{\sim} p_0$ i $q \overset{MvN}{\sim} q_0$.
Primijetimo da je $xh(x^*x)x^* = h(xx^*)xx^*$ za sve $h \in C(\Gamma)$. Naime, ako je h polinom (tj. restrikcija polinoma na Γ), onda je to jasno, a budući da su polinomi gusti u $C(\Gamma)$, tvrdnja slijedi. Neka je

g pozitivna funkcija na $C(\Gamma)$ koja zadovoljava $tg(t)^2 = f(t)$, za sve $t \in \Gamma$ i stavimo $v := xg(x^*x)$. Sada imamo

$$v^*v = g(x^*x)x^*xg(x^*x) = f(x^*x) = p_0,$$

$$vv^* = xg(x^*x)^2x^* = g(xx^*)^2xx^* = g(xx^*) = q_0.$$

Zbog toga je $p_0 \overset{MvN}{\sim} q_0$, pa iz tranzitivnosti relacije $\overset{MvN}{\sim}$ slijedi da je $p \overset{MvN}{\sim} q$, kao što smo i htjeli dokazati. ■

Lema 6.10 *Neka je*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

induktivni niz C^*-algebri s induktivnim limesom $(A, (\mu_n))$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ fiksan i neka je $(B, (\psi_n))$ induktivni limes odgovarajućeg induktivnog niza

$$M_k(A_1) \xrightarrow{\varphi_1} M_k(A_2) \xrightarrow{\varphi_2} M_k(A_3) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots,$$

pri čemu, radi jednostavnosti oznaka, inducirane homomorfizme $\varphi_n : M_k(A_n) \to M_k(A_{n+1})$ i dalje označavamo s φ_n (napomena 3.2). Tada je $M_k(A) \cong B$.

Dokaz: Kako lijevi dijagram

$$\begin{tikzcd} M_k(A_n) \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & & M_k(A_{n+1}) \arrow[dl, "\mu_{n+1}"] \\ & M_k(A) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M_k(A_n) \arrow[dl, "\psi_n"'] \arrow[dr, "\mu_n"] & \\ B \arrow[rr, "\pi"'] & & M_k(A) \end{tikzcd}$$

komutira za svako n, iz definicje induktivnog limesa slijedi da postoji jedinstveni $*$-homomorfizam $\pi : B \to M_k(A)$ takav da desni dijagram komutira za svako n. Zbog propozicije 6.6 znamo da je $A = \overline{\cup_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_n)}$, pa je $M_k(A) = \overline{\cup_{n=1}^{\infty}\mu_n(M_k(A_n)))}$. Iz propozicije 6.6 $(iv)(c)$ slijedi surjektivnost od π. Provjerimo injektivnost od π. Po propoziciji 6.6 $(iv)(b)$, moramo provjeriti da je $\mathrm{Ker}(\mu_n) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_n)$. Neka je $\mu_n(a) = 0$, gdje je $a \in M_k(A_n)$ i neka je $\varepsilon > 0$. Ako je $b \in A_n$ i $\mu_n(b) = 0$, tada po propoziciji 6.6 (iii), postoji $m \geq n$ takav da je $\|\varphi_{mn}(b)\| < \varepsilon$. Primijenimo to na vrijednosti a_{ij} matrice a. Kako je $\mu_n(a) = 0$, to je $\mu_n(a_{ij}) = 0$, pa postoji $m_{ij} \geq n$ takav da je $\|\varphi_{nm}(a_{ij})\| < \varepsilon$ za sve $m \geq m_{ij}$. Iz nejednakosti (7) dobivamo ocjenu

$$\|\varphi_{nm}(a)\| \leq \sum_{i,j} \|\varphi_{nm}(a_{ij})\| < k^2\varepsilon, \quad m \geq m_{ij}.$$

Zato je je $\|\psi_n(a)\| = \|\psi_m\varphi_{nm}(a)\| \leq \|\varphi_{nm}(a)\| < k^2\varepsilon$. Ako pustimo da $\varepsilon \to 0$, dobivamo $\|\psi_n(a)\| = 0$, pa je $\psi_n(a) = 0$, tj. $a \in \mathrm{Ker}(\psi_n)$, kao što smo i htjeli dokazati. ■

Teorem 6.11 (Neprekidnost funktora K_0) *Za svaki induktivni niz*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \tag{51}$$

C^*-algebri, postoji izomorfizam Abelovih grupa

$$K_0(\varinjlim A_n) \cong \varinjlim K_0(A_n).$$

Preciznije, ako je $(A, (\mu_n))$ induktivni limes niza (51) i ako je $(G_0, (\beta_n))$ induktivni limes niza

$$K_0(A_1) \xrightarrow{K_0(\varphi_1)} K_0(A_2) \xrightarrow{K_0(\varphi_2)} K_0(A_3) \xrightarrow{K_0(\varphi_3)} \cdots , \tag{52}$$

onda postoji jedinstveni izomorfizam $\gamma : G_0 \to K_0(A)$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} & K_0(A_n) \arrow[dl, "\beta_n"'] \arrow[dr, "K_0(\mu_n)"] & \\ G_0 \arrow[rr, "\gamma"'] & & K_0(A) \end{tikzcd} \tag{53}$$

komutira za sve $n \in \mathbb{N}$. Štoviše, vrijedi slijedeće:

(*i*) $K_0(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_0(\mu_n)(K_0(A_n))$,

(*ii*) $\mathrm{Ker}(K_0(\mu_n)) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \mathrm{Ker}(K_0(\varphi_{m,n}))$, *za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: Najprije dokazujemo (*i*) i (*ii*). Kao u lemi 6.10, radi jednostavnosti oznaka, s μ_n ćemo također označavati inducirani $*$-homomorfizam $M_k(A_n) \to M_k(A)$, za svako $k \in \mathbb{N}$ (napomena 3.2). Također, s $\dot{\mu}_n : M_k(\dot{A}_n) \to M_k(\dot{A})$ označavamo $*$-homomorfizam induciran unitalnim $*$-homomorfizmom $\dot{\mu}_n : \dot{A}_n \to \dot{A}$. Iz leme 6.10 slijedi da su $(M_k(A), (\mu_n))$ i $(M_k(\dot{A}), (\dot{\mu}_n))$ induktivni limesi nizova

$$M_k(A_1) \xrightarrow{\varphi_1} M_k(A_2) \xrightarrow{\varphi_2} M_k(A_3) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots ,$$
$$M_k(\dot{A}_1) \xrightarrow{\dot{\varphi}_1} M_k(\dot{A}_2) \xrightarrow{\dot{\varphi}_2} M_k(\dot{A}_3) \xrightarrow{\dot{\varphi}_3} \cdots .$$

(*i*) Neka je dan $g \in K_0(A)$. Iz propozicije 5.10 slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ i projektor $p \in M_k(\dot{A})$, takav da je $g = [p]_0 - [s(p)]_0$. Po propoziciji 6.6 (*i*), postoji $n \in \mathbb{N}$ i element $b_n \in M_k(\dot{A}_n)$ takav da je $\|\dot{\mu}_n(b_n) - p\| < 1/5$. Stavimo $a_n := (b_n + b_n^*)/2$ i $a_m := \dot{\varphi}_{m,n}(a_n)$ za $m > n$. Tada je a_m hermitski i imamo $\|\dot{\mu}_m(a_m) - p\| < 1/5$ $(m \geq n)$. Lema 3.25 daje

$$\sigma(\dot{\mu}_n(a_n)) \subseteq [-1/5, 1/5] \cup [4/5, 6/5],$$

pa imamo

$$\|\dot{\mu}_n(a_n^2 - a_n)\| = \max\{|t^2 - t| : t \in \sigma(\dot{\mu}_n(a_n))\} < 1/4.$$

Iz propozicije 6.6 (*ii*) slijedi da postoji $m \geq n$ takav da je $\|a_m^2 - a_m\| < 1/4$. Iz leme 6.9 (*i*) slijedi da postoji projektor $q \in M_k(\dot{A}_m)$ takav da je $\|a_m - q\| < 1/2$. Nejednakost trokuta i činjenica da je $\dot{\mu}_m$ kontrakcija daju

$$\|\dot{\mu}_m(q) - p\| \leq \|q - a_m\| + \|\dot{\mu}_m(a_m) - p\| < 1,$$

pa iz propozicije 3.26 (iii) dobivamo $\dot{\mu}_m(p) \overset{MvN}{\sim} p$. Koristeći propoziciju 5.10 (i) i (iii) dobivamo

$$g = [p]_0 - [s(p)]_0 = [\dot{\mu}_m(q)]_0 - [s(\dot{\mu}_m(q))]_0 = K_0(\mu_m)([q]_0 - [s(q)]_0).$$

(ii) Iz propozicije 6.6 slijedi da je jezgra od $K_0(\mu_n)$ sadržana u jezgri od $K_0(\varphi_{m,n})$, za sve $m > n$. Obratno, ako je $g \in \mathrm{Ker}(\mu_n) \subseteq K_0(A_n)$, onda iz leme 5.11 (i) slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ i projektor $p \in M_k(\dot{A}_n)$ taakv da je $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ i $\dot{\mu}_n(p) \overset{MvN}{\sim} \dot{\mu}_n(s(p))$. Drugim riječima, postoji parcijalna izometrija $v \in M_k(\dot{A})$ takva da je $\dot{\mu}_n(p) = v^*v$ i $\dot{\mu}_n(s(p)) = vv^*$. Zbog propozicije 6.6 (i) možemo naći $l \in \mathbb{N},\ l \geq n$ i $x_l \in M_k(\dot{A}_l)$ takve da je $\dot{\mu}_l(x_l)$ dovoljno blizu v, tako da vrijedi

$$\|\dot{\mu}_l(x_l^*x_l) - \dot{\mu}_n(p)\| < 1/2, \qquad \|\dot{\mu}_l(x_lx_l^*) - \dot{\mu}_n(s(p))\| < 1/2.$$

Iz propozicije 6.6 (ii) slijedi da možemo naći $m \geq l$ takav da je

$$\|x_m^*x_m - \dot{\varphi}_{m,n}(p)\| < 1/2, \qquad \|x_mx_m^* - \dot{\varphi}_{m,n}(s(p))\| < 1/2,$$

gdje smo stavili $x_m := \dot{\varphi}_{m,l}(x_l)$. Koristeći lemu 6.9 (ii), dobivamo da je

$$\dot{\varphi}_{m,n}(p) \overset{MvN}{\sim} \dot{\varphi}_{m,n}(s(p)) = s(\dot{\varphi}_{m,n}(p)) \ \text{ u } \ M_k(\dot{A}_m).$$

Sada napokon dobivamo

$$K_0(\varphi_{m,n})(g) = [\dot{\varphi}_{m,n}(p)]_0 - [s(\dot{\varphi}_{m,n}(p))]_0 = 0,$$

čime je (iii) dokazano.
Budući da je $K_0(\mu_n) = K_0(\mu_{n+1}) \circ K_0(\varphi_n)$ za sve n, uvjet (ii) definicije 6.5, primjenjen na sistem $(K_0(A), (K_0(\mu_n)))$, povlači da postoji jedinstveni homomorfizam grupa $\gamma : G_0 \to K_0(A)$ takav da dijagram (53) komutira za sve n. Iz (i) slijedi da je γ surjektivan.
Još trebamo pokazati injektivnost od γ. Neka je stoga $g \in \mathrm{Ker}(\gamma)$. Zbog propozicije 6.7 (i) možemo naći $n \in \mathbb{N}$ i $h \in K_0(A_n)$ tako da vrijedi $g = \beta_n(h)$. Tada je $0 = \gamma(g) = K_0(\mu_n)(h)$, pa (ii) povlači da je $K_0(\varphi_{m,n})(h) = 0$ za neko $m \in \mathbb{N},\ m > n$. Iz toga dobivamo da je $g = (\beta_m \circ K_0(\varphi_{m,n}))(h) = 0$, pa je γ injektivan. ■

6.4 Stabilnost funktora K_0

Definicija 6.12 Neka je A C^*-algebra i promotrimo induktivni niz

$$A \xrightarrow{\varphi_1} M_2(A) \xrightarrow{\varphi_2} M_3(A) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots ,$$

gdje su vezni morfizmi $\varphi_n : M_n(A) \to M_{n+1}(A)$ dani s

$$\varphi_n(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in M_n(A).$$

Neka je $(\mathcal{K}A, (\kappa_n))$ induktivni limes tog niza, gdje su $\kappa_n : M_n(A) \to \mathcal{K}A$ i stavimo $\kappa := \kappa_1 : A \to \mathcal{K}A$. C^*-algebru $\mathcal{K}A$ zovemo **stabilizacija** od A.

Napomena 6.13 Primijetimo da smo u primjeru 6.8 (ii) dokazali da je stabilizacija $\mathcal{K}\mathbb{C}$ od $\mathbb{C}$ izomorfna C^*-algebri kompaktnih operatora $\mathcal{K}$ na separabilnom beskonačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru.

Teorem 6.14 (Stabilnost funktora K_0) *Neka je A C^*-algebra.*

(i) *Grupe $K_0(A)$ i $K_0(M_n(A))$ su izomorfne za svako $n \in \mathbb{N}$. Preciznije, $*$-homomorfizam*

$$\lambda_{n,A} : A \hookrightarrow M_n(A), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{54}$$

inducira izomorfizam grupa $K_0(\lambda_{n,A}) : K_0(A) \to K_0(M_n(A))$.

(ii) *Neka je $\kappa : A \hookrightarrow \mathcal{K}A$ kanonska inkluzija C^*-algebre A u njenu stabilizaciju $\mathcal{K}A$ (definicija 6.12). Tada je $K_0(\kappa) : K_0(A) \to K_0(\mathcal{K}A)$ izomorfizam.*

Dokaz: (i) Kanonsko ulaganje $\lambda_{n,A} : a \mapsto a \oplus 0_{n-1} : A \hookrightarrow M_n(A)$ inducira homomorfizam grupa $K_0(\lambda_{n,A}) : K_0(A) \to K_0(M_n(A))$. Najprije ćemo pokazati da je tvrdnju dovoljno dokazati u slučaju da A ima jedinicu. Pretpostavimo zato da tvrdnja vrijedi za C^*-algebre s jedinicom i preptostavimo da A nema jedinicu. Tada je dijagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,A}"'] & \dot{A} \arrow[r, leftrightarrow, "\pi"] \arrow[d, "\lambda_{n,\dot{A}}"'] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,\mathbb{C}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_n(A) \arrow[r] & M_n(\dot{A}) \arrow[r, leftrightarrow, "\pi_n"] & M_n(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

komutativan čiji su redovi egzaktni i rascjepivi. Zato je i dijagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,A})"'] & K_0(\dot{A}) \arrow[r, leftrightarrow, "K_0(\pi)"] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,\dot{A}})"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(M_n(A)) \arrow[r] & K_0(M_n(\dot{A})) \arrow[r, leftrightarrow, "K_0(\pi_n)"] & K_0(M_n(\mathbb{C})) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

komutativan s egzaktnim i rascjepivim redovima. Ako su $K_0(\lambda_{n,\dot{A}})$ i $K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})$ izomorfizmi onda Pet-lema povlači da je $K_0(\lambda_{n,A})$ izomorfizam. Zato je dovoljno dokaz provesti u slučaju kada A ima jedinicu.

