Zadatci iz teorije brojeva s natjecanja učenika srednjih škola

1. U dekadskom prikazu prirodni je broj n troznamenkast, a znamenka stotica jednaka je znamenci jedinica. Broj n djeljiv je s 15. Odredite sve brojeve koji imaju navedena svojstva.

2. Neka je a proizvoljan prirodan broj. Označimo s b broj koji iz a dobijemo tako da ispustimo znamenku jedinica i tako dobivenom broju pribrojimo četverostruku znamenku jedinica broja a. (Na primjer, ako je $a = 238$, onda je $b = 23 + 4 \cdot 8 = 55$.) Dokažite da 13 dijeli a ako i samo ako 13 dijeli b.

3. Zadani prirodni broj podijelimo zdesna ulijevo na uobičajeni način u skupine od po tri znamenke. Dobivene skupine shvatimo kao troznamenkaste brojeve i pomnožimo ih naizmjence s $+1$ i -1 pa dobivene brojeve zbrojimo. Dokažite da je zadani broj djeljiv sa 7 ili sa 11 ili 13 ako i samo ako je i dobiveni broj takav.

4. Dva dvoznamenkasta broja zapisana jedan za drugim čine četveroznamenkasti broj koji je djeljiv s njihovim produktom. Nađite te brojeve.

5. Neka je dan bilo koji troznamenkasti broj (ako je broj znamenaka manji, dodajemo potreban broj nula) kojem sve znamenke nisu jednake. Od te tri znamenke načinimo najveći i najmanji mogući troznamenkasti broj. Njihova je razlika novi troznamenkasti broj, s kojim ponavljamo isti postupak. Nakon najviše šest koraka dolazi se do broja 495, koji se dalje ponavlja, i to bez obzira na izbor početnog broja. Dokazati!

6. Vrijedi: $126 = 6 \cdot 21$. Nađite sve troznamenkaste brojeve koji su jednaki produktu jedne svoje znamenke s dvoznamenkastim brojem koji čine preostale dvije znamenke.

7. Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) $9n^2 + 3n - 2$ nije djeljivo s 9 ni za koji $n \in \mathbb{Z}$;

b) $9n^2 + 3n - 2$ djeljivo je s 2 za svaki $n \in \mathbb{Z}$;

c) $9n^2 + 3n - 2$ djeljivo je s 4 za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{Z}$. Kakav je opći oblik broja n?

8. Dokažite da je $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ cijeli broj za svaki cijeli broj x.

9. Ako prirodni broj n nije djeljiv s 4, dokažite da je $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ djeljiv s 5.

10. Dokažite:

$$10|a_1 + \cdots a_{1988} \Rightarrow 10|a_1^5 + \cdots a_{1988}^5, \quad a_i \in \mathbb{N}.$$

11. Odredite sve parove priordnih brojeva kojih je umnožak 51840, a najmanji zajednički višekratnik 2160.

12. Nađite najveću zajedničku mjeru brojeva

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{5n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

13. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da su $2n^2 + 3$ i $n^2 + n + 1$ relativno prosti.

14. Neka je n prirodan broj. Dokažite da je najveća zajednička mjera brojeva $n^2 + 1$ i $(n + 1)^2 + 1$ ili 1 ili 5, te dokažite da je jednaka 5 ako i samo ako je $n \equiv 2 \pmod 5$.

15. Neka su $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ svi faktori prirodnog broja n, različiti od 1 i n. Dokažite da je

$$\frac{2}{\log n}(\log n_1 + \log n_2 + \cdots + \log n_k) = k.$$

16. Dokažite: ako je $n + 1$ djeljiv s 24, tada je i suma svih prirodnih djeljitelja broja n djeljiva s 24.

17. Može li za prirodan broj $n \geq 2$ broj $n^4 + 4$ biti prost?

18. Dokažite da za proizvoljne cijele brojeve a i b vrijedi:

$$a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 \neq 0.$$

19. Nađite sve trojke cijelih brojeva (a, b, c) koje zadovoljavaju jednakost:

$$3(a-3)^2 + 6b^2 + 2c^2 + 3b^2c^2 = 33.$$

20. Dokažite da jednadžba $2x^2 - 5y^2 = 7$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

21. Dokažite da jednadžba

$$x! + y! = 10z + 9$$

nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

22. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je izaz

$$\frac{n^2 - n - 12}{n - 3}$$

također prirodan broj.

23. Nađite sve trojke (x, y, z) prirodnih brojeva takvih da je $x \leq y \leq z$ i da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ cijeli broj.

24. Dokažite da za svaki prirodan broj k jednadžba

$$x^2 + y^2 = z^k$$

ima rješenje $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.

25. Zadan je proizvoljan prirodni broj n. Dokažite da jednadžbe $x^2 + y^2 = n$ i $x^2 + y^2 = 2n$ inaju jednako mnogo cjelobrojnih rješenja.

26. a) Služeći se binomnom formulom, iz jednakosti $3^n = (1+2)^n$ dokažite da za svaki prirodan broj n veći od 1 vrijedi nejednakost $\sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt{3}$.
    b) Dokažite da su parovi $(4, 2)$ i $(2, 4)$ jedina rješenja jednadžbe $x^y = y^x$ u skupu prirodnih brojeva, uz uvjet da je $x \neq y$.

27. Dokažite da je za svaki prirodan broj n rješenje jednadžbe

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = (\sqrt{2} - 1)^n$$

prirodan broj.

28. Neka je P produkt šest uzastopnih prirodnih brojeva većih od 1 i Q produkt drugog i petog od tih brojeva. Dokažite nejednakosti

$$(Q-1)^3 < P < Q^3.$$

29. Dokažite da je za svaki prirodan broj n i broj

$$\Big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \Big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

prirodan.

30. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi da je

$$(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n$$

cijeli broj koji nije djeljiv s 5.

31. Dokažite da ako je n proizvoljan prirodan broj, onda se broj $(5+\sqrt{26})^n$ razlikuje od cijelog broja za najviše 10^{-n}.

32. Neka je p prost broj veći od 2. Dokažite da je

$$\lfloor (2+\sqrt{5})^p \rfloor - 2^{p+1}$$

djeljiv s p. ($\lfloor x \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

33. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve x i sve prirodne brojeve d i n vrijedi:

$$\lfloor d^n x \rfloor - d\lfloor d^{n-1} x \rfloor = \lfloor d^n (x - \lfloor x \rfloor) \rfloor - d\lfloor d^{n-1}(x - \lfloor x \rfloor) \rfloor.$$

34. Nađite realna rješenja jednadžbe $\lfloor (x-1)^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

35. Dokažite da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ iracionalan broj.

36. Odredite sve racionalne brojeve a, b i c za koje vrijedi $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0$.

37. Dokažite da $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$ nije racionalan broj.

38. Neka su n i p proizvoljni prirodni brojevi te $p \geq 2$. Dokažite da broj

$$\sqrt[p]{n^p + p}$$

nije racionalan.

39. Na ploči su napisani brojevi $1, 2, \ldots, 1986$. Obrišimo bilo koja dva broja i umjesto njih napišimo njihovu razliku. Postupak ponovimo 1985 puta. Je li posljednji tako dobiveni broj paran ili neparan?

40. Brojevi od 1 do 1000 ispisani su redom po kružnici. Počevši od prvog precrtava se svaki petnaesti broj $(1, 16, 31, \ldots)$ i pri tome se prilikom ponovnih obilazaka već precrtani brojevi ponovo računaju. Koliko će brojeva ostati neprecrtano?

41. Promatrajmo sve one skupove S koje čine prirodni brojevi manji ili jednaki 90, takvi da za bilo koja dva elementa $x, y \in S$ vrijedi $x + y \neq 90$. Koliko najviše elemenata može imati skup S?

42. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ proizvoljan poredak brojeva $1, 2, \ldots, n$. Dokažite da je broj $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ paran ako je n neparan.

43. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz različitih prirodnih brojeva koji nisu manji od 2. Dokažite da postoji njegov podniz $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ takav da za svako $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{i_k} > i_k$.

44. U bazi 2 dan je broj $111\ldots11$ (n jedinica). Nađite, također u bazi 2, njegov kvadrat.

45. Prirodni broj n zovemo *Pitagorin* ako postoje prirodni brojevi a, b takvi da je $n = a^2 + b^2$. Dokažite da ako su m, n Pitagorini, a $m \cdot n$ nije Pitagorin, onda je $m \cdot n$ kvadrat nekog parnog broja.

46. Neka je dana funkcija $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa svojstvima $D(1) = 0$, $D(p) = 1$, za svaki prost broj p; $D(uv) = uD(v) + vD(u)$, za sve prirodne brojeve $u, v \in \mathbb{N}$. Za koje vrijednosti n je $D(n) = n$?