1	2	3	4	5	6	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

Teorija brojeva

2. kolokvij, 24.6.2019.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Zadaci se rješavaju na ovim papirima. Odmah se **čitljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu s $167x^2 + 123xy + 23y^2$.

2. Odredite $h(-68)$, te nađite sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d = -68$.

3. Ako je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ multiplikativna i strogo rastuća funkcija, takva da je $f(2) = 2$, dokažite da je tada nužno $f(n) = n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

4. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak brojeva $\frac{577}{260}$ i $\frac{1+\sqrt{13}}{8}$.

5. Nađite sve Pitagorine trokute u kojima je jedna stranica jednaka 119.

6. Nađite sva rješenja (u skupu prirodnih brojeva) jednadžbe $x^2 - 165y^2 = 1$ za koja vrijedi $1 < x < 10^9$.

Rješenja:

1. $5x^2+5xy+13y^2$

2. $h(-68)=4$, x^2+17y^2, $2x^2+2xy+9y^2$, $3x^2+2xy+6y^2$, $3x^2-2xy+6y^2$

3. Prvo pokažemo da je $f(3)=3$. Neka je $f(3)=3+m$, za $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Tada je

$$f(6)=6+2m\Rightarrow f(5)\leq 5+2m\Rightarrow f(10)\leq 10+4m\Rightarrow f(9)\leq 9+4m\Rightarrow f(18)\leq 18+8m$$

$$\Rightarrow f(15)\leq 15+8m$$

Ali s druge strane je $f(15)=f(3)f(5)\geq(3+m)(5+m)=15+8m+m^2$, pa je $m^2\leq 0$, tj. $m=0$ i $f(3)=3$.

Sada indukcijom pokažemo da je $f(n)=n$ za sve $n\in\mathbb{N}$.
Pretpostavimo da za $k\geq 2$ vrijedi da je $f(i)=i$ za sve $i=1,2,...,2k-1$. Tada je $gcd(2,2k-1)=1$, pa je $f(4k-2)=2(2k-1)=4k-2$. Jer je $f(2k-1)=2k-1$ i f je strogo rastuća, onda mora biti $f(j)=j$ za sve $j\in[2k-1,4k-2]$. Posebno je $f(2k)$=2k i $f(2k+1)=2k+1$. $(4k-2>2k+1)$, pa indkucijom slijedi tvrdnja.

4. $\dfrac{577}{260}=[2,4,1,1,3,1,1,3]$, $\dfrac{1+\sqrt{13}}{8}=\left[0,1,\overline{1,2,1,4,14,,4}\right]$

5. $(119,408,425)$, $(119,1008,1015)$, $(119,7080,7081)$, $(56,105,119)$, $(119,120,169)$

6. $(1079,84)$, $(2328481,181272)$

1	2	3	4	5	6	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

Teorija brojeva

2. kolokvij, 24.6.2019.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Zadaci se rješavaju na ovim papirima. Odmah se **čitljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu s $159x^2 - 127xy + 26y^2$.

2. Odredite $h(-63)$, te nađite sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d = -63$.

3. Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ multiplikativna funkcija. Dokažite: Ako je g strogo rastuća i vrijedi $g(2) = 2$, tada je g identiteta na $\mathbb{N}$.

4. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak brojeva $\frac{563}{236}$ i $\frac{7+\sqrt{13}}{8}$.

5. Nađite sve Pitagorine trokute u kojima je jedna stranica jednaka 91.

6. Nađite sva rješenja (u skupu prirodnih brojeva) jednadžbe $x^2 - 178y^2 = 1$ za koja vrijedi $1 < x < 10^9$.

Rješenja:

1. $9x^2 - 5xy + 12y^2$
2. $h(-63) = 5$, $x^2 + xy + 16y^2$, $2x^2 + xy + 8y^2$, $2x^2 - xy + 8y^2$, $3x^2 + 3xy + 6y^2$, $4x^2 + xy + 4y^2$,
3. Isto kao u prvoj grupi.
4. $\dfrac{563}{236} = [2, 2, 1, 1, 2, 5, 1, 2]$, $\dfrac{7+\sqrt{17}}{8} = \left[1, 3, \overline{14, 4, 1, 2, 1, 4}\right]$
5. $(35, 84, 91)$, $(91, 312, 325)$, $(91, 588, 595)$, $(91, 4140, 4141)$, $(60, 91, 109)$
6. $(1601, 120)$, $(5126401, 384240)$