Neka je, stoga, A C^*-algebra s jedinicom. Da dokažemo da je $K_0(\lambda_{n,A})$ izomorfizam, konstruirat ćemo mu inverz. Za svako $k \in \mathbb{N}$ definiramo preslikavanje $\gamma_{n,k} : M_k(M_n(A)) \to M_{kn}(A)$ tako da elementu iz $M_k(M_n(A))$ obrišemo unutarnje matrične zagrade. Očito je $\gamma_{n,k}$ $*$-izomorfizam. Neka je preslikavanje $\gamma_n : P_\infty(M_n(A)) \to K_0(A)$ definirano s $\gamma_n(p) := [\gamma_{n,k}(p)]_0$, gdje je $p \in P_k(M_n(A))$. Uvjeti (i), (ii) i (iii) propozicije 4.7, primijenjeni na γ_n, su trivijalno zadovoljeni, pa dobivamo homomorfizam grupa $\alpha : K_0(M_n(A)) \to K_0(A)$ koji zadovoljava $\alpha([p]_0) = [\gamma_{n,k}(p)]_0$,

$p \in P_k(M_n(A))$. Tvrdimo da je α inverz od $K_0(\gamma_{n,A})$. Dovoljno je dokazati da vrijede slijedeće dvije tvrdnje

$$(\lambda_{n,A})_{kn}(\gamma_{n,k}(p)) \overset{0}{\sim} p \quad \mathsf{u} \quad P_\infty(M_n(A)), \quad p \in P_k(M_n(A)). \tag{55}$$

$$\lambda_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p)) \overset{0}{\sim} p \quad \mathsf{u} \quad P_\infty(A), \quad p \in P_k(A), \tag{56}$$

gdje je $(\lambda_{n,A})_m$ $*$-homomorfizam $M_m(A) \to M_m(M_n(A))$ induciran s $\lambda_{n,A}$. Mi ćemo pokazati tvrdnju (56); tvrdnja (55) slijedi sličnim argumentom.
Neka je $\{e_1, e_2, \dots e_{kn}\}$ standardna baza za $\mathbb{C}^{kn}$ i neka je u permutaciona (pa i unitarna) matrica iz $M_{kn}(\mathbb{C}) \subseteq M_{kn}(A)$ (A ima jedinicu), za koju je

$$ue_i := e_{n(i-1)+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Tada je

$$p \overset{0}{\sim} p \oplus 0_{(n-1)k} = u^* \gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p))u,$$

za sve projektore $p \in P_k(A)$.
(ii) Vezna preslikavanja $\varphi_{n,1} : A \to M_n(A)$ su upravo preslikavanja $\lambda_{n,A}$ iz (i), pa je $K_0(\varphi_{n,1}) : K_0(A) \to K_0(M_n(A))$ izomorfizam za sve n.
Neka je $g \in K_0(\mathcal{K}A)$. Tada je po teoremu 6.11 (i), $g = K_0(\kappa_n)(g')$ za neko $n \in \mathbb{N}$ i neko $g' \in K_0(M_n(A))$. No, $g' = K_0(\varphi_{n,1})(h)$ za neko $h \in K_0(A)$, pa imamo

$$K_0(\kappa)(h) = K_0(\kappa_n \circ \varphi_{n,1})(h) = K_0(\kappa_n)(g') = g.$$

Time smo dokazali da je $K_0(\kappa)$ surjektivan.
Pretpostavimo da je $h \in \mathrm{Ker}(K_0(\kappa)) \subseteq K_0(A)$. Tada je po teoremu 6.11 (ii), $K_0(\varphi_{n,1})(h) = 0$ (za neko $n \geq 2$), a kako je $K_0(\varphi_{n,1})$ izomorfizam, to je $h = 0$. Time je dokazana injektivnost od $K_0(\kappa)$.
■

Prije nego što dokažemo da je $K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$, najprije se prisjetimo pojma operatora s tragom. Detaljnije o tragu može se naći u [18], ili u [22].
Neka je H separabilni beskonačnodimenzionalni Hilbertov prostor i s Tr označimo (ograničeni) trag na $B(H)$, dan formulom:

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle \ , \tag{57}$$

gdje je $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ (bilo koja) ortonormirana baza od H. Pokazuje se da Tr ne ovisi o izboru ortonormirane baze $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Za operator $T \in B(H)$ kažemo da je **operator s tragom** ako red (57) apsolutno konvergira. Nadalje, ako je $T \in B(H)$ pozitivan operator, onda dozvoljavamo i $\mathrm{Tr}(T) = \infty$. Pokazuje se da je $\mathrm{Tr}(E) = \dim(\mathrm{Im}(E))$ za sve projektore $E \in B(H)$.

Korolar 6.15 *Neka je H separabilni beskonačnodimenzionalni Hilbertov prostor i neka je $\mathcal{K} = K(H)$ C^*-algebra kompaktnih operatora. Tada je grupa $K_0(\mathcal{K})$ izomorfna grupi $\mathbb{Z}$. Preciznije, postoji izomorfizam $\alpha : K_0(\mathcal{K}) \to \mathbb{Z}$ takav da je $\alpha([E]_0) = \mathrm{Tr}(E)$ za sve projektore $E \in \mathcal{K}$.*

Izomorfizam α obično označavamo s $K_0(\mathrm{Tr})$.

Dokaz: Identificirajmo $\mathcal{K}$ s $\mathcal{K}\mathbb{C}$ preko izomorfizma iz primjera 6.8 (ii) i promotrimo preslikavanje $\kappa : \mathbb{C} \to \mathcal{K}\mathbb{C}$ iz definicije 6.12. Iz primjera 4.17 (ii) imamo izomorfizam $\alpha_1 : K_0(\mathbb{C}) \to \mathbb{Z}$, $\alpha_1([1]_0) = 1$. Stavimo

$$\alpha := \alpha_1 \circ K_0(\kappa)^{-1} : K_0(\mathcal{K}) \to \mathbb{Z}.$$

Tada je, preko dane identifikacije $\mathcal{K}\mathbb{C} \cong \mathcal{K}$, $F := \kappa(1)$ jednodimenzionalni projektor iz $\mathcal{K}$, pa je

$$\alpha([F]_0) = \alpha_1([1]_0) = 1.$$

Ako je E proizvoljni jednodimenzionalni projektor na H, onda je prema propoziciji 3.30 (i) $E \overset{MvN}{\sim} F$, pa je $\alpha([E]_0) = \alpha([F]_0) = 1$. Napokon, ako je E proizvoljni n-dimenzionalni projektor na H, tada je E suma jednodimenzionalnih projektora, pa iz aditivnosti od α slijedi da je $\alpha([E]_0) = n = \mathrm{Tr}(E)$. ■

Napomena 6.16 Stabilizacija $\mathcal{K}A$ C^*-algebre A sadrži sve matrične algebre nad A, preko ulaganja $\kappa_n : M_n(A) \to \mathcal{K}A$. Zanimljiva posljedica teorema 6.14 je da smo grupu $K_0(A)$ mogli definirati direktno, koristeći samo C^*-algebru $\mathcal{K}A$, umjesto sistem svih matričnih algebri nad A. Zaista, ako je A C^*-algebra, tada je skup svih (Murray-von Neumann) klasa ekvivalencija projektora iz $\mathcal{K}A$ izomorfan (kao Abelova polugrupa) s $D(A)$, polugrupom klasa ekvivalencija projektora iz $P_\infty(A)$.

7 Funktor K_1

Grupu $K_1(A)$ za C^*-algebru A definiramo kao skup svih klasa homotopije unitarnih elemenata u matričnim algebrama nad unitalizacijom $\dot{A}$. Pokazuje se da je K_1 funktor i da on ima sva bitna svojstva kao i funktor K_0. Mi ćemo pokazati da je K_1 poluegzaktan i homotopski invarijantan.

7.1 Definicija grupe K_1

Definicija 7.1 Neka je A C^*-algebra s jedinicom i neka je $U(A)$, kao i prije, grupa unitarnih elemenata iz A. Stavimo:

$$U_n(A) := U(M_n(A)), \qquad U_\infty(A) := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n(A).$$

Na $U_\infty(A)$ definiramo binarnu operaciju $\oplus$ s

$$u \oplus v := \mathrm{diag}(u, v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in U_{n+m}(A),\ u \in U_n(A),\ v \in U_m(A). \tag{58}$$

Također, na $U_\infty(A)$ definiramo relaciju $\overset{1}{\sim}$ na slijedeći način: ako su $u \in U_n(A)$ i $v \in U_m(A)$, tada je

$$u \overset{1}{\sim} v :\Longleftrightarrow \exists k \geq \max\{n, m\} \ : \ u \oplus 1_{k-n} \overset{h}{\sim} v \oplus 1_{k-m} \text{ u } U_k(A), \tag{59}$$

gdje je 1_r jedinica u $M_r(A)$ i uz dogovor da je $w \oplus 1_0 := w$ za sve $w \in U_\infty(A)$.

Lema 7.2 *Neka je A C^*-algebra s jedinicom. Tadavrijedi:*

(i) $\stackrel{1}{\sim}$ *je relacija ekvivalencije na* $U_\infty(A)$,

(ii) $u \stackrel{1}{\sim} u \oplus 1_n$, *za sve* $u \in U_\infty(A)$ *i za sve* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $u \oplus v \stackrel{1}{\sim} v \oplus u$, *za sve* $u, v \in U_\infty(A)$.

(iv) *Ako su* $u, u', v, v' \in U_\infty(A)$ *i* $u \stackrel{1}{\sim} u'$ *i* $v \stackrel{1}{\sim} v'$, *onda je* $u \oplus v \stackrel{1}{\sim} u' \oplus v'$.

(v) *Ako su oba* u, v *iz* $U_n(A)$ *za neko* $n \in \mathbb{N}$, *onda je* $uv \stackrel{1}{\sim} vu \stackrel{1}{\sim} u \oplus v$.

(vi) $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$, *za sve* $u, v, w \in U_\infty(A)$.

Dokaz: Djelovi (i), (ii) i (vi) su trivijalni, a (v) slijedi iz Whiteheadove leme (leme 3.7).
(iii) Neka su dani $u \in U_n(A)$ i $v \in U_m(A)$ i stavimo

$$z := \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \in U_{n+m}(A).$$

Tada je po (v), $v \oplus u = z(u \oplus v)z^* \stackrel{1}{\sim} z^* z(u \oplus v) = u \oplus v$.
Da dokažemo (iv), dovoljno je vidjeti da vrijede slijedeće dvije tvrdnje:

(a) $(u \oplus 1_k) \oplus (v \oplus 1_l) \stackrel{1}{\sim} u \oplus v$, za sve $u, v \in U_\infty(A)$ i $k, l \in \mathbb{N}$.

(a) Ako je $u \stackrel{h}{\sim} u'$ i $v \stackrel{h}{\sim} v'$ onda je $u \oplus v \stackrel{h}{\sim} u' \oplus v'$, za sve $u, u' \in U_n(A)$ i za sve $v, v' \in U_m(A)$.

Tvrdnju (a) direktno dobivamo iz (ii), (iii) i (vi).
Dokažimo tvrdnju (b). Neka su $t \mapsto u_t$ i $t \mapsto v_t$ putevi unitarnih elemenata za koje je $u_0 = u$, $u_1 = u'$, $v_0 = v$ i $v_1 = v'$. Tada je $t \mapsto u_t \oplus v_t$ put unitarnih elemenata od $u \oplus v$ do $u' \oplus v'$. ■

Definicija 7.3 Za svaku C^*-algebru A definiramo

$$K_1(A) := U_\infty(\dot{A})/ \stackrel{1}{\sim} . \tag{60}$$

Neka je $[u]_1 \in K_1(A)$ klasa ekvivalencije elementa $u \in U_\infty(\dot{A})$. Na $K_1(A)$ definiramo binarnu operaciju + s

$$[u]_1 + [v]_1 := [u \oplus v]_1, \quad u, v \in U_\infty(\dot{A}). \tag{61}$$

Iz leme 7.2 slijedi da je + dobro definirana, komutativna i asocijativna operacija. Nadalje, obzirom na + postoji neutralni element, $[1]_1$ $(= [1_n]_1$, za sve $n \in \mathbb{N}$) i vrijedi

$$0 = [1_n]_1 = [uu^*]_1 = [u]_1 + [u^*]_1,$$

za sve $u \in U_n(\dot{A})$. To nam pokazuje da je $(K_1(A), +)$ Abelova grupa i da je $-[u]_1 = [u^*]$, za sve $u \in U_\infty(\dot{A})$.

Propozicija 7.4 (Standardna slika od K_1) *Neka je A C^*-algebra. Tada je*

$$K_1(A) = \{[u]_1 : u \in U_\infty(\dot{A})\}. \tag{62}$$

Nadalje, preslikavanje $[\cdot]_1 : U_\infty(\dot{A}) \to K_1(A)$ ima slijedeća svojstva:

(*i*) $[u \oplus v]_1 = [u]_1 + [v]_1$.

(*ii*) $[1]_1 = 0$.

(*iii*) *Ako su u i v elementi iz $U_n(\dot{A})$ i ako je $u \overset{h}{\sim} v$, onda je $[u]_1 = [v]_1$.*

(*iv*) *Ako su u i v elementi iz $U_n(\dot{A})$, tada je $[uv]_1 = [vu]_1 = [u]_1 + [v]_1$.*

(*v*) *Ako su $u, v \in U_\infty(\dot{A})$, tada je $[u]_1 = [v]_1$ ako i samo ako je $u \overset{1}{\sim} v$.*

Dokaz: Svojstva (i), (ii) , (v) i jednakost (62) su direktne posljedice definicije 7.3. (iii) slijedi iz (v), a zbog leme 7.2 (v), vrijedi (iv). ■

Propozicija 7.5 (Univerzalno svojstvo od K_1) *Neka je A C^*-algebra, neka je G Abelova grupa i neka je $\nu : U_\infty(\dot{A}) \to G$ preslikavanje sa slijedećim svojstvima:*

(*i*) *$\nu(u \oplus v) = \nu(u) + \nu(v)$, za sve $u, v \in U_\infty(\dot{A})$,*

(*ii*) *$\nu(1) = 0$,*

(*iii*) *ako su u i v elementi iz $U_\infty(\dot{A})$ i ako je $u \overset{h}{\sim} v$, onda je $\nu(u) = \nu(v)$.*

Tada postoji jedinstveni homomorfizam grupa $\alpha : K_1(A) \to G$, takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} U_\infty(\dot{A}) \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_1(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd} \tag{63}$$

komutira.

Dokaz: Najprije pokazujemo da za $u \in U_n(\dot{A})$ i $v \in U_m(\dot{A})$ za koje je $u \overset{1}{\sim} v$, vrijedi $\nu(u) = \nu(v)$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k \geq \max\{n, m\}$ i $u \oplus 1_{k-n} \overset{h}{\sim} v \oplus 1_{k-m}$ u $U_k(\dot{A})$. Iz (i) i (ii) direktno dobivamo da je za sve $r \in \mathbb{N}$ $\nu(1_r) = 0$. Tada (i) i (iii) daju

$$\nu(u) = \nu(u \oplus 1_{k-n}) = \nu(v \oplus 1_{k-m}) = \nu(v).$$

Zbog toga postoji preslikavanje $\alpha : K_1(A) \to G$ takvo da dijagram (63) komutira. α je homomorfizam grupa:

$$\alpha([u]_1 + [v]_1) = \alpha([u \oplus v]_1) = \nu(u \oplus v) = \nu(u) + \nu(v) = \alpha([u]_1) + \alpha([v]_1).$$

Jedinstvenost od α slijedi iz surjektivnosti preslikavanja $[\cdot]_1$. ■

Ako C^*-algebra A ima jedinicu, prirodno bi bilo grupu $K_1(A)$ definirati kao kvocijentnu grupu $U_\infty(A)/\stackrel{1}{\sim}$. Zaista, iduća propozicija nam govori da su grupe $K_1(A)$ i $U_\infty(A)/\stackrel{1}{\sim}$ izomorfne. Preciznije, vrijedi:

Propozicija 7.6 *Neka je A C^*-algebra s jedinicom. Tada postoji izomorfizam $\rho : K_1(A) \to U_\infty(A)/\stackrel{1}{\sim}$ takav da dijagram*

$$\begin{tikzcd} U_\infty(\dot{A}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] & U_\infty(A) \arrow[d] \\ K_1(A) \arrow[r, "\rho"'] & U_\infty(A)/\stackrel{1}{\sim} \end{tikzcd} \tag{64}$$

komutira.

Preslikavanje μ u dijagramu (64) definirano je na slijedeći način. Neka je $f := 1_{\dot{A}} - 1_A \in \dot{A}$. Tada imamo $\dot{A} = A + \mathbb{C}f$ i preslikavanje $\mu : \dot{A} \to A$ je dano s $\mu(a + \alpha f) = a$, za sve $a \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Očito je μ $*$-homomorfizam, pa po napomeni 3.2, μ inducira unitalni $*$-homomorfizam $M_n(\dot{A}) \to M_n(A)$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Na taj način dolazimo do preslikavanja $\mu : U_\infty(\dot{A}) \to U_\infty(A)$.

Dokaz propozicije: Najprije primijetimo da je $\mu : U_\infty(\dot{A}) \to U_\infty(A)$ surjektivan. Da dokažemo propoziciju, dovoljno je dokazati da vrijede slijedeće dvije tvrdnje:

(a) $\mu(u) \stackrel{1}{\sim} \mu(v)$ ako i samo ako je $u \stackrel{1}{\sim} v$, za sve $u, v \in U_\infty(\dot{A})$.

(b) $\mu(u \oplus v) = \mu(u) \oplus \mu(v)$, za sve $u, v \in U_\infty(\dot{A})$.

Direktno iz definicije preslikavanja μ slijedi da (b) vrijedi. Da dokažemo (a), primijetimo da je dovoljno dokazati da vrijedi iduća tvrdnja:

(a') $\mu(u) \stackrel{h}{\sim} \mu(v)$ ako i samo ako je $u \stackrel{h}{\sim} v$, za sve $u, v \in U_n(\dot{A})$ i za sve $n \in \mathbb{N}$.

Implikacija "ako" u (a') je trivijalna. Dokažimo obrnutu implikaciju. Neka su $u, v \in U_n(\dot{A})$ i pretpostavimo da je $\mu(u) \stackrel{h}{\sim} \mu(v)$ u $U_n(A)$. Po definiciji preslikavanja μ, možemo naći $u_0, v_0 \in U_n(\mathbb{C}f)$ takve da je $u = \mu(u) + u_0$ i $v = \mu(v) + v_0$. Budući da su spektri $\sigma(u_0)$ i $\sigma(v_0)$ konačni, to je po lemi 3.5 (ii), $u_0 \stackrel{h}{\sim} v_0$ u $U_n(\mathbb{C}f)$. Time smo zapravo dokazali da je $u \stackrel{h}{\sim} v$ u $U_n(\dot{A})$. Zaista, neka su $t \mapsto a_t$ i $t \mapsto b_t$ putevi unitarnih elemenata u $M_n(A)$ i $M_n(\mathbb{C}f)$ (respektivno), takvi da je $a_0 = \mu(u)$, $a_1 = \mu(v)$, $b_0 = u_0$ i $b_1 = v_0$. Tada je $t \mapsto a_t + b_t$ put u $U_n(\dot{A})$, takav da je $a_0 + b_0 = u$ i $a_1 + b_1 = v$. ■

Napomena 7.7 Ako je A C^*-algebra s jedinicom, ubuduće ćemo često identificirati $K_1(A)$ s $U_\infty(A)/\stackrel{1}{\sim}$ preko izomorfizma ρ iz propozicije 7.6. Ako je $u \in U_\infty(A)$ unitarni element, tada ćemo s $[u]_1$ označavati element $\rho([u]_1) \in U_\infty(A)/\stackrel{1}{\sim}$.

Direktna posljedica propozicije 7.6 je izomorfizam

$$K_1(A) \cong K_1(\dot{A}), \tag{65}$$

za svaku C^*-algebru A.

Napomena 7.8 Zbog propozicije 3.11, na prirodan način možemo proširiti preslikavanje $[\cdot]_1 : U_\infty(\dot{A}) \to K_1(A)$ do preslikavanja

$$[\cdot]_1 : \mathrm{GL}_\infty(\dot{A}) \to K_1(A),$$

gdje su

$$\mathrm{GL}_n(\dot{A}) = \mathrm{GL}(M_n(\dot{A})), \quad \mathrm{GL}_\infty(\dot{A}) := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}_n(\dot{A}).$$

Štoviše, ako A ima jedinicu, tada preslikavanje $[\cdot]_1 : U_\infty(A) \to K_1(A)$ možemo proširiti do preslikavanja

$$[\cdot]_1 : \mathrm{GL}_\infty(A) \to K_1(A).$$

Ta proširenja definiramo na slijedeći način: neka je $a \in \mathrm{GL}_n(\dot{A})$ (odn. $a \in \mathrm{GL}_n(A)$) i neka je $[a]_1 = [u]_1$, gdje je u unitarni element iz $U_n(\dot{A})$ (odn. iz $U_n(A)$) sa svojstvom da je $a \overset{h}{\sim} u$ u $\mathrm{GL}_n(\dot{A})$ (odn. u $\mathrm{GL}_n(A)$). Zbog propozicije 3.11, za u možemo izabrati $\omega(a) = a(a^*a)^{-1/2}$, koji je unitarni element u polarnoj dekompoziciji od a.

U idućem primjeru pokazat ćemo da je $K_1(B(H)) = 0$, gdje je H Hilbertov prostor. Za to ćemo trebati poznati teorem o proširenom funkcionalom računu, kojeg ovdje navodimo bez dokaza:

Teorem 7.9 (Prošireni funkcionalni račun) *Neka je H Hilbertov prostor i neka je $T \in B(H)$ normalan operator. S $\mathcal{B}_b(\sigma(T))$ označimo skup svih ograničenih Borelovih kompleksnih funkcija definiranih na spektru $\sigma(T)$ od T. Nadalje, s $W^*(T)$ označimo skup svih operatora iz $B(H)$ koji komutiraju sa svim operatorima koji komutiraju s T. Tada vrijedi:*

(i) *$W^*(T)$ je komutativna C^*-algebra koja sadrži $C^*(T)$.*

(ii) *Postoji $*$-homomorfizam $f \mapsto f(T) : \mathcal{B}_b(\sigma(T)) \to W^*(T)$ koji proširuje Gelfandovu transformaciju $C(\sigma(T)) \to C^*(T)$.*

(iii) *Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen i rastući niz realnih funkcija $\mathcal{B}_b(\sigma(T)) \to \mathbb{R}$ i $f_n \nearrow f$ po točkama, tada i (s) $f_n(T) \nearrow f(T)$ (u jakoj operatorskoj topologiji).*

Dokaz teorema se može naći u [18].

Primjer 7.10 *(i)* $K_1(\mathbb{C}) = K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
Dokaz: Iz korolara 3.6 slijedi da je unitarna grupa od $M_k(M_n(\mathbb{C})) \cong M_{kn}(\mathbb{C})$ putevima povezana za

sve n i k. Zbog toga je $U_\infty(M_n(\mathbb{C}))/ \overset{1}{\sim}$ trivijalna grupa. Iz propozicije 7.6 slijedi da je $K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$.

(ii) Općenitije, $K_1(B(H)) = 0$ za svaki Hilbertov prostor H.
Dokaz: Dovoljno je dokazati da je $u \overset{h}{\sim} 1_n$ za svaki unitarni element $u \in U_n(B(H))$, budući da iz toga direktno slijedi da je $u \overset{1}{\sim} 1$, pa je $K_1(B(H)) \cong U_\infty(B(H))/ \overset{1}{\sim} = 0$.
Definirajmo preslikavanje $\varphi : \mathbb{T} \to [0, 2\pi\rangle$ s

$$\varphi(e^{i\theta}) := \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Tada je φ ograničena Borelova funkcija i $\exp(i\varphi(z)) = z$, za sve $z \in \mathbb{T}$. Neka je $u \in U_n(B(H)) \cong U(B(H^n))$. Iz teorema 7.9 slijedi da je $\varphi(u) = \varphi(u)^*$ u $B(H^n)$ i da je $u = \exp(i\varphi(u))$. Iz propozicije 3.5 (i) slijedi da je $u \overset{h}{\sim} 1$.

7.2 Funktorijalnost od K_1

Neka su A i B C^*-algebre i neka je $\varphi : A \to B$ $*$-homomorfizam. Tada φ inducira unitalni $*$-homomorfizam $\dot{\varphi} : \dot{A} \to \dot{B}$, kojeg, kao u napomeni 3.2, proširujemo do unitalnog $*$-homomorfizma $\dot{\varphi} : M_n(\dot{A}) \to M_n(\dot{B})$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Time dolazimo do preslikavanja $\dot{\varphi} : U_\infty(\dot{A}) \to U_\infty(\dot{B})$ i definiramo $\nu : U_\infty(\dot{A}) \to K_1(B)$ s $\nu(u) := [\dot{\varphi}(u)]_1$, za svako $u \in U_\infty(\dot{A})$. Trivijalno slijedi da ν zadovoljava uvjete (i), (ii) i (iii) propozicije 7.5. Zato postoji jedinstveni homomorfizam grupa $K_1(\varphi) : K_1(A) \to K_1(B)$ takav da je

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\dot{\varphi}(u)]_1, \qquad u \in U_\infty(\dot{A}). \tag{66}$$

Ako C^*-algebra A i B imaju jedinicu, tada koristeći propoziciju 7.6 dobivamo slijedeću tvrdnju.

Propozicija 7.11 *Neka su A i B C^*-algebre s jedinicom i neka je $\varphi : A \to B$ unitalni $*$-homomorfizam. Tada je*

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\varphi(u)]_1,$$

za sve $u \in U_\infty(A)$.

Iz slijedeće propozicije vidimo da je K_1 homotopski invarijantan funktor koji čuva nul-objekte.

Propozicija 7.12 (Funktorijalnost od K_1) *Neka su A, B i C C^*-algebre. Tada*

(i) $K_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_1(A)}$,

(ii) Ako su $\varphi : A \to B$ i $\psi : B \to C$ $*$-homomorfizmi, onda je $K_1(\psi \circ \varphi) = K_1(\psi) \circ K_1(\varphi)$.

Posebno, K_1 je funktor. Nadalje,

(iii) $K_1(0) = 0$.

(iv) $K_1(0_{B,A}) = 0_{K_1(B),K_1(A)}$.

(v) *Ako su* $\varphi, \psi : A \to B$ *homotopni* $*$*-homomorfizmi, tada je* $K_1(\varphi) = K_1(\psi)$.

(vi) *Ako su* A *i* B *homotopski ekvivalentne* C^**-algebre, tada su grupe* $K_1(A)$ *i* $K_1(B)$ *izomorfne. Preciznije, ako je*

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$$

homotopija, tada su

$$K_1(\varphi) : K_1(A) \to K_1(B) \quad i \quad K_1(\psi) : K_1(B) \to K_1(A)$$

međusobno inverzni izomorfizmi.

Dokaz: (i) i (ii) slijede direktno iz (66) i iz činjenice da je $(\dot{\mathrm{id}_A}) = \mathrm{id}_{\dot{A}}$ i $(\psi \dot{\circ} \varphi) = \dot{\psi} \circ \dot{\varphi}$. Npr. za $u \in U_\infty(\dot{A})$ imamo

$$K_1(\psi \circ \varphi)([u]_1) = [(\psi \dot{\circ} \varphi)(u)]_1 = [(\dot{\psi} \circ \dot{\varphi})(u)]_1 = [\dot{\psi}(\dot{\varphi}(u))]_1$$

$$= K_1(\psi)([\dot{\varphi}(u)]_1) = K_1(\psi)(K_1(\varphi)([u]_1)) = (K_1(\psi) \circ K_1(\varphi))([u_1]).$$

(iii) slijedi iz propozicije 7.6, budući da je $K_1(A)$ izomorfno s $K_1(\dot{A})$, za sve C^*-algebre A. Posebno, za $A = 0$, dobivamo $K_1(0) \cong K_1(\mathbb{C}) \cong 0$.
(iv) Budući da je nul-homomorfizam $0_{B,A}$ kompozicija preslikavanja $A \to 0 \to B$, to (iv) slijedi iz (iii) i (ii).
(v) Neka je $\Phi_t : A \to B$, $t \in [0,1]$, po točkama neprekidni put $*$-homomorfizama od φ od ψ. Inducirani $*$-homomorfizmi $\dot{\Phi}_t : M_n(\dot{A}) \to M_n(\dot{B})$ su unitalni i $t \mapsto \dot{\Phi}_t$ je po točkama neprekidno preslikavanje, tj. $t \mapsto \dot{\Phi}_t$ je po točkama neprekidni put unitalnih $*$-homomorfizama od $\dot{\varphi}$ do $\dot{\psi}$. Imamo $\dot{\varphi}(u) = \dot{\Phi}_0(u) \overset{h}{\sim} \dot{\Phi}_1(u) = \dot{\psi}(u)$ u $U_n(\dot{B})$, za sve $u \in U_n(\dot{A})$. Zbog toga je

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\dot{\varphi}(u)]_1 = [\dot{\psi}(u)]_1 = K_1(\psi)([u]_1),$$

što dokazuje (v).
(vi) dobivamo kao direktnu posljedicu od $(i), (ii)$ i (v). ■

Sada bez dokaza navodimo vrlo bitan teorem (teorem 7.14) iz kojega onda slijede slijedeća svojstva funktora K_1: poluegzaktnost, rascjepivost, aditivnost, neprekidnost i stabilnost. Nama će u daljnjem jedino biti potrebno svojstvo poluegzaktnosti, pa ćemo zato i dati direktan dokaz tog svojstva (bez pozivanja na teorem 7.14).

Prisjetimo se da smo u primjeru 5.7, za C^*-algebru A, definirali njenu suspenziju SA s

$$SA := \{f \in C([0,1] \to A) : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Za svaki $*$-homomorfizam $\varphi : A \to B$, između C^*-algebri A i B, definiramo $*$-homomorfizam $S\varphi : SA \to SB$ s $(S\varphi(f))(t) := \varphi(f)(t),\ t \in [0,1]$. Na taj način S postaje funktor iz kategorije C^*-algebri u samu sebe i S preslikava nul-objekte u nul-objekte. Nadalje, vrijedi slijedeće:

Propozicija 7.13 *(i) Funktor S je egzaktan, tj. ako je*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

SES C^*-algebri, onda je niz

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow 0$$

također SES.

