Zadatci s natjecanja I

Zadatak 1: [1990., 7.razred] Odredite sve troznamenkaste brojeve koju su 5 puta veći od umnoška svojih znamenaka.

Rješenje: Imamo: $\overline{abc} = 5abc$, tj.

$$100a + 10b + c = 5abc.$$

Vidimo da $5|c$, pa jer je očito $c \neq 0$, zaključujemo da je $c = 5$. Uvrštavanjem i kraćenjem s 5 dobivamo da je

$$20a + 2b + 1 = 5ab.$$

Dakle, $5|(2b+1)$, što je ispunjeno za $b = 2$ i $b = 7$ (iz $2b \equiv -1 \equiv 4 \pmod 5$ imamo $b \equiv 2 \pmod 5$).

Ako je $b = 5$, onda je $10a + 5 = 0$, što je nemoguće.

Ako je $b = 7$, onda je $15a = 15$, pa je $a = 1$, te dobivamo da je rješenje $\overline{abc} = 175$. ♢

Zadatak 2: [1989., 7.razred] Ako četveroznamenkasti broj napišemo obrnutim redoslijedom, novi četvroznamenkasti broj bit će 9 puta veći. Koji četveroznamenkasti broj ima to svojstvo?

Rješenje: Imamo $9 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$. Ako je $a \geq 2$, onda je $9 \cdot \overline{abcd} \geq 18000$. Stoga je $a = 1$. Promotrimo zadnju znamenku: zadnja znamenka broja $9d$ mora biti jednaka 1, što povlači da je $d = 9$ ($9d \equiv a \equiv 1 \equiv -9 \pmod{10}$ $\Rightarrow$ $d \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$ $\Rightarrow$ $d = 9$). Uvrštavanjem dobivamo

$$9(1000 + 100b + 10c + 9) = 9000 + 100c + 10b + 1,$$

što povlači $89b + 8 = c$. Budući da je $c \leq 9$, odavde je očito da mora biti $b = 0$, pa je $c = 8$. Dakle, rješenje je $\overline{abcd} = 1089$. ♢

Zadatak 3: [1979., 1.razred] U dekadskom prikazu prirodni broj n je troznamenkast, a znamenka stotica jednaka je znamenki jedinica. Broj n je djeljiv s 15. Odredite sve brojeve koji imaju navedena svojstva.

Rješenje: Broj n ima oblik $\overline{xyx} = 100x + 10y + x$. Uvjet da $5|n$ povlači da $5|x$, pa jer je $x \neq 0$, dobivamo da je $x = 5$. Uvjet da $3|n$ povlači da je zbroj znamenaka broja n djeljiv s 3. Dakle, $3|(10 + y)$. Odavde slijedi da je $y \in \{2, 5, 8\}$ $(10 + y \equiv 0 \pmod 3 \;\Rightarrow\; y \equiv 2 \pmod 3)$. Dakle, traženi brojevi su 525, 555 i 585. ♢

Zadatak 4: [1982., 3.razred] Dva dvoznamenkasta broja zapisana jedan za drugim čine četveroznamenkasti broj koje je djeljiv s njihovim produktom. Nađite te brojeve.

Rješenje: Neka su traženi brojevi x i y. Tada mora vrijediti da je $100x + y = kxy$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Iz $y = x(ky - 100)$ slijedi da $x|y$. Stavimo $y = ux$. Zbog $u = y/x \leq 99/10$ imamo da je $u \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Uvrštavanjem dobivamo: $100 = u(kx - 1)$. Dakle, $u|100$, pa je $u \in \{1, 2, 4, 5\}$. Nadalje, mora vrijediti $k \geq 2$, jer za $k = 1$ imamo $u(x - 1) < xu = y < 100$.

Ako je $u = 1$, onda je $kx = 101$, što je nemoguće jer je $k \geq 2$ i x dvoznamenkast.

Ako je $u = 2$, onda je $kx = 51$, odakle je $k = 3$, $x = 17$, $y = 34$.

Ako je $u = 4$, onda je $kx = 26$, odakle je $k = 2$, $x = 13$, $y = 52$.

Ako je $u = 5$, onda je $kx = 21$, što nema rješenje za $k \geq 2$ i x dvoznamenkast.

Dakle, rješenja su $(x, y) = (17, 34)$ i $(x, y) = (13, 52)$. ♢

Zadatak 5: [1982., 6.razred] Najveći zajednički djelitelj dva prirodna broja je 24, a najmanji zajednički višekratnik istih brojeva je 504. Nijedan od tih brojeva nije djeljiv s onim drugim brojem. Koji su to brojevi?

Rješenje: Neka su traženi brojevi a i b. Imamo: $a = 24x$, $b = 24y$, $\mathrm{nzd}(a, b) = 1$. Iz formule $\mathrm{nzd}(a, b) \cdot \mathrm{nzv}(a, b) = |ab|$ slijedi $24 \cdot 504 = 24x \cdot 24y$, što povlači da je $xy = 21$. Dakle, $x \in \{1, 3, 7, 21\}$. Za $x = 1$ dobivamo da $a|b$, a za $x = 21$ dobivamo da $b|a$. Prema tome, jednine mogućnosti su $(x, y) = (3, 7)$ i $(x, y) = (7, 3)$. Traženi brojevi su 72 i 168. ♢

Zadatak 6: [1986., 2.razred] Nađite najveći zajednički djelitelj brojeva

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^{5n-1} \quad \text{za } n = 1, 2, \ldots.$$

Rješenje: Označimo s $a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^{5n-1} = 2^{5n} - 1$. Neka je d traženi djelitelj. Imamo da $d|a_1 = 31$. Budući da $2^5 - 1$ dijeli $2^{5n} - 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to $31|a_n$ za svaki n. Dakle, $d = 31$. ♢

Zadatak 7: [1987., 1.razred] Neka je n prirodan broj. Dokažite da je najveći zajednički djelitelj brojeva n^2+1 i $(n+1)^2+1$ jednak ili 1 ili 5. Dokažite da je jednak 5 ako i samo ako je $n \equiv 2 \pmod 5$.

Rješenje: Označimo s $d_n = \text{nzd}(n^2+1, (n+1)^2+1)$. Tada imamo da

$$d_n | ((n^2+2n+2) - (n^2+1)) = 2n+1,$$

$$d_n | (2(n^2+1) - n(2n+1)) = 2-n,$$

$$d_n | ((2n+1) - 2(n-2)) = 5.$$

Dakle, $d_n \in \{1,5\}$.

Za $n \equiv 0,1,2,3,4 \pmod 5$ dobivamo redom

$$\begin{aligned} n^2+1 &\equiv 1,2,0,0,2 \pmod 5, \\ (n+1)^2+1 &\equiv 2,0,0,2,1 \pmod 5. \end{aligned}$$

Vidimo da su oba broja n^2+1 i $(n+1)^2+1$ istovremeno djeljiva s 5 ako i samo ako je $n \equiv 2 \pmod 5$. ♢

Zadatak 8: [1994., 7.razred] Bogati voćar, vlasnik 441 stabala maslina u masliniku, želi ta stabla podijeliti svojoj djeci i unucima, tako da svako njegovo dijete dobije 5 stabala maslina više nego svako unuče. Koliko djece, a koliko unučadi, ima bogati voćar, ako je ukupan broj djece i unučadi 18? Koliko je stabala maslina dobilo svako njegovo dijete, a koliko svako unuče?

Rješenje: Neka je x broj djece. Tada je $(18-x)$ broj unučadi. Neka je y broj maslina koje je dobilo svako dijete. Tada je svako unuče dobilo $(y-5)$ maslina. Prema uvjetu zadatka, vrijedi

$$xy + (18-x)(y-5) = 441,$$

što povlači da je

$$5x + 18y = 531.$$

Budući da $9|531$ i $2 \nmid 531$, imamo da je $5x$ neparan i djeljiv s 9. No, tada je i X neparan i djeljiv s 9, a znamo i da je $0 \leq x \leq 18$. Stoga je $x = 9$, pa iz $18y = 486$, tj. $y = 27$. Dakle, voćar ima 9 djece i 9 unučadi. Svako dijete je dobilo po 27 stabala maslina, a svako unuče po 22 stabala. ♢