1	2	3	4	5	6	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

Teorija brojeva

2. kolokvij, 26.6.2018.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Zadaci se rješavaju na ovim papirima. Odmah se **čitljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu s $201x^2 + 101xy + 13y^2$.

2. Odredite $h(-103)$, te nađite sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d = -103$.

3. Dokažite ili opovrgnite:

(a) Neka je f multiplikativna funkcija takva da je $\lim_{m\to\infty} f(p^m) = 0$, za svaki prosti broj p. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

(b) Neka je f multiplikativna funkcija i neka je S skup svih potencija prostih brojeva, tj

$$S = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, ...\}$$

i neka je

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in S}} f(n) = 0.$$

Tada je

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in \mathbb{N}}} f(n) = 0.$$

4. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak brojeva $\frac{559}{812}$ i $\frac{1+\sqrt{19}}{6}$.

5. Nađite sve Pitagorine trokute u kojima je jedna stranica jednaka 69.

6. Nađite najmanja rješenja u skupu prirodnih brojeva (ako postoje) jednadžbi $x^2 - 89y^2 = -1$ i $x^2 - 89y^2 = 1$.

Rješenja:

1. $5x^2 - 3xy + 13y^2$

2. $h(-103) = 5$, $x^2 + xy + 26y^2$, $2x^2 - xy + 13y^2$, $2x^2 + xy + 13y^2$, $4x^2 - 3xy + 7y^2$, $4x^2 + 3xy + 7y^2$

3. (a) Neka je f multiplikativna funkcija, $f(p^m) = \dfrac{1}{m}$. Za nju je očito $\lim_{m\to\infty} f(p^m) = 0$, za svaki prost broj p. No, budući da je vrijednost of f u prostim brojevima jednaka $f(p) = 1$, za proizvoljno velik produkt n prostih brojeva s potencijama 1 vrijedi da je $f(n) = 1$, pa očito traženi limes nije jednak nuli.

(b) Neka je $0 < \epsilon < 1$. Definiramo $S_0 = \{p_i^{a_i} : f(p_i^{a_i}) \geq 1\}$ (to je konačan skup zbog pretpostavke). Neka je sada $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall p_i^{a_i} \geq n_0$ vrijedi

$$f(p_i^{a_i}) = \frac{\epsilon}{\prod_{x\in S_0} x}.$$

Stavimo

$$n_1 = \prod_{p_i^{a_i} < n_0} p_i^{a_i}.$$

Neka je sada $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Za $n \geq n_2$ imamo $n = p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}$. Ne mogu si $p_i^{a_i}$ biti manji od n_0 zbog $n \geq n_1$. BSO neka je $p_1^{a_1} \geq n_0$. Sada koristeći multiplikativnost imamo

$$f(n) = f(p_1^{a_1}) \cdot f\left(\prod_{p_i^{a_i}\in S_0} p_i^{a_i}\right) \cdot f\left(\prod_{p_i^{a_i}\notin S_0} p_i^{a_i}\right) < f(p_1^{a_1}) \cdot \prod_{p_i^{a_i}\in S_0} f\left(p_i^{a_i}\right) \leq f(p_1^{a_1}) \cdot \prod_{x\in S_0} x < \frac{\epsilon}{\prod_{x\in S_0} x} \cdot \prod_{x\in S_0} x = \epsilon.$$

4. $\dfrac{559}{812} = [0, 1, 2, 4, 1, 3, 2, 2, 2]$, $\dfrac{1+\sqrt{19}}{6} = \left[0, 1, \overline{8, 2, 1, 3, 1, 2}\right]$

5. $(69, 92, 115)$, $(69, 792, 795)$, $(69, 2380, 2381)$, $(69, 260, 269)$

6. $(500, 53)$, $(500001, 53000)$

1	2	3	4	5	6	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

Teorija brojeva

2. kolokvij, 26.6.2018.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Zadaci se rješavaju na ovim papirima. Odmah se **čitljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu s $199x^2 - 93xy + 11y^2$.

2. Odredite $h(-104)$, te nađite sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d = -104$.

3. Dokažite ili opovrgnite:

(a) Neka je f multiplikativna funkcija takva da je $\lim_{m\to\infty} f(p^m) = 0$, za svaki prost broj p. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

(b) Neka je f multiplikativna funkcija i neka je S skup svih potencija prostih brojeva, tj.

$$S = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, ...\}$$

i neka je

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in S}} f(n) = 0.$$

Tada je

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in \mathbb{N}}} f(n) = 0.$$

4. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak brojeva $\frac{947}{351}$ i $\frac{1+\sqrt{11}}{8}$.

5. Nađite sve Pitagorine trokute u kojima je jedna stranica jednaka 57.

6. Nađite najmanja rješenja u skupu prirodnih brojeva (ako postoje) jednadžbi $x^2 - 185y^2 = -1$ i $x^2 - 185y^2 = 1$.

Rješenja:

1. $3x^2 + xy + 9y^2$

2. $h(-104) = 6$, $x^2 + 26y^2$, $2x^2 + 13y^2$, $3x^2 + 2xy + 9y^2$, $3x^2 - 2xy + 9y^2$, $5x^2 + 4xy + 6y^2$, $5x^2 - 4xy + 6y^2$

3. (a) Neka je f multiplikativna funkcija, $f(p^m) = \dfrac{1}{m}$. Za nju je očito $\lim_{m\to\infty} f(p^m) = 0$, za svaki prost broj p. No, budući da je vrijednost of f u prostim brojevima jednaka $f(p) = 1$, za proizvoljno velik produkt n prostih brojeva s potencijama 1 vrijedi da je $f(n) = 1$, pa očito traženi limes nije jednak nuli.

(b) Neka je $0 < \epsilon < 1$. Definiramo $S_0 = \{p_i^{a_i} : f(p_i^{a_i}) \geq 1\}$ (to je konačan skup zbog pretpostavke). Neka je sada $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall p_i^{a_i} \geq n_0$ vrijedi

$$f(p_i^{a_i}) = \frac{\epsilon}{\prod_{x\in S_0} x}.$$

Stavimo

$$n_1 = \prod_{p_i^{a_i} < n_0} p_i^{a_i}.$$

Neka je sada $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Za $n \geq n_2$ imamo $n = p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}$. Ne mogu si $p_i^{a_i}$ biti manji od n_0 zbog $n \geq n_1$. BSO neka je $p_1^{a_1} \geq n_0$. Sada koristeći multiplikativnost imamo

$$f(n) = f(p_1^{a_1}) \cdot f\left(\prod_{p_i^{a_i}\in S_0} p_i^{a_i}\right) \cdot f\left(\prod_{p_i^{a_i}\notin S_0} p_i^{a_i}\right) < f(p_1^{a_1}) \cdot \prod_{p_i^{a_i}\in S_0} f\left(p_i^{a_i}\right) \leq f(p_1^{a_1}) \cdot \prod_{x\in S_0} x < \frac{\epsilon}{\prod_{x\in S_0} x} \cdot \prod_{x\in S_0} x = \epsilon.$$

4. $\dfrac{947}{351} = [2, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 2]$, $\dfrac{1+\sqrt{11}}{8} = [0, 1, \overline{1, 5, 1, 4, 2, 4}]$

5. $(57, 76, 95)$, $(57, 540, 543)$, $(57, 1624, 1625)$, $(57, 176, 185)$

6. $(68, 5)$, $(9249, 680)$