(ii) Funktor S je neprekidan, tj. ako je

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

induktivni niz C^*-algebri s induktivnim limesom $(A, (\mu_n))$ i ako je $(B, (\lambda_n))$ induktivni limes niza

$$SA_1 \xrightarrow{S\varphi_1} SA_2 \xrightarrow{S\varphi_2} SA_3 \xrightarrow{S\varphi_3} \cdots,$$

tada dijagram

$$\begin{tikzcd} SA_n \arrow[rr, "S\varphi_n"] \arrow[dr, "S\mu_n"'] & & SA_{n+1} \arrow[dl, "S\mu_{n+1}"] \\ & SA & \end{tikzcd}$$

komutira za svako $n \in \mathbb{N}$ i postoji $*$-izomorfizam $\sigma : B \to SA$, takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} & SA_n \arrow[dl, "\lambda_n"'] \arrow[dr, "S\mu_n"] & \\ B \arrow[rr, "\sigma"'] & & SA \end{tikzcd}$$

komutira za sve $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 7.14 *Ako je A C^*-algebra, onda su grupe $K_1(A)$ i $K_0(SA)$ izomorfne. Štoviše, za svaku C^*-algebru A postoji izomorfizam $\theta_A : K_1(A) \to K_0(SA)$, takav da za svaku C^*-algebru B i za svaki $*$-homomorfizam $\varphi : A \to B$, dijagram*

$$\begin{tikzcd} K_1(A) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] \arrow[d, "\theta_A"'] & K_1(B) \arrow[d, "\theta_B"] \\ K_0(SA) \arrow[r, "K_0(S\varphi)"'] & K_0(SB) \end{tikzcd}$$

komutira.

Sada iz teorema 7.14 i propozicije 7.13 dobivamo:

Teorem 7.15 (poluegzaktnost i rascjepivost funktora K_1) *Neka je*

$$0 \longrightarrow I \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} A \stackrel{\psi}{\longrightarrow} B \longrightarrow 0 \tag{67}$$

SES C^*-algebri. Tada je niz Abelovih grupa

$$K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B).$$

egzaktan. Nadalje, ako je niz (67) rascjepiv

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, shift left, "\psi"] & B \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

tada je niz K_1-grupa

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, shift left, "K_1(\psi)"] & K_1(B) \arrow[l, shift left, "K_1(\lambda)"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{68}$$

egzaktan i rascjepiv.

Propozicija 7.16 (Aditivnost funktora K_1) *Za svaki par C^*-algebri A i B imamo:*

$$K_1(A \oplus B) \cong K_1(A) \oplus K_1(B).$$

Preciznije, ako su $\iota_A : A \to A \oplus B$ i $\iota_B : B \to A \oplus B$ kanonske inkluzije, tada je preslikavanje

$$K_1(\iota_A) \oplus K_1(\iota_B) : K_1(A) \oplus K_1(B) \to K_1(A \oplus B),$$

koje preslikava par $(g, h) \in K_1(A) \oplus K_1(B)$ u $K_1(\iota_A)(g) + K_1(\iota_B)(h)$ izomorfizam.

Teorem 7.17 (Neprekidnost funktora K_1) *Za svaki induktivni niz*

$$A_1 \stackrel{\varphi_1}{\longrightarrow} A_2 \stackrel{\varphi_2}{\longrightarrow} A_3 \stackrel{\varphi_3}{\longrightarrow} \cdots \tag{69}$$

C^*-algebri postoji izomorfizam Abelovih grupa

$$K_1(\varinjlim A_n) \cong \varinjlim K_1(A_n).$$

Preciznije, ako je $(A, (\mu_n))$ induktivni limes niza (69) i ako je $(G_1, (\beta_n))$ induktivni limes niza

$$K_1(A_1) \xrightarrow{K_1(\varphi_1)} K_1(A_2) \xrightarrow{K_1(\varphi_2)} K_1(A_3) \xrightarrow{K_1(\varphi_3)} \cdots, \tag{70}$$

onda postoji jedinstveni izomorfizam $\gamma : G_1 \to K_0(A)$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} & K_1(A_n) \arrow[dl, "\beta_n"'] \arrow[dr, "K_1(\mu_n)"] & \\ G_1 \arrow[rr, "\gamma"'] & & K_1(A) \end{tikzcd} \tag{71}$$

komutira za sve $n \in \mathbb{N}$. Štoviše, vrijedi slijedeće:

(*i*) $K_1(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_1(\mu_n)(K_1(A_n))$,

(*ii*) $\mathrm{Ker}(K_1(\mu_n)) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \mathrm{Ker}(K_1(\varphi_{m,n}))$, *za sve* $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 7.18 (Stabilnost funktora K_1) *Neka je A C^*-algebra.*

(*i*) *Grupe $K_1(A)$ i $K_1(M_n(A))$ su izomorfne za svako $n \in \mathbb{N}$. Preciznije, $*$-homomorfizam*

$$\lambda_{n,A} : A \hookrightarrow M_n(A), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{72}$$

inducira izomorfizam grupa $K_1(\lambda_{n,A}) : K_1(A) \to K_1(M_n(A))$.

(*ii*) *Neka je $\kappa : A \hookrightarrow \mathcal{K}A$ kanonska inkluzija C^*-algebre A u njenu stabilizaciju $\mathcal{K}A$ (definicija 6.12). Tada je $K_1(\kappa) : K_1(A) \to K_1(\mathcal{K}A)$ izomorfizam.*

Dokazi tvrdnji mogu se naći u [1] ili u [3]. Kao što smo napomenuli, mi ćemo dati direktan dokaz svojstva poluegzaktnosti. Za to će nam trebati slijedeća lema.

Lema 7.19 *Neka su A i B C^*-algebre, neka je $\varphi : A \to B$ $*$-homomorfizam i neka je $g \in \mathrm{Ker}(K_1(\varphi))$. Tada vrijedi slijedeće:*

(*i*) *Postoji unitarni element $u \in U_\infty(\dot{A})$ takav da je $g = [u]_1$ i $\dot{\varphi}(u) \overset{h}{\sim} 1$.*

(*ii*) *Ako je φ surjektivan, tada postoji unitarni element $u \in U_\infty(\dot{A})$ takav da je $g = [u]_1$ i $\dot{\varphi}(u) = 1$.*

Dokaz: (*i*) Izaberimo unitarni element $v \in U_m(\dot{A})$ takav da je $g = [v]_1$. Tada je $[\dot{\varphi}(v)]_1 = 0 = [1_m]_1$, pa postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ takav da je

$$\dot{\varphi}(v) \oplus 1_{n-m} \overset{h}{\sim} 1_m \oplus 1_{n-m} = 1_n.$$

Ako stavimo $u := v \oplus 1_{n-m}$, onda je $[u]_1 = [v]_1 = g$ i $\dot{\varphi}(u) = \dot{\varphi}(v) \oplus 1_{n-m} \overset{h}{\sim} 1_n$.
(*ii*) Iz (*i*) dobivamo egzistenciju unitarnog elementa $v \in U_n(\dot{A})$ za kojeg je $g = [v]_1$ i $\dot{\varphi}(v) \overset{h}{\sim} 1$. slijedi direktno iz (*i*) i leme 3.10 slijedi da postoji unitarni element $w \in U_n(\dot{A})$ takav da je $\dot{\varphi}(w) = \dot{\varphi}(v)$ i $w \overset{h}{\sim} 1$. Ako stavimo $u := w^*v$, tada je očito $[u]_1 = g$ i $\dot{\varphi}(u) = 1$. ■

Dokaz poluegzaktnosti od K_1: Pretpostavimo da je niz (67) egzaktan. K_1 je funktor, pa iz $\psi \circ \varphi = 0$ imamo $K_1(\psi) \circ K_1(\varphi) = 0$, tj. $\mathrm{Im}(K_1(\varphi)) \subset \mathrm{Ker}(K_1(\psi))$.
Dokažimo obratnu inkluziju. Neka je $g \in \mathrm{Ker}(K_1(\psi))$. Iz leme 7.19 (*ii*) slijedi egzistencija unitarnog elementa $u \in U_n(\dot{A})$ za kojeg je $g = [u]_1$ i $\dot{\psi}(u) = 1$. Tvrdimo da je $u \in \mathrm{Im}(\dot{\varphi})$. No, to slijedi iz leme 5.12 (*ii*) jer je $1 = s(\dot{\psi}) = \dot{\psi}(u) = s(\dot{\psi}(u))$, budući da je s unitalan. Neka je onda $v \in U_n(\dot{I})$ za kojeg je $\dot{\varphi}(v) = u$. Klasa $[v]_1$ od v pripada grupi $K_1(I)$ i imamo

$$K_1(\varphi)([v]_1) = [\dot{\varphi}(v)]_1 = [u]_1 = g. \quad ■$$

8 Vezno preslikavanje i indeks u K-teoriji

U ovom poglavlju uvodimo pojam veznog preslikavanja, kojeg pridružujemo SES-u

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \tag{73}$$

C^*-algebri. Vezno preslikavanje je homomorfizam grupa $\partial_1 : K_1(B) \to K_0(I)$ za kojeg je niz Abelovih grupa

$$\begin{tikzcd}
K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\psi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\partial_1"] \\
K_0(B) & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\psi)"] & K_0(I) \arrow[l, "K_1(\varphi)"]
\end{tikzcd} \tag{74}$$

egzaktan. Grubo rečeno, vezno preslikavanje mjeri smetnju podizanja unitarnih elemenata u matričnim algebrama nad $\dot{B}$ do unitarnih elemenata u matričnim algebrama nad $\dot{A}$.
Primjene indeksa demonstrirat ćemo na Fredholmovim i Toeplitzovim operatorima. Vidjet ćemo da vezno preslikavanje generalizira pojam klasičnog Fredholmovog indeksa i pomoću njega ćemo dokazati Gohberg-Kreinov teorem za Toeplitzove operatore.

8.1 Definicija veznog preslikavanja

Definicija indeksa bazirat će se na slijedećim dvjema lemama.

Lema 8.1 *Pretpostavimo da je dan SES C^*-algebri (73) i neka je dan $u \in U_n(\dot{B})$.*

(i) Postoji unitarni element $v \in U_{2n}(\dot{A})$ i projektor $p \in P_{2n}(\dot{I})$ takav da je

$$\dot{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad \dot{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*, \quad s(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Ako su v i p kao u (i) i ako $w \in U_{2n}(\dot{A})$ i $q \in P_{2n}(\dot{I})$ zadovoljavaju

$$\dot{\psi}(w) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad \dot{\varphi}(q) = w \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^*,$$

onda je $s(q) = \operatorname{diag}(1_n, 0_n)$ i $p \overset{u}{\sim} q$ u $P_{2n}(\dot{I})$.

Dokaz: Zbog leme 3.10 znamo da postoji unitarni element $v \in U_{2n}(\dot{A})$ takav da je $\dot{\psi}(v) = \operatorname{diag}(u, u^*)$, pa je

$$\dot{\psi}\left(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \right) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prema lemi 5.12, $\dot{\varphi}$ je injektivan i postoji $p \in M_{2n}(\dot{I})$ takav da je $\dot{\varphi}(p) = v\mathrm{diag}(1_n, 0)v^*$. Zbog injektivnosti od $\dot{\varphi}$, p je nužno projektor. Budući da je

$$\dot{\psi}(\dot{\varphi}(p)) = \dot{\psi}\left(v\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}v^*\right) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

slijedi da je $s(p) = \mathrm{diag}(1_n, 0)$.
(ii) Koristeći isti argument kojeg smo koristili u (i) za dokaz $s(p) = \mathrm{diag}(1_n, 0_n)$ dobivamo da je $s(q) = \mathrm{diag}(1_n, 0_n)$. Primijetimo da je $\dot{\psi}(w, v^*) = 1_{2n}$. Po lemi 5.12, postoji element $z \in M_{2n}(\dot{I})$ takav da je $\dot{\varphi}(z) = wv^*$ i taj je z, zbog injektivnosti od $\dot{\varphi}$, nužno unitaran. Iz $\dot{\varphi}(zpz^*) = \dot{\varphi}(q)$ dobivamo da je $q = zpz^*$. Zato je $p \overset{u}{\sim} q$ u $P_{2n}(\dot{I})$, kao što smo i htjeli dokazati. ■

Sada definiramo preslikavanje

$$\nu : U_\infty(\dot{B}) \to K_0(I), \quad \nu(u) = [p]_0 - [s(p)]_0, \tag{75}$$

gdje je za $u \in U_n(\dot{A})$, odgovarajući $p \in P_{2n}(\dot{I})$ kao u lemi 8.1 (i). Po lemi 8.1 (ii), ν je dobro definirano preslikavanje.

Lema 8.2 *Preslikavanje $\nu : U_\infty(\dot{B}) \to K_0(I)$ ima slijedeća svojstva:*

(i) *$\nu(u_1 \oplus u_2) = \nu(u_1) + \nu(u_2)$, za sve $u_1, u_2 \in U_\infty(\dot{B})$,*

(ii) *$\nu(1) = 0$,*

(iii) *Ako su $u_1, u_2 \in U_n(\dot{B})$ i $u_1 \overset{h}{\sim} u_2$, onda je $\nu(u_1) = \nu(u_2)$,*

(iv) *$\nu(\dot{\psi}(u)) = 0$, za sve $u \in U_\infty(\dot{A})$,*

(v) *$K_0(\varphi)(\nu(u)) = 0$, za sve $u \in U_\infty(\dot{B})$.*

Dokaz: (i) Za svako $j = 1, 2$ neka je dan $u_j \in U_{n_j}(\dot{B})$ i izaberimo elemente $v_j \in U_{2n_j}(\dot{A})$ i $p_j \in P_{2n_j}(\dot{I})$ koji zadovoljavaju uvjet (i) leme 8.1, tj.

$$\dot{\psi}(v_j) = \begin{pmatrix} u_j & 0 \\ 0 & u_j^* \end{pmatrix}, \qquad \dot{\varphi}(p_j) = v_j\begin{pmatrix} 1_{n_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}v_j^*,$$

tako da je $\nu(u_j) = [p_j]_0 - [s(p_j)]_0$. Uvedimo elemente $y \in U_{2(n_1+n_2)}(\mathbb{C})$, $v \in U_{2(n_1+n_2)}(\dot{A})$ i $p \in P_{2(n_1+n_2)}(\dot{I})$:

$$y := \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 1_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n_2} \end{pmatrix}, \quad v := y\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}y^*, \quad p := y\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}y^*.$$

Tada je

$$\dot{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2^* \end{pmatrix}, \qquad \dot{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_{n_1+n_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*,$$

a budući da je $p \overset{u}{\sim} p_1 \oplus p_2$, imamo

$$\nu(u_1 \oplus u_2) = [p]_0 - [s(p)]_0 = [p_1 \oplus p_2]_0 - [s(p_1 \oplus p_2)]_0 = \nu(u_1) + \nu(u_2).$$

(iii) Neka su $v_1 \in U_{2n}(\dot{A})$ i $p_1 \in P_{2n}(\dot{I})$ takvi da je

$$\dot{\psi}(v_1) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_1^* \end{pmatrix}, \qquad \dot{\varphi}(p_1) = v_1 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^*.$$

Tada je $\nu(u_1) = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0$. Budući da je $u_1^* u_2 \overset{h}{\sim} 1_n \overset{h}{\sim} u_1 u_2^*$, možemo primijeniti lemu 3.10 da dobijemo unitarne elemente $a, b \in M_n(\dot{A})$ za koje je $\dot{\psi}(a) = u_1^* u_2$ i $\dot{\psi}(b) = u_1 u_2^*$. Ako stavimo $v_2 := v_1 \mathrm{diag}(a, b) \in U_{2n}(\dot{A})$, onda dobivamo

$$\dot{\psi}(v_2) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2^* \end{pmatrix}, \quad v_2 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2^* = v_1 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^* = \dot{\varphi}(p_1).$$

Po definiciji preslikavanja ν, zaključujemo da je $\nu(u_2) = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0 = \nu(u_1)$.
(iv) Stavimo $v := \mathrm{diag}(u, u^*) \in U_{2n}(\dot{A})$ i $p := \mathrm{diag}(1_n, 0) \in P_{2n}(\dot{I})$, tako da je $p = s(p)$. Tada imamo

$$\dot{\psi}(v) = \begin{pmatrix} \dot{\psi}(u) & 0 \\ 0 & \dot{\psi}(u^*) \end{pmatrix}, \qquad \dot{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*.$$

Zbog toga je $\nu(\dot{\psi}(u)) = [p]_0 - [s(p)]_0 = 0$.
(ii) je sada direktna posljedica od (iv), a (v) slijedi iz činjenice da je za projektor $p \in M_{2n}(\dot{I})$ koji je pridružen elementu u (kao u lemi 8.1 (i)), $\dot{\varphi}(p)$ unitarno ekvivalentan s $s(\dot{\varphi}(p))$ u $M_{2n}(\dot{A})$. ■

Definicija 8.3 Pretpostavimo da je dan SES C^*-algebri (73). Neka je, kao u (75), $\nu : U_\infty(\dot{B}) \to K_0(I)$ preslikavanje dano s $\nu(u) = [p]_0 - [s(p)]_0$, gdje je $u \in U_n(\dot{B})$ i $p \in P_{2n}(\dot{I})$ projektor pridružen elementu u, kao u lemi 8.1 (i). Po univerzalnom svojstvu od K_1 (propozicija 7.5) i po lemi 8.2, postoji jedinstveni homomorfizam grupa $\partial_1 : K_1(B) \to K_0(I)$ za kojeg je $\partial_1([u]_1) = \nu(u)$, za sve $u \in U_\infty(\dot{B})$. Preslikavanje ∂_1 zovemo **vezno preslikavanje** pridruženo SES-u (73).

Rezimirajmo osnovna svojstva veznog preslikavanja slijedećom propozicijom:

Propozicija 8.4 (Prva standardna slika veznog preslikavanja) *Neka je*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

SES C^*-algebri. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da $u \in U_n(\dot{B})$, $v \in U_{2n}(\dot{A})$ i $p \in P_{2n}(\dot{I})$ zadovoljavaju

$$\dot{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*, \qquad \dot{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

Tada je $\partial_1([u]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0$. Nadalje, vrijedi *(i)* $\partial_1 \circ K_1(\psi) = 0$,

(ii) $K_0(\varphi) \circ \partial_1 = 0$.

Propozicija 8.5 (Prirodnost veznog preslikavanja) *Neka je*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I' \arrow[r, "\varphi'"'] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{76}$$

komutativan dijagram C^*-algebri, čiji su redovi egzaktni, gdje su α, β i γ $*$-homomorfizmi. Neka su $\partial_1 : K_1(B) \to K_0(I)$ i $\partial_1' : K_1(B') \to K_0(I')$ vezna preslikavanja pridružena (egzaktnim) redovima dijagrama (76). Tada je dijagram

$$\begin{tikzcd} K_1(B) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "K_1(\beta)"'] & K_0(I) \arrow[d, "K_0(\gamma)"] \\ K_1(B') \arrow[r, "\partial_1'"'] & K_0(I') \end{tikzcd}$$

komutativan.

Dokaz: Neka je $g \in K_1(B)$ i nađimo $n \in \mathbb{N}$ i unitarni element $u \in U_n(\dot{B})$ za kojeg je $g = [u]_1$. Prema lemi 8.1 (i) imamo unitarni element $v \in U_{2n}(\dot{A})$ i projektor $p \in P_{2n}(\dot{I})$ za koje je

$$\dot{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \qquad \dot{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*.$$

Stavimo $v' := \dot{\alpha}(v) \in U_{2n}(\dot{A}')$ i $p' := \dot{\gamma}(p) \in P_{2n}(\dot{I}')$. Tada imamo

$$\dot{\psi}'(v') = (\psi' \dot{\circ} \alpha)(v) = (\beta \dot{\circ} \psi)(v) = \dot{\beta}(\dot{\psi}(v)) = \begin{pmatrix} \dot{\beta}(u) & 0 \\ 0 & \dot{\beta}(u)^* \end{pmatrix},$$

$$\dot{\varphi}'(p') = (\varphi' \dot{\circ} \gamma)(p) = (\alpha \dot{\circ} \varphi)(p) = \dot{\alpha}(v) \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\alpha}(v)^* = v' \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v')^*.$$

Po definiciji veznog preslikavanja, imamo

$$(\partial_1' \circ K_1(\beta))(g) = \partial_1'([\dot{\beta}(u)]_1) = [p']_0 - [s(p')]_0 = [\dot{\gamma}(p)]_0 - [s(\dot{\gamma}(p))]_0$$

$$= K_0(\gamma)([p]_0 - [s(p)]_0) = K_0(\gamma)(\partial_1([u]_1)) = (K_0(\gamma) \circ \partial_1)(g).$$

Iz toga vidimo da je $\partial_1' \circ K_1(\beta) = K_0(\gamma) \circ \partial_1$. ■

8.2 Vezno preslikavanje i parcijalne izometrije

U ovoj točki ćemo dati drugu sliku veznog preslikavanja, koja je više intuitivna i u većini slučajeva je s njom lakše baratati nego sa slikom veznog preslikavanja iz prošle točke. Najprije trebamo slijedeće dvije leme.

Lema 8.6 *Neka su A i B C^*-algebre i neka je $\psi : A \to B$ surjektivni $*$-homomorfizam.*

(i) Svaki element $b \in B$ ima lift do elementa $a \in A$ za kojeg je $\|a\| = \|b\|$.

(ii) Svaki hermitski element $b \in B$ možemo podići do hermitskog elementa $a \in A$. Štoviše, taj hermitski lift a možemo izabrati tako da vrijedi $\|a\| = \|b\|$.

Dokaz: (ii) Neka je $x \in A$ bilo koji lift od b i stavimo $a_0 := (x + x^*)/2$. Tada je a_0 hermitski lift od b. Definirajmo sada neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na slijedeći način:

$$f(t) := \begin{cases} -\|b\| , & t \leq -\|b\|, \\ t & , -\|b\| \leq t \leq \|b\|, \\ \|b\| & , t \geq \|b\|, \end{cases}$$

Stavimo $a := f(a_0)$. Tada je a normalan element i po teoremu o preslikavanju spektra imamo:

$$\sigma(a) = \{f(t) : \ t \in \sigma(a_0)\} \subseteq [-\|b\|, \|b\|].$$

Iz toga vidimo da je a hermitski. Budući da je norma normalnog elementa jednaka sprektralnom radijusu, to je $\|a\| \leq \|b\|$. Sada iz $f \mid_{\sigma(b)} = \mathrm{id}_{\sigma(b)}$ dobivamo da je

$$\psi(a) = \psi(f(a_0)) = f(\psi(a_0)) = f(b) = b.$$

Budući da norma $*$-homomorfizma nije veća od 1, zaključujemo da je $\|a\| = \|b\|$.
(i) Neka je $b \in B$ i stavimo

$$y := \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je y hermitski element iz $M_2(B)$ i imamo

$$\|y\|^2 = \|y^*y\| = \left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \right\| = \max\{\|bb^*\|, \|b^*b\|\} = \|b\|^2.$$

Treću jednakost dobivamo iz činjenice da je preslikavanje

$$A \oplus A \to M_2(A), \quad (a, b) \mapsto \mathrm{diag}(a, b)$$

injektivni $*$-homomorfizam, pa stoga i izometrija.
Sada iz (ii) dobivamo egzistenciju hermitskog lifta

$$x := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in M_2(A)$$

od y, za kojeg je $\|x\| = \|y\|$. Element $a := x_{12} \in A$ je lift od b i iz nejednakosti (7) dobivamo da je $\|a\| \leq \|x\| = \|y\| = \|b\|$. Kao u dokazu od (ii), nužno mora biti $\|b\| \leq \|a\|$, pa je $\|a\| = \|b\|$. ■

Lema 8.7 *Neka je $\psi : A \to B$ surjektivni $*$-homomorfizam, gdje su A i B C^*-algebre i pretpostavimo da A ima jedinicu. Zbog surjektivnosti od ψ, onda i B ima jedinicu i ψ je unitalan. Tada za svaki unitarni element $u \in B$ postoji parcijalna izometrija $v \in M_2(A)$ takva da je*

$$\psi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Dokaz: Po lemi 8.6 (i), postoji lift $a \in A$ od u takav da je $\|a\| = \|u\| = 1$ i stavimo

$$v := \begin{pmatrix} a & 0 \\ (1 - a^*a)^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je $v^*v = \mathrm{diag}(1, 0)$, pa je v parcijalna izometrija. Budući da je

$$\psi((1 - a^*a)^{1/2}) = (1 - u^*u)^{1/2} = 0,$$

dobivamo jednakost (77). ■

Propozicija 8.8 (Druga standardna slika veznog preslikavanja) *Neka je*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

SES C^*-algebri. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, neka je $u \in U_n(\dot{B})$ unitarni element i neka je $v \in M_m(\dot{A})$ parcijalna izometrija za koju je

$$\dot{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix}. \tag{78}$$

Tada postoje projektori $p, q \in P_m(\dot{I})$ takvi da je

$$\dot{\varphi}(p) = 1_m - v^*v, \qquad \dot{\varphi}(q) = 1_m - vv^*$$

i vezno preslikavanje $\partial_1 : K_1(B) \to K_0(I)$ je dano s

$$\partial_1([u]_1) = [p]_0 - [q]_0. \tag{79}$$

Prije nego što damo dokaz propozicije, primijetimo da iz leme 8.7 slijedi egzistencija parcijalne izometrije v za koju vrijedi (78). Nadalje, iz propozicije 8.8 slijedi da element s druge strane jednakosti (79) ne ovisi o izboru parcijalne izometrije v. Također, iz propozicije 8.8, slijedi da taj element zapravo pripada grupi $K_0(I)$ (a priori, mi samo znamo da on pripada grupi $K_0(\dot{I})$).

Dokaz: Neka su $e := 1_m - v^*v$ i $f := 1_m - vv^*$ projektori iz $P_m(\dot{A})$. Tada je $\dot{\psi}(e) = \dot{\psi}(f) = \mathrm{diag}(0_n, 1_{m-n})$. Budući da su $\dot{\psi}(e)$ i $\dot{\psi}(f)$ skalarne matrice, iz leme 5.12 slijedi da postoje projektori $p, q \in P_m(\dot{I})$ takvi da je $\dot{\varphi}(p) = e$, $\dot{\varphi}(q) = f$ i $s(p) = s(q) = \mathrm{diag}(0_n, 1_{m-n})$. Stavimo

$$w := \begin{pmatrix} v & f \\ e & v^* \end{pmatrix}, \quad r := \begin{pmatrix} 1_m - q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} 1_n & 0 & 0_n & 0 \\ 0 & 0_{m-n} & 0 & 1_{m-n} \\ 0_n & 0 & 1_n & 0 \\ 0 & 1_{m-n} & 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix}.$$

Tada je r projektor iz $M_{2n}(\dot{I})$, w je unitarni element iz $M_{2m}(\dot{A})$, z je ortogonalna matrica iz $M_{2m}(\mathbb{C})$ i

$$\dot{\psi}(zw) = z \begin{pmatrix} u & 0 & 0_n & 0 \\ 0 & 0_{m-n} & 0 & 1_{m-n} \\ 0_n & 0 & u^* & 0 \\ 0 & 1_{m-n} & 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_1^* \end{pmatrix},$$

gdje je $u_1 := \operatorname{diag}(u, 1_{m-n}) \in U_m(\dot{B})$. Imamo:

$$zw \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^* z^* = z \begin{pmatrix} vv^* & ve \\ ev^* & e \end{pmatrix} z^* = z \begin{pmatrix} 1_m - f & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} z^* = \dot{\varphi}(zrz^*).$$

Sada iz definicije veznog preslikavanja dobivamo da je

$$\partial_1([u]_1) = \partial_1([u_1]_1) = [zrz^*]_0 - [s(zrz^*)]_0 = [r]_0 - [s(r)]_0 = [1_m - q]_0 + [p]_0 - [1_n]_0 - [1_{m-n}]_0 = [p]_0 - [q]_0,$$

kao što smo i htjeli dokazati. ■

Ako je u propoziciji 8.8 I ideal u A i ako je $\varphi : I \to A$ inkluzija, tada (79) možemo napisati kao

$$\partial_1([u]_1) = [1_m - v^*v]_0 - [1_m - vv^*]_0, \tag{80}$$

gdje su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $m \geq n$, u je element iz $U_n(\dot{B})$ i v je parcijalna izometrija iz $M_m(\dot{A})$ koja je lift od $\operatorname{diag}(u, 0_{m-n})$.
Ako su A i B C^*-algebre s jedinicom, ono što nam može smetati u formuli (80) je to što elementi koji se u njoj pojavljaju pripadaju unitalizacijama. Zato bi bilo dobro da za C^*-algebre s jedinicom imamo formulu za vezno preslikavanje u kojoj ne nastupaju elementi iz unitalizacija.

Propozicija 8.9 *Neka je*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

SES C^*-algebri i pretpostavimo da A ima jedinicu. U tom slučaju, zbog surjektivnosti od ψ, i B ima jedinicu i ψ je unitalan. Neka je $\bar{\varphi} : \dot{I} \to A$ $*$-homomorfizam dan s $\bar{\varphi}(x + \alpha 1_{\dot{I}}) = \varphi(x) + \alpha 1_A$, za $x \in I$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Nadalje, neka je $u \in M_n(B)$ unitaran element.

(i) Ako je $v \in M_{2n}(A)$ unitaran, $p \in M_{2n}(\dot{I})$ projektor i ako vrijedi

$$\bar{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*, \qquad \psi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix},$$

onda je $\partial_1([u]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0$.

(ii) Neka je $m \geq n$ prirodni broj i neka je $v \in M_m(A)$ parcijalna izometrija za koju je $\psi(v) = \operatorname{diag}(u, 0_{m-n})$. Ako pretpostavimo da je $\varphi(I) \neq A$, tako da je $\bar{\varphi} : M_m(\dot{I}) \to M_m(A)$ injektivan, onda postoje projektori $p, q \in M_m(\dot{I})$, takvi da je $1_m - v^*v = \bar{\varphi}(p)$, $1_m - vv^* = \bar{\varphi}(q)$ i $\partial_1([u]_1) = [p]_0 - [q]_0$.

Dokaz: (i) Za svako $k \in \mathbb{N}$ stavimo

$$f_k := 1_{M_k(\dot{A})} - 1_{M_k(A)}, \qquad g_k := 1_{M_k(\dot{B})} - 1_{M_k(B)}.$$

Tada je $u_1 := u + g_n$ unitarni element iz $M_n(\dot{B})$, $v_1 := v + f_{2n}$ je unitarni element iz $M_{2n}(\dot{A})$ i vrijedi

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(v_1) = \dot{\psi}(v) + \dot{\psi}(f_{2n}) = \operatorname{diag}(u, u^*) + \dot{\psi}(1_{M_{2n}(\dot{A})}) - \dot{\psi}(1_{M_{2n}(A)}) = \operatorname{diag}(u, u^*) + 1_{M_{2n}(\dot{B})} - 1_{M_{2n}(B)} \\ = \operatorname{diag}(u, u^*) + g_{2n} = \operatorname{diag}(u, u^*) + \operatorname{diag}(g_n, g_n) = \operatorname{diag}(u_1, u_1).\end{aligned}$$

Cilj nam je odrediti skalarni dio $s(p)$ od p. U svrhu toga, najprije primijetimo da je $\psi(\bar{\varphi}(s(p))) = \psi(\bar{\varphi}(p)) = \operatorname{diag}(1_{M_n(B)}, 0_n)$. ψ je unitalan, pa mora biti

$$s(p) = v \begin{pmatrix} 1_{M_n(\dot{I})} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\varphi}(s(p)) = v \begin{pmatrix} 1_{M_n(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada imamo

$$\dot{\varphi}(p) = \varphi(p - s(p)) + \dot{\varphi}(s(p)) = \bar{\varphi}(p) - \bar{\varphi}(s(p)) + \dot{\varphi}(s(p)) = \bar{\varphi}(p) + \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1_{M_n(\dot{A})} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^*.$$

Zbog propozicije 8.4 znamo da je $\partial_1([u_1]_1) = [p]_0 - [s(p)]_0$. Nadalje, zbog propozicije 7.6 možemo napraviti identifikaciju $[u]_1 = [u_1]_1$. Time je dokaz tvrdnje završen.
(ii) Primijetimo da se slika preslikavanja $\bar{\varphi} : M_m(\dot{I}) \to M_m(A)$ sastoji od svih elemenata $x \in M_m(A)$ za koje je $\psi(x) \in M_m(\mathbb{C}1_B)$. Zbog toga, postoje elementi $p, q \in M_m(\dot{I})$ za koje je

$$1_{M_m(A)} - v^*v = \bar{\varphi}(p), \qquad 1_{M_m(A)} - vv^* = \bar{\varphi}(q).$$

Zbog injektivnosti od $\bar{\varphi}$, p i q su nužno projektori. Iz jednakosti $\psi(\bar{\varphi}(p)) = \operatorname{diag}(0_n, 1_{M_{m-n}(B)})$, vidimo da je

$$s(p) = \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & 1_{M_{m-n}(\dot{I})} \end{pmatrix}.$$

Neka su f_n, u_1 kao u dokazu tvrdnje (i) i stavimo

$$w := v + \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix},$$

tako da je w parcijalna izometrija iz $M_m(\dot{A})$ za koju je $\dot{\psi}(w) = \operatorname{diag}(u_1, 0_{m-n})$. Kao u (i), dobivamo

$$\dot{\varphi}(p) = \bar{\varphi}(p) - \bar{\varphi}(s(p)) + \dot{\varphi}(s(p)) = 1_{M_m(A)} - v^*v + \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & f_{m-n} \end{pmatrix} = 1_{M_m(\dot{A})} - w^*w,$$

i slično, $\dot{\varphi}(q) = 1_{M_m(\dot{A})} - ww^*$. Iz propozicije 8.8, znamo da je $\partial_1([u_1]_1) = [p]_0 - [q]_0$, pa ako opet iskoristimo identifikaciju $[u]_1 = [u_1]_1$, dobivamo tvrdnju. ■

Pri kraju ove točke ćemo dati još jednu jednostavniju varijantu propozicija 8.8 i 8.9.
Nju ćemo dobiti ako pretpostavimo da unitarni element u iz $U_n(\dot{B})$ (ili iz $U_n(B)$) ima lift do parcijalne izometrije v iz $M_n(\dot{A})$ (ili iz $M_n(A)$, ako je $u \in U_n(B)$) i ako još dodatno pretpostavimo da je I ideal u A.

Propozicija 8.10 *Neka je*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

SES C^*-algebri, gdje je I ideal u A i $\iota : I \hookrightarrow A$ inkluzija.

(i) Neka je $u \in M_n(\dot{B})$ unitarni element koji ima lift do parcijalne izometrije $v \in M_n(\dot{A})$, tj. $\dot{\psi}(v) = u$. Tada su $1_n - v^*v$ i $1_n - vv^*$ projektori iz $M_n(I)$ i vrijedi

$$\partial_1([u]_1) = [1_n - v^*v]_0 - [1_n - vv^*]_0. \tag{81}$$

(ii) Pretpostavimo da A ima jedinicu (pa onda i B ima jedinicu i ψ je unitalan). Neka je $u \in M_n(B)$ unitarni element koji ima lift do parcijalne izometrije $v \in M_n(A)$. Tada su $1_n - v^*v$ i $1_n - vv^*$ projektori iz $M_n(I)$ i

$$\partial_1([u]_1) = [1_n - v^*v]_0 - [1_n - vv^*]_0. \tag{82}$$

Dokaz: (i) Budući da je

$$\dot{\psi}(1_n - v^*v) = 1_n - u^*u = 0, \qquad \dot{\psi}(1_n - vv^*) = 1_n - uu^* = 0,$$

vidimo da elementi $1_n - v^*v$ i $1_n - vv^*$ pripadaju $M_n(I)$. Budući da je v parcijalna izometrija, oni su nužno projektori. Sada jednakost (81) slijedi direktno iz propozicije 8.8.
(ii) Ovdje iz jednakosti $\psi(1_n - v^*v) = 1_n - u^*u = 0$ slijedi da je $1_n - v^*v \in M_n(I)$, i analogno, $1_n - vv^* \in M_n(I)$. Sada jednakost (82) slijedi iz propozicije 8.9. (ii). ■

8.3 Egzaktni niz K-grupa

U ovoj točku ćemo pokazati da SES C^*-algebri

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

inducira egzaktni niz K-grupa, (74), gdje grupe $K_1(B)$ i $K_0(I)$ povezuje upravo vezno preslikavanje $\partial_1 : K_1(B) \to K_0(I)$.
Radi jednostavnosti oznaka, u dokazu slijedećih lema ćemo pretpostavljati da je I ideal u A i da je φ inkluzija. Zbog napomene 4.13, time ne narušavamo općenitost. Primijetimo da je u tom slučaju $M_n(\dot{I})$ C^*-podalgebra s jedinicom od $M_n(\dot{A})$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Lema 8.11 *Jezgra veznog preslikavanja $\partial_1 : K_1(B) \to K_0(I)$ sadržana je u slici homomorfizma $K_1(\psi) : K_1(A) \to K_1(B)$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $g \in \mathrm{Ker}(\partial_1) \subseteq K_1(B)$. Uzmimo $u \in U_n(\dot{B})$ za kojeg je $g = [u]_1$. Prema lemi 8.7, postoji parcijalna izometrija $w_1 \in M_{2n}(\dot{A})$ za koju je

$$\dot{\psi}(w_1) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix}.$$

Po drugoj standardnoj slici veznog preslikavanja (propozicija 8.8) imamo

$$0 = \partial_1([u]_1) = [1_{2n} - w_1^* w_1]_0 - [1_{2n} - w_1 w_1^*]_0 \quad \text{u } K_0(I).$$

Iz propozicije 4.6 slijedi da postoje $k \in \mathbb{N}$ i parcijalna izometrija $w_2 \in M_m(\dot{I})$, gdje je $m = 2n + k$, takvi da je

$$w_2^* w_2 = (1_{2n} - w_1^* w_1) \oplus 1_k, \qquad w_2 w_2^* = (1_{2n} - w_1 w_1^*) \oplus 1_k.$$

Sada imamo

$$\dot{\psi}(w_2^* w_2) = \dot{\psi}(w_2 w_2^*) = \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & 1_{m-n} \end{pmatrix}.$$

Budući da je w_2 element iz $M_n(\dot{I})$, to je $\dot{\psi}(w_2)$ skalarna matrica. Iz toga vidimo da je $\dot{\psi}(w_2) = \operatorname{diag}(0_n, z)$ za neku skalarnu unitarnu matricu $z \in M_{m-n}(\dot{I})$. Budući da je spektar od z konačan, to je z homotopan s jedinicom 1_{m-n} u $U_{m-n}(\dot{B})$ (lema 3.5). Stavimo $v := \operatorname{diag}(w_1, 0_k) + w_2$. Zbog leme 3.23, v je unitaran element iz $M_m(\dot{A})$ i imamo

$$\dot{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_{m-n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \overset{h}{\sim} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1_{m-n} \end{pmatrix} \quad \text{u } U_m(\dot{B}).$$

Iz toga vidimo da je

$$g = [u]_1 = [\dot{\psi}(v)]_1 = K_1(\psi)([v]_1),$$

kao što smo i trebali pokazati. ■

Definicija 8.12 Neka je A C^*-algebra. Za element $u \in A$ kažemo da je **parcijalno unitaran**, ako je istovremeno normalan i parcijalna izometrija. Drugim riječima, u je parcijalno unitaran ako i samo ako je $u^*u = uu^*$ i u^*u je projektor.

Napomena 8.13 Primijetimo da su svi unitarni elementi i svi projektori nužno parcijalno unitarni. Nadalje, iz leme 3.23 slijedi da je element $u + (1_A - u^*u) \in A$ unitaran, čim je u parcijalno unitaran element iz C^*-algebre s jedinicom A.

Lema 8.14 *Jezgra homomorfizma $K_0(\varphi) : K_0(I) \to K_0(A)$ sadržana je u slici veznog preslikavanja $\partial_1 : K_1(B) \to K_0(I)$.*

Dokaz: Neka je $g \in \operatorname{Ker}(K_0(\varphi)) \subseteq K_0(I)$. Po lemi 5.11, postoje $n \in \mathbb{N}$, projektor $p \in M_n(\dot{I})$ i unitarni element $w \in M_n(\dot{A})$ za koje je $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ i $wpw^* = s(p)$. Element $u_0 := \dot{\psi}(w(1_n - p)) \in M_n(\dot{B})$ je parcijalna izometrija i

$$1_n - u_0^* u_0 = \dot{\psi}(p) = \dot{\psi}(s(p)) = 1_n - u_0 u_0^*.$$

Zbog toga je u_0 parcijalno unitaran element i iz napomene 8.13 slijedi da je $u := u_0 + (1_n - u_0^* u_0)$ unitaran element iz $M_n(\dot{B})$. Nama je cilj da nađemo lift od elementa $\operatorname{diag}(u, 0_n)$ do odgovarajuće parcijalne izometrije $v \in M_{2n}(\dot{A})$. Prvi korak u tom smjeru je primjedba da parcijalna izometrija

$v_1 := \mathrm{diag}(w(1_n - p), s(p)) \in M_{2n}(\dot{A})$ zadovoljava jednakost $\dot{\psi}(v_1) = \mathrm{diag}(u_0, s(p))$. Definirajmo sad ortogonalnu matricu $z \in M_{2n}(\mathbb{C})$ s

$$z := \begin{pmatrix} 1_n - s(p) & s(p) \\ s(p) & 1_n - s(p) \end{pmatrix}$$

i stavimo $v := zv_1z^*$. Tada imamo

$$\dot{\psi}(v) = z\dot{\psi}(v_1)z^* = z\begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & s(p) \end{pmatrix}z^* = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix}.$$

Napokon, iz propozicije 8.8 dobivamo da je

$$\partial_1([u]_1) = [1_{2n} - v^*v]_0 - [1_{2n} - vv^*]_0 = [1_{2n} - v_1^*v_1]_0 - [1_{2n} - v_1v_1^*]_0$$

$$= \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1_n - s(p) \end{pmatrix}\right]_0 - \left[\begin{pmatrix} s(p) & 0 \\ 0 & 1_n - s(p) \end{pmatrix}\right]_0 = [p]_0 - [s(p)]_0 = g$$

u $K_0(I)$, kao što smo i trebali pokazati. ■

Kombinirajući rezultate iz teorema 5.13, 7.15, propozicije 8.4, lema 8.14 i 8.11, dobivamo slijedeći bitni rezultat:

Teorem 8.15 *Svaki SES C^*-algebri*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

inducira egzaktan niz K-grupa

$$\begin{array}{ccccc} K_1(I) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(A) & \xrightarrow{K_1(\psi)} & K_1(B) \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_1} \\ K_0(B) & \xleftarrow[K_0(\psi)]{} & K_0(A) & \xleftarrow[K_1(\varphi)]{} & K_0(I) \end{array}$$

gdje je $\partial_1 : K_1(B) \to K_0(B)$ vezno preslikavanje.

8.4 Indeks Fredholmovih operatora

Sada ćemo na konkretnom primjeru demonstrirati aparat koji smo dosad razvili.
Neka je, kao i prije, $B(H)$ C^*-algebra ograničenih operatora na beskonačnodimenzionalnom separabilnom Hilbertovom prostoru H, $\mathcal{K} = K(H)$ ideal kompaktnih operatora i $\mathrm{Cal}(H) = B(H)/\mathcal{K}$ Calkinova algebra. Ako s $\iota : \mathcal{K} \to B(H)$ označimo inkluziju i s $\pi : B(H) \to \mathrm{Cal}(H)$ projekciju, tada SES

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} B(H) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cal}(H) \longrightarrow 0,$$

obično zovemo **Calkinovo proširenje**. Ono nam daje egzaktan niz K-grupa

$$\begin{tikzcd} K_1(\mathcal{K}) \arrow[r] & K_1(B(H)) \arrow[r] & K_1(\mathrm{Cal}(H)) \arrow[d, "\partial_1"] \\ K_0(\mathrm{Cal}(H)) & K_0(B(H)) \arrow[l] & K_0(\mathcal{K}) \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{83}$$

Kao što smo vidjeli, $K_0(B(H)) = 0$ i $K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$, pa imamo surjektivno preslikavanje

$$\partial_1 : K_1(\mathrm{Cal}(H)) \to \mathbb{Z}.$$

Naš je cilj da nađemo eksplicitnu formulu za to preslikavanje.
Najprije se prisjetimo Atkinsonovog teorema:

Teorem 8.16 (Atkinson) *Neka je $T \in B(H)$ ograničen operator. Tada su slijedeće tvrdnje ekvivalentne*

(i) $\mathrm{Im}(T)$ *je zatvoren potprostor od H i prostori* $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Ker}(T^*)$ *su konačnodimenzionalni.*

(ii) Postoji operator $S \in B(H)$ takav da su operatori $1 - ST$ i $1 - TS$ kompaktni.

(iii) $\pi(T)$ *je invertibilan element Calkinove algebre* $\mathrm{Cal}(H)$.

Dokaz teorema može se naći u [18] ili u [16].

Za operator $T \in B(H)$ kažemo da je **Fredholmov**, ako zadovoljava neki uvjet, pa onda i sve uvjete, Atkinsonovog teorema. Skup svih Fredholmovih operatora na H označavamo s $\Phi(H)$.
Definiramo **indeks** Fredhomovog operatora $T \in \Phi(H)$ kao razliku

$$\mathrm{ind}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) - \dim(\mathrm{Ker}(T^*)) \in \mathbb{Z}.$$

Sada ćemo pokazati da vezno preslikavanje generalizira pojam indeksa Fredholmovih operatora. Koristit ćemo slijedeći teorem Fredholmove teorije, čiji se dokaz može naći u [16] ili u [21].

Teorem 8.17 *Neka je H beskonačnodimenzionalni Hilbertov prostor. Tada je skup svih Fredholmovih operatora $\Phi(H) \subseteq B(H)$ otvoreni podskup od $B(H)$ i indeks*

$$\mathrm{ind} : \Phi(H) \to \mathbb{Z}, \qquad T \mapsto \mathrm{ind}(T)$$

je neprekidno preslikavanje.

Direktna, i za nas jedina bitna, posljedica prethodnog teorema je slijedeći korolar.

Korolar 8.18 *Neka su $T, S \in \Phi(H)$ Fredholmovi operatori koji su homotopni u $\Phi(H)$. Tada je* $\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind(S)}$.

Propozicija 8.19 *Neka je $T \in B(H)$ Fredholmov operator i $T = S|T|$ njegova polarna dekompozicija, gdje je $|T| = (T^*T)^{1/2}$ njegova apsolutna vrijednost i S parcijalna izometrija. Tada je $\pi(S) \in \mathrm{Cal}(H)$ unitaran element i vrijedi $[\pi(T)]_1 = [\pi(S)]_1$ u $K_1(\mathrm{Cal}(H))$.*

Dokaz: Iz $|\pi(T)|^2 = \pi(T)^*\pi(T) = \pi(T^*T) = \pi(|T|)^2$ zaključujemo da je $\pi(S)\pi(|T|)$ polarna dekompozicija od $\pi(T)$ u $\mathrm{Cal}(H)$. Naime, budući da je T Fredholmov, to je po Atkinsonovom teoremu $\pi(T)$ invertibilan, pa je $\pi(S)$ unitarni element. Posebno, vidimo da je S također Fredholmov. Tvrdimo da je $T \overset{h}{\sim} S$ u $\Phi(H)$. U tu svrhu promotrimo put operatora $t \mapsto R_t$ u $B(H)$, koji povezuje T i S, dan formulom $R_t := S(t|T| + (1-t)I)$. Primijetimo da je R_t zapravo put u $\Phi(H)$, budući da je $\pi(R_t) = \pi(S)(t|\pi(T)| + (1-t)I)$ invertibilno u $\mathrm{Cal}(H)$, za sve $t \in \mathrm{I}$. Iz korolara 8.18 slijedi da je $\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(S)$. Također je $\pi(T) \overset{h}{\sim} \pi(S)$ u $\mathrm{GL}(\mathrm{Cal}(H))$, budući da je $t \mapsto \pi(R_t)$ put u $\mathrm{GL}(\mathrm{Cal}(H))$ od $\pi(T)$ do $\pi(S)$. Po napomeni 7.8 je $[\pi(T)]_1 = [\pi(S)]_1$. ■

Kao što smo vidjeli u korolaru 6.15, grupa $K_0(\mathcal{K})$ je izomorfna grupi $\mathbb{Z}$ i postoji izomorfizam $K_0(\mathrm{Tr}) : K_0(\mathcal{K}) \to \mathbb{Z}$ koji zadovoljava $K_0(\mathrm{Tr})([E]_0) = \mathrm{Tr}(E) = \dim(\mathrm{Im}(E))$, za sve projektore $E \in \mathcal{K}$.

Propozicija 8.20 *Za svaki Fredholmov operator $T \in \Phi(H)$ imamo formulu*

$$\mathrm{ind}(T) = (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \partial_1)([\pi(T)]_1). \tag{84}$$

Dokaz: Neka je $T \in \Phi(H)$ Fredholmov operator, $T = S|T|$, kao u propoziciji 8.19, polarna dekompozicija od T i stavimo $E := I - S^*S,\ F := I - SS^*$. Primijetimo da su E i F kompaktni projektori. Naime, u dokazu propozicije 8.19 vidjeli smo da je $\pi(S)$ unitaran element u $\mathrm{Cal}(H)$. Zato je $\pi(E) = \pi(I - S^*S) = 0 = \pi(I - SS^*) = \pi(F)$, pa su E i F kompaktni. Sada, zbog $\mathrm{Im}(E) = \mathrm{Ker}(S)$, $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Ker}(S^*)$ i zbog propozicija 8.19 i 8.10 dobivamo:

$$(K_0(\mathrm{Tr}) \circ \partial_1)([\pi(T)]_1) = (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \partial_1)([\pi(S)]_1) = K_0(\mathrm{Tr})([E]_0 - [F]_0) = \mathrm{Tr}(E) - \mathrm{Tr}(F)$$

$$= \dim(\mathrm{Im}(E)) - \dim(\mathrm{Im}(F)) = \mathrm{ind}(S) = \mathrm{ind}(T). \quad ■$$

Slijedeće bitno svojstvo indeksa, koje je dio klasične Fredholmove teorije, je sada trivijalna posljedica propozicije 8.20.

Korolar 8.21 *Neka su $S, T \in \Phi(H)$ dva Fredholmova operatora. Tada vrijedi*

$$\mathrm{ind}(ST) = \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(\mathrm{T}) \tag{85}$$

Nadalje, ako je $S \equiv T \pmod{\mathcal{K}}$, tada je također $\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(S)$.

Dokaz: Koristeći propoziciju 7.4 (*iv*), dobivamo $[\pi(ST)]_1 = [\pi(S)\pi(T)]_1 = [\pi(S)]_1 + [\pi(T)]_1$. Budući da je preslikavanje $K_0(\mathrm{Tr}) \circ \partial_1 : K_1(\mathrm{Cal}(H)) \to \mathbb{Z}$ homomorfizam grupa, kao kompozicija homomorfizama, to je po propoziciji 8.20

$$\mathrm{ind}(ST) = (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \partial_1)([\pi(ST)]_1) = (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \partial_1)([\pi(S)]_1 + [\pi(T)]_1)$$

$$= (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \partial_1)([\pi(S)]_1) + (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \partial_1)([\pi(T)]_1) = \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(T).$$

Druga tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 8.20, jer iz jednakosti (84) vidimo da je indeks invarijantan obzirom na kompaktne preturbacije, budući da one definiraju isti element u Calkinovoj algebri $\mathrm{Cal}(H)$. ■

Primjer 8.22 Kao što znamo, SES

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} B(H) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cal}(H) \longrightarrow 0,$$

inducira egzaktan niz K-grupa (83). Budući da je $K_0(B(H)) = 0 = K_1(B(H))$, to se (uz malu nepreciznost označavanja) niz (83) reducira na

$$\begin{tikzcd}
K_1(\mathcal{K}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & K_1(\mathrm{Cal}(H)) \arrow[d, "\partial_1"] \\
K_0(\mathrm{Cal}(H)) & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Zbog toga je vezno preslikavanje ∂_1 izomorfizam i imamo

$$K_1(\mathrm{Cal}(H)) \cong K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}.$$

8.5 Toeplitzova algebra

Neka je A C^*-algebra s jedinicom i $v \in A$ izometrija (tj. $v^*v = 1$) koja nije invertibilna, odnosno, nije unitarna. Definiramo **Toeplitzovu algebru** $\mathcal{T}_{A,v}$ od v u A, kao $C^*(v)$, tj. kao C^*-podalgebru od A generiranu s v. Najjednostavniji primjer daje izbor $A = B(H)$ i $v = S$, gdje je H separabilni beskonačnodimenzionalni Hilbertov prostor i $S \in B(H)$ unilateralni shift, tj. operator definiran na ortonormiranoj bazi $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ od H s $e_n \mapsto e_{n+1}$. Da struktura od $\mathcal{T}_{A,v}$ ne ovisi o konkretnom izboru para (A, v) slijedi iz slijedećeg **univerzalnog svojstva** Toeplitzove algebre:

Teorem 8.23 (Coburn) *Neka je A C^*-algebra s jedinicom i $v \in A$ izometrija koja može biti i unitarna. Ako su H i $S \in B(H)$ kao gore, tada postoji jedan i samo jedan $*$-homomorfizam $\varphi : \mathcal{T}_{B(H),S} \to C^*(v)$ takav da je $\varphi(S) = v$. Štoviše, φ je izomorfizam ako i samo ako v nije invertibilna, tj. ako v nije unitarna izometrija.*

Dokaz teorema može se naći u [17]. Zbog toga naprosto govorimo o Toeplitzovoj algebri, kao o univerzalnoj C^*-algebri generiranoj sa izometrijom koja nije unitarna i jednostavno pišemo $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{A,v}$, neovisno o njenoj konkretnoj realizaciji (A, v).

Neka je sad A proizvoljna C^*-algebra generirana s jednim unitarnim elementom. Kako je svaki unitarni ujedno i normalni element, A je izomorfna C^*-algebri kompleksnih funkcija na spektru od u. No, spektar bilo kojeg unitarnog elementa je sadržan u jediničnoj kružnici $\mathbb{T}$, pa je svaka takva algebra A izomorfna kvocijentu funkcijske algebre $C(\mathbb{T})$ po nekom idealu. Kako je sama $C(\mathbb{T})$

generirana funkcijom $\mathrm{id}_{\mathbb{T}}$, koja je također unitarna (sa spektrom $\mathbb{T}$), slijedi da je $C(\mathbb{T})$ univerzalna C^*-algebra koju tražimo.

Po univerzalnom svojstvu od $\mathcal{T}$ i relacije $u^*u = 1$, postoji jedinstveni $*$-homomorfizam

$$\psi : S \mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{T}} : \mathcal{T} \to C(\mathbb{T}).$$

To je preslikavanje surjektivno, jer $\psi(S) = \mathrm{id}_{\mathbb{T}}$ generira $C(\mathbb{T})$. $*$-homomorfizam ρ sa $\mathcal{T}$ u proizvoljnu komutativnu C^*-algebru mora zadovoljavati $\rho(S)\rho(S)^* = \rho(S)^*\rho(S) = 1$ i po univerzalnom svojstvu od $C(\mathbb{T})$, preslikavanje ρ se faktorizira preko ψ. Slijedi da je jezgra od ψ najmanji (obostrani i zatvoreni) ideal u $\mathcal{T}$ koji sadržava skup svih komutatora $[x, y] = xy - yx$ u $\mathcal{T}$. Ako taj ideal označimo s $[\mathcal{T}, \mathcal{T}]$, imamo SES

$$0 \longrightarrow [\mathcal{T}, \mathcal{T}] \xrightarrow{\iota} \mathcal{T} \xrightarrow{\psi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0, \tag{86}$$

gdje je ι inkluzija. Primijetimo kako tu činjenicu lako dobivamo koristeći univerzalna svojstva algebri.

Ako uzmemo $v = S$ za unilateralni shift koji djeluje na H, komutator $[S^*, S] = 1 - SS^*$ je točno projektor na potprostor razapet s vektorom e_1, pa je svakako $[S^*, S] \in \mathcal{K}$. Kako S generira $\mathcal{T}$, zaključujemo da su svi komutatori u $\mathcal{T}$ kompaktni, dakle $[\mathcal{T}, \mathcal{T}] \subset \mathcal{K}$. Obratno, kako je $[(S^*)^k, S^k] = 1 - S^k(S^*)^k$ projektor na potprostor razapet vektorima $e_1, \ldots e_k$, a budući da konačnodimenzionalni projektori generiraju $\mathcal{K}$ kao C^*-algebru, dobivamo i drugu inkluziju, $\mathcal{K} \subset [\mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Zato je

$$[\mathcal{T}, \mathcal{T}] \cong \mathcal{K}.$$

Time (86) postaje

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{T} \xrightarrow{\psi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0. \tag{87}$$

Mogli smo postupiti i ovako. Pogledajmo kvocijentno preslikavanje $\pi : B(H) \to \mathrm{Cal}(H)$. Budući da je operator $I - S^*S$ kompaktan, to je $\pi(S)$ unitarni element u Calkinovoj algebri $\mathrm{Cal}(H)$. Tvrdimo da je $\sigma(\pi(S)) = \mathbb{T}$. Zaista, budući da je S Fredholmov operator (jer je $\pi(S)$ invertibilan), $\mathrm{Ker}(S) = 0$ i $\mathrm{Ker}(S^*) = \mathrm{span}\{e_1\}$, to je $\mathrm{ind}(S) = -1$. Tada iz propozicije 8.20 slijedi da $[\pi(S)]_1$ nije nula u grupi $K_1(\mathrm{Cal}(H))$, pa $\pi(S)$ nije homotopno s jedinicom u $U(\mathrm{Cal}(H))$. Po lemi 3.5 (*ii*) zaključujemo da je $\sigma(\pi(S)) = \mathbb{T}$, kao što smo i tvrdili.
Sada, kako je $\mathcal{T}/\mathcal{K} = C^*(\pi(S))$ i kako je $C^*(\pi(S))$ izomorfna s $C(\mathbb{T}) = C(\sigma(\pi(S)))$, dobivamo egzaktnost niza (87). Eksplicitno, ψ je kompozicija preslikavanja π i izomorfizma $C^*(\pi(S)) \to C(\mathbb{T})$ koji preslikava $\pi(S)$ u identitetu $\mathrm{id}_{\mathbb{T}} \in C(\mathbb{T})$.

Dakle, izabravši tu reprezentaciju $\mathcal{T} \hookrightarrow B(H)$, dobili smo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{T} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & C(\mathbb{T}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] & B(H) \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Cal}(H) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Prirodnost veznih preslikavanja u K-teoriji implicira komutativnost kvadrata

$$\begin{tikzcd}
K_1(C(\mathbb{T})) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d] & K_0(\mathcal{K}) \arrow[d, equal] \\
K_1(\mathrm{Cal}(H)) \arrow[r, "\partial_1"] & K_0(\mathcal{K})
\end{tikzcd}$$

Ako primijenimo formulu (84) na taj dijagram, vidimo da ako je $T \in \mathcal{T}$ Fredholmov operator, njegov je indeks dan sa

$$\mathrm{ind}(T) = (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \partial_1)([\psi(T)]_1), \tag{88}$$

gdje je $\partial_1 : K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$.

Funkciju $\psi(T) \in C(\mathbb{T})$ zovemo **simbol** Fredholmovog operatora $T \in \mathcal{T}$. Po definiciji, oprator T je Fredholmov ako je invertibilan modulo $\mathcal{K}$, što je ekvivalentno uvjetu da simbol $\psi(T) : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ nigdje ne postiže nulu. Postoji jednostavna relacija između indeksa od T i obrtnog broja funkcije $\psi(T) : \mathbb{T} \to \mathbb{C}^\times$ oko ishodišta. Prisjetimo se definicije obrtnog broja:

Definicija 8.24 Klasa homotopije $[f]$ funkcije $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definira element $[f] \in \pi_1(\mathbb{C}^\times) = \pi_1(\mathbb{T})$, gdje π_1 označava fundamentalnu grupu. Postoji izomorfizam $\pi_1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}$ koji preslikava $\mathrm{id}_\mathbb{T}$ u 1. **Obrtni broj** od f, $w(f)$, se definira kao slika od $[f]$ pod odgovarajućim izomorfizmom $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}$.

