M. Tadić: Izlaganje na prezentaciji knjige

"Number Theory"

akademika Andreja Dujelle u Knjižnici HAZU, 21. rujna 2021.

Od recenzenata ćemo čuti više o ovoj izuzetnoj knjizi. Ja ću reći svoje dojmove o području koje knjiga izlaže. Jedan značajan dio tih dojmova je nastao tijekom moga dvogodišnjeg boravka u Goettingenu, gdje su djelovali velikani kao Gauss, Riemann, Kummer, Hilbert i Weyl, koje ću spomenuti u svom daljnjem govoru. Tu je također djelovao i Minkowski i Emi Noether.

Bez moderne matematike ne bi bilo moderne znanosti, a bez teorije brojeva teško da bi bilo napredne moderne matematike kakvu danas poznajemo. Dobro je poznata slična Gaussova izjava.

Razvoj teorije brojeva je bio dugo vremena posljedica fascinacije ljudi s odnosima među brojevima (koje danas nazivamo prirodnim brojevima). Rješavanje problema teorije brojeva jedva da je imalo ikakve praktične primjene. No to proučavanje problema koji nisu imali praktične primjene, rezultiralo je time da je danas teorija brojeva vrlo važna u primjenama. Komunikacije mobitelima i upotreba bankomata su neke od najjednostavnijih i najčešćih primjena. Današnji život bi bilo teško zamisliti bez tih primjena. A razvoj teorije brojeva je značajno utjecao na razvoj matematike, posebno algebre. Jedna od posljedica je i značajna algebraizacija matematike u 20-tom stoljeću.

Jedan od prvih susreta učenika s tematikom teorije brojeva su pravokutni trokuti sa cjelobrojnim stranicama, tj. Pitagorejske trojke. Kao što i samo ime kaže, njih pripisujemo Pitagori, iako postoje zapisi iz Mezopotamije o njima koji prethode Pitagori znatno više od 1000 godina. Pitagorejci su napravili mistiku od takvih trojki, i njihovog nalaženja. Kasnije su se pojavile jednostavne formule, Euklidove formule, koje generiraju takve trojke.

Interesantno je spomenuti da je ta veza, koja postoji kod Pitagore između teorije brojeva i geometrije, i danas izuzetno živa i važna (današnja geometrija se zove aritmetička algebarska geometrija i izuzetno je komplicirano i važno područje). Dijelovi ove veze se također obrađuju u knjizi akademika Dujelle.

Sada ćemo skočiti u izlaganju više od 2000 godina nakon Pitagore.

Pierre Fermat, veliki francuski matematičar koji je zarađivao za život kao sudac, čitajući Diofantovu aritmetiku se pitao da li kao što imamo sumu dva kvadrata koja je opet kvadrat, možemo imati takve slučajeve za kubove, bikvadrate i općenito više potencije. Jako je poznat njegov komentar na margini Diofantove knjige da toga ne može biti, ali da je dokaz prevelik da bi ga napisao na margini. Ta se Fermatova tvrdnju naziva Fermatov posljednji teorem.

No prošlo je više od tri i pol stoljeća nakon Fermatove tvrdnje, bez da se došlo do potpunog dokaza, i pri tome su se na tome iskušala gotova sva od najvećih imena teorije brojeva (i ne samo teorije brojeva, npr. Cauchy). Ime koje se tu posebno ističe, a koje se ne sreće tijekom fakultetskog obrazovanja, je Kummer.

Bez obzira što se u ta tri i pol stoljeća nije našao dokaz Fermatove tvrdnje, rad na ovome je rezultirao nevjerojatnim razvojem moderne matematike, posebno moderne algebre koja je do tada bila relativno mala disciplina, i algebarske geometrije. Dvadeseto stoljeće svjedoči velikoj algebraizaciji matematike (geometrija postaje algebarska geometrija, a topologija koja proučava geometrijska svojstva, najjače se razvija kao algebarska topologija, da spomenemo samo neke primjere, a mnogo je drugih kao funkcionalna analiza koja nastavlja ideje iz klasične analize).

Andrew Willes je 1990-ih godina prošloga stoljeća našao konačno potpuni dokaz Fermatove tvrdnje. Njegov dokaz uključuje neke od najsofisticiranijih i najkompliciranijih dijelova suvremene matematike.

Čini se da je u trenutku kompletiranja njegovoga dokaza, bilo u svijetu svega nekoliko ljudi koji su mogli potpuno razumijeti sve dijelove koje uključuje njegov dokaz.

Općenito, kada bi se u matematici pojavila nova matematička teorija, vrlo često bi se probala primjeniti na probleme teorije brojeva.

Navesti ću jedan važan takav primjer. Veliki matematičar Riemann je sredinom 19-og stoljeća radio na izgradnji kompleksne analize. Primjenio ju je na ono što se po njemu zove Riemannova zeta funkcija. Iz članka koji je napisao o tome dolazi Riemannova slutnja, vjerojatno najslavniji nerješeni problem današnje matematike, koji je direktno povezan sa asimptotskim rasporedom prostih brojeva. Interesntno je spomenuti da je ovo jedini članak koji je Riemann napisao iz teorije brojeva.