Teorem 8.25 (Gohberg-Krein) *Neka je $\mathcal{T} \subset B(H)$ Toeplitzova algebra generirana s unilateralnim shiftom $S \in B(H)$. Ako je $\psi : \mathcal{T} \to C(\mathbb{T})$ simboličko preslikavanje generirano s $S \mapsto \mathrm{id}_\mathbb{T}$, tada za svaki Fredholmov operator $T \in \mathcal{T}$ vrijedi*

$$\mathrm{ind}(T) = -w(\psi(T)). \tag{89}$$

Dokaz: Kao što nam je K-teorija pokazala, indeks od T ovisi samo o klasi ekvivalencije od $\psi(T)$ u $K_1(C(\mathbb{T}))$. Ako dva preslikavanja $\mathbb{T} \to \mathbb{C}^\times$ imaju isti obrtni broj, tada su homotopna, pa će zato definirati istu klasu u K-teoriji. Zbog toga indeks od T ovisi samo o $w(\psi(T))$.
Sada ćemo za svaki obrtni broj naći konkretni Fredhomlov operator $T \in \mathcal{T}$ kojemu je on indeks. Stavimo $[z \mapsto z] := \mathrm{id}_\mathbb{T}$ i primijetimo da je $\mathrm{ind}(S) = -1 = -w([z \mapsto z]) = -w(\psi(S))$. Zbog aditivnosti indeksa je

$$\mathrm{ind}(S^n) = n \cdot \mathrm{ind}(S) = -n = -nw([z \mapsto z]) = -w([z \mapsto z^n]) = -w(\psi(S^n)),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kako je $\mathrm{ind}(S^*) = 1$, analognim računom dobivamo

$$\mathrm{ind}((S^*)^n) = -w(\psi((S^*)^n)),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorem sada slijedi iz tih specijalnih slučajeva. ■

Povijesno gledano, Toeplitzova algebra je prvotno konstruirana preko tzv. Toeplitzovih operatora, po kojima je i dobila ime. Tu krećemo sa Hilbertovim prostorom $L^2(\mathbb{T})$ kvadratno integrabilnih funkcija na jediničnoj kružnici $\mathbb{T}$. Prostor $L^2(\mathbb{T})$ je kanonski izomorfan prostoru kvadratno sumabilnih nizova kompleksnih brojeva, $\ell^2(\mathbb{Z})$, indeksiranih sa $\mathbb{Z}$. Izomorfizam je Fourierova transformacija $\mathrm{F} : L^2(\mathbb{T}) \xrightarrow{\cong} \ell^2(\mathbb{Z})$, dana s $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, gdje su

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt,\ n \in \mathbb{Z}$$

Fourierovi koeficijenti od f. Niz $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $u_n(t) := e^{int}$, čini ortonormiranu bazu za $L^2(\mathbb{T})$. Potprostor $\ell^2(\mathbb{N})$ tada odgovara potprostoru $H^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ koji se sastoji od svih funkcija iz $L^2(\mathbb{T})$ koje imaju nenegativne Fourierove koeficijene (ovdje smatramo da je $0 \in \mathbb{N}$). $H^2(\mathbb{T})$ zovemo **Hardyjev prostor**. Neka je $P : L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ ortogonalni projektor. Tada za neprekidnu funkciju $f \in C(\mathbb{T})$ definiramo **Toeplitzov operator** T_f sa $T_f := PM_f$, gdje je $M_f \in B(H^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}))$ restrikcija operatora na $B(H^2(\mathbb{T}))$ definiranog s $M_f(g) := fg$. Primijetimo da je preslikavanje $M : f \mapsto M_f : C(\mathbb{T}) \to B(L^2(\mathbb{T}))$ izometrička reprezentacija komutativne C^*-algebre $C(\mathbb{T})$ na Hilbertovom prostoru $L^2(\mathbb{T})$. Sada definiramo C^*-algebru $\mathcal{T}'$, kao C^*-podalgebru od $B(H^2(\mathbb{T}))$ generiranu sa svim T_f, $f \in C(\mathbb{T})$.

Propozicija 8.26 *C^*-algebre $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ su izomorfne.*

Skica dokaza: Lako se vidi da je preslikavanje $T_{u_1} : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ (odnosno $T_{u_{-1}}$) operator koji odgovara unilateralnom shiftu $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ (odnosno, operatoru S^*) pod Fourierovom transformacijom F. Da dokažemo da su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ su izomorfne, dovoljno je naći $*$-izomorfizam između skupa $\{T_p : p \text{ je trigonometrijski polinom}\}$ i skupa svih konačnih linearnih kombinacija od $\{T_1 \cdots T_n : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ T_k \in \{S, S^*\}\}$. Kako je $T_{u_n} = (T_{u_1})^n$ za $n \geq 0$ i $T_{u_n} = (T_{u_{-1}})^{|n|}$, za $n < 0$, možemo preslikati T_{u_1} u S i $T_{u_{-1}}$ u S^* i onda proširiti to preslikavanje po linearnosti. ■

Zbog tog izomorfizma i prethodnih razmatranja direktno dobivamo slijedeće tvrdnje:

(i) C^*-algebre $\mathcal{T}'$ i $C^*(S) \subset B(H^2(\mathbb{T}))$ ($S \in B(H^2(\mathbb{T}))$ je unilateralni shift), su izomorfne.

(ii) Za sve funkcije $f, g \in C(\mathbb{T})$ operator $[T_f, T_g]$ je kompaktan.

(iii) $\mathcal{T}'$ sadrži sve kompaktne operatore na $H^2(\mathbb{T})$.

(iv) $\mathcal{T}'/K(H^2(\mathbb{T})) \cong C(\mathbb{T})$.

(v) Niz

$$0 \longrightarrow K(H^2(\mathbb{T})) \xrightarrow{\iota} \mathcal{T}' \xrightarrow{\psi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

je egzaktan.

Kao što smo već vidjeli, operator $T \in \mathcal{T}$ je Fredholmov ako i samo ako je simbol $\psi(T) \in C(\mathbb{T})$ invertibilna funkcija, pa iz teorema 8.25 i prethodnih razmatranja direktno dobivamo:

Korolar 8.27 *Funkcija $f \in C(\mathbb{T})$ invertibilna, ako i samo ako je Toeplitzov operator $T_f \in B(H^2(\mathbb{T}))$ Fredholmov. U tom slučaju je*

$$\mathrm{ind}(T_f) = -w(f) \tag{90}$$

9 Daljnji razvoj K-teorije za C^*-algebre

Na kraju ove radnje skicirajmo daljnji razvoj K-teorije za C^*-algebre. Tokom ove točke A će označavati C^*-algebru.

U teoremu 7.14 smo iskazali egzistenciju izomorfizma $K_1(A) \cong K_0(SA)$, gdje je S funktor suspenzije. Upravo taj izomorfizam nam omogućuje da definiramo **više K-funktore** K_n $(n \geq 2)$ iz kategorije C^*-algebri u kategoriju Abelovih grupa. Njih definiramo induktivno, $K_n := K_{n-1} \circ S$, $n \geq 2$. Koristeći propoziciju 7.13 i teorem 7.14, lako se vidi da su K_n poluegzaktni funktori za sve $n \geq 2$. Nadalje, iduktivno definiramo i pojam **n-te iterirane suspenzije**, tako da stavimo $S^n A := S(S^{n-1}A)$ i za $*$-homomorfizam $\varphi : A \to B$ (B je C^*-algebra), definiramo $*$-homomorfizam $S^n : S^n A \to S^n B$ s $S^n(\varphi) := S(S^{n-1}\varphi)$ $(n \geq 2)$. Tada su viši K-funktori dani s

$$K_n(A) = K_1(S^{n-1}A) \cong K_0(S^n A), \quad K_n(\varphi) = K_1(S^{n-1}\varphi), \quad n \geq 2.$$

Sada za SES C^*-algebri

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \tag{91}$$

induktivno definiramo **viša vezna preslikavanja** $\partial_{n+1} : K_{n+1}(B) \to K_n(I)$ $(n \geq 1)$ na slijedeći način. Po egzaktnosti od S (propozicija 7.13), slijedeći niz

$$0 \longrightarrow S^n I \xrightarrow{S^n\varphi} S^n A \xrightarrow{S^n\psi} S^n B \longrightarrow 0 \tag{92}$$

je SES, pa po teoremu 7.14 imamo izomorfizam

$$\theta_{S^{n-1}I} : K_n(I) = K_1(S^{n-1}I) \to K_0(S^n I).$$

Zbog toga, postoji jedinstveni homomorfizam grupa ∂_{n+1} takav da dijagram

$$\begin{tikzcd}
K_{n+1}(B) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, equal] & K_n(I) \arrow[d, "\theta_{S^{n-1}I}"] \\
K_1(S^n B) \arrow[r, "\overline{\partial}_1"'] & K_0(S^n I)
\end{tikzcd}$$

komutira, gdje je $\overline{\partial}_1$ vezno preslikavanje pridruženo SES-u (92).

Tada se pokaže da su vezna preslikavanja $\partial_1, \partial_2, \ldots$ (uzimamo $S^0 A := A$ i $S^0\varphi := \varphi$) prirodna u slijedećem smislu: Ako je dan komutativni dijagram C^*-algebri (α, β i γ su $*$-homomorfizmi)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I' \arrow[r, "\varphi'"'] & A' \arrow[r, "\psi'"'] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{93}$$

kojem su redovi egzaktni, tada dijagram

$$\begin{tikzcd}
K_{n+1}(B) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "K_{n+1}(\beta)"'] & K_n(I) \arrow[d, "K_n(\gamma)"] \\
K_{n+1}(B') \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & K_n(I')
\end{tikzcd} \tag{94}$$

komutira.

Sada niz (91) inducira egzaktan niz K-grupa, tzv. **dugi egzaktni niz u K-teoriji**

$$\cdots \xrightarrow{K_{n+1}(\psi)} K_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n(I) \xrightarrow{K_n(\varphi)} K_n(A) \xrightarrow{K_n(\psi)} K_n(B) \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1}(I) \xrightarrow{K_{n-1}(\varphi)} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_1} K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B), \tag{95}$$

gdje je ∂_1 vezno preslikavanje i ∂_n, za $n \geq 2$ njegovi viši analogoni.

Sada dolazimo do fundamentalnog teorema, tzv. Bottove preriodičnosti, koji grubo rečeno kaže da postoje samo dva esencijalno različita K-funktora, K_0 i K_1. Preciznije, vrijedi:

Teorem 9.1 (Bottova periodičnost) *Funktori K_{n+2} i K_n su prirodno izomorfni za svako $n \in \mathbb{Z}_+$. Drugim riječima, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ postoji prirodni izomorfizam $\alpha_n : K_{n+2} \to K_n$ takav da za svaki par C^*-algebri A i C i svaki $*$-homomorfizam $\varphi : A \to C$, dijagram*

$$\begin{tikzcd}
K_{n+2}(A) \arrow[r, "(\alpha_n)_A"] \arrow[d, "K_{n+2}(\varphi)"'] & K_n(A) \arrow[d, "K_n(\varphi)"] \\
K_{n+2}(C) \arrow[r, "(\alpha_n)_C"'] & K_n(C)
\end{tikzcd}$$

komutira. Specijalno je $K_{n+2}(A) \cong K_n(A)$ za svaku C^*-algebru A i svako $n \in \mathbb{Z}_+$.

Jedna od najbitnijih posljedica teorema 9.1 je da se dugi egzaktni niz u K-teoriji (95) induciran SES-om (91) raspada na **šesteročlani egzaktni niz**

$$\begin{tikzcd}
K_0(I) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\psi)"] & K_0(B) \arrow[d, "\partial_0"] \\
K_1(B) \arrow[u, "\partial_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\psi)"] & K_1(I) \arrow[l, "K_1(\varphi)"]
\end{tikzcd} ,$$

gdje je ∂_0 definiran kompozicijom $K_0(B) \xrightarrow{\beta_B} K_2(B) \xrightarrow{\partial_2} K_1(I)$, gdje je $\beta_B := (\alpha_0)_B^{-1}$, a α_0 kao u teoremu 9.1.

Literatura

[1] M. Rørdam, F. Larsen, N. J. Laustsen: *An introduction to K-Theory for C^*-algebras*; Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[2] B. Blackadar: *K-Theory for Operator Algebras*; 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] N. E. Wegge-Olsen: *K-Theory and C^*-algebras: a friendly approach*; Oxford University Press, Oxford, 1993.

[4] J. M. Garcia-Bondía, J.C. Várilly, H. Figueroa : *Elements of Noncommutative geometry*; Birkhäuser, Boston, 2001.

[5] N. P. Landsman: *Lecture notes on C^*-algebras and K-Theory*; http://www.science.uva.nl/ npl/CK.pdf i http://www.science.uva.nl/ npl/CKmaster.pdf .

[6] M. F. Atiyah : *K-Theory*; 2nd edition, Advanced Book Program, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1967, 1989.

[7] M. Karoubi *K-Theory: An introduction*; Springer, Berlin, 1978.

[8] A. Hatcher: *Vector bundles and K-Theory*; http://www.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VB.pdf

[9] J. Rosenberg: *Algebraic K-Theory and Its Applications*; Texts in Mathematics, no. 147. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1994.

[10] E. van Erp: *The Atiyah-Singer Index Theorem, C^*-algebraic K-Theory and Quantization*; Thesis for the degree of Master of Science, University of Amsterdam, Amsterdam, 1999.

[11] D. P. Williams: *Lecture notes on K-Theory*; http://www.math.dartmouth.edu/ dana/expository/pdf/k-thy.pdf

[12] J. Cuntz: *K-theory and C^*-algebras*; Proc. Conf. on K-theory (Bielefeld, 1982), Springer Lecture Notes in Math. 1046, 55-79.

[13] J. Brodzki: *An Introduction to K-theory and Cyclic Cohomology*; arXiv:funct-an/9606001 v1, 1996.

[14] J.C. Várilly: *An Introduction to noncommutative geometry*; in the Proceedings of the EMS Summer School on Noncommutative geometry and Applications, Monsaraz and Lisaboa, September 1997.

[15] M. Khalkhali: *Very Basic Noncommutative Geometry*; arXiv:math-KT/0408416 v1, 2004

[16] G. J. Murphy: *C^*-algebras and operator theory*; Academic Press, London, 1990.

[17] K. R. Davidson: *C^*-algebras by example*; Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1996.

[18] G. K. Pedersen: *Analysis Now*; Graduate Texts in Mathematics, no. 120. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1988.

[19] S. Mac Lane: *Categories for the Working Mathematician*; Graduate Texts in Mathematics, no. 5. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

[20] H. Kraljević: *Algebre operatora*; Skripta, PMF-Matematički odjel, zimski semestar 2002./2003.

[21] H. Kraljević: *Fredholmovi operatori*; Skripta, PMF-Matematički odjel, ljetni semestar 2002./2003.

[22] S. Kurepa: *Funkcionalna analiza*; Školska knjiga, Zagreb, 1990.