Takodjer, interesantno je spomenuti da se Carl Friedrich Gauss, jedan od najvećih matematičara i od kojega se smatra da počinje moderna teorija brojeva, nije bavio dokazom Fermatove tvrdnje. S druge strane, njega je vrlo impresioniralo ono što zovemo Gaussovim zakonom kvadratnog reciprociteta, nečega naizgled vrlo jednostavnoga. Smatrao ga je toliko važnim da mu je našao osam dokaza. Danas za ovaj reciprocitet postoji više od 240 dokaza.

Sada ću reći par riječi o mojoj vezi sa teorijom brojeva. Prije toga ću dati vrlo kratki povijesni uvod o dva područja, na spoju kojih je moj rad.

Prvo je harmonijska analiza. Klasična Fourierova harmonijska analiza, područje staro više od dva stoljeća, je određeni tip analize na komutativnim grupama, koja je bazirana na karakterima tih grupa, što su određene jednostavne funkcije na njima. Ova klasična teorija je jedno od najprimjenjivanijih područja matematike, kako u matematici, tako i van matematike. Vrlo dugo je postojala želja da se ova teorija proširi na nekomutativne grupe, no prije toga je trebalo uvesti neka nova područja matematike, kao npr. teoriju mjere i Hilbrertove prostore. U drugoj polovici 20-tog stoljeća, nastavljajući na ideje Hermanna Weyla, Gelfand je formulirao koncept harmonijske analize na nekomutativnim nekompaktnim grupama, baziran na unitarnim reprezentacijama na beskonačno dimenzionalnim Hilbertovim prostorima.

Izvorište drugog područja je deveti Hilbertov problem, koji govori da se "nađe najopćenitiji teorem reciprociteta za proizvoljno polje algebarskih brojeva", tj. teorema koji bi generalizirao Gaussov zakon kvadratnog reciprociteta (koji odgovara kvadratnim poljima).

Robert Langlands je krajem 1960-ih predložio rješavanje ovoga problema baziranog na novoj nekomutativnoj harmonijskoj analizi koja je tada bila (a i još je) u fazi uspostavljanja. Preciznije na harmonijskoj analizi na određenim aritmetički definiranim nekomutativnim grupama. Predložena strategija za rješavanje problema se sada zove Langlandsov program. Početni nivo ovoga programa je teorija polja klasa i Artinov reciprocitet, koji su od prije bili poznati (i koji pripadaju "komutativnpj teoriji", i bili jedno od najvećih dosega dotadašnje teorije brojeva). Ovaj program je daleko od kompletiranja, no i ono što je do sada napravljeno je vrlo interesantno i važno. Npr., rezultati ovoga programa se koriste i u Wilesovom dokazu Fermatove tvrdnje.

Reciprociteti u ovom programu su specijalni slučajevi relacija koje se zovu funktorijalnosti, i koje su najvažniji objekti ovoga programa.

Hrvatska ima malu, ali u svijetu dobro poznatu grupu koja radi na problematici vezanoj uz Langlandsov program. Najvažniji članovi ove grupe su profesori Goran Muić, Marcela Hanzer, Neven Grbac i Ivan Matić.

Najvažniji i najspektakularniji rezultat ostvaren u zadnje dvije dekade u Langlandsovom programu je Arthurova uspostava funktorijalnosti između općih linearnih i klasičnih grupa. U ovome radu Arthur koristi klasifikaciju ireducibilnih unitarnih reprezentacija općih linearnih grupa, i opis njihovih karaktera koji sam ja napravio 1980-ih i 1990-ih godina prošloga stoljeća.

Završiti ću svoj govor kratkim komentarom o autoru ove izuzetne knjige koju danas predstavljamo. Opet ću početi sa vrlo kratkim povijesnim uvodom.

Diofant je uočio četvorke racionalnih brojeva sa svojstvom da množeći svaka dva među njima i dodajući jedan, dobijaju se potpuni kvadrati. Takve četvorke zovemo Diofatovim četvorkama. Fermat je našao Diofantovu četvorku koja se sastoji od prirodnih brojeva. Euler je našao beskonačnu familiju s tim svojstvima.

Kao što najčešće biva u teoriji brojeva, nije bilo posebnih razloga za traženje takvih skupova, osim čiste fascinacije tim svojstvima. Baker, dobitnik Fieldsove medalje 1968., dokazao je da se Fermatova četvorka ne može proširiti do takve petorke.

Od primjera koje su ovi velikani matematike uočili, i koji su ih fascinirali, akademik Dujella je stvorio cjelovitu teoriju, i tu svoju teoriju povezao sa teorijom eliptičkih krivulja, teorijom koja je bila ključna u Wilesovom dokazu Fermatove tvrdnje. U području koje je akademik Dujella stvorio danas rade matematičari najjačih nacija. Knjiga akademika Dujelle završava s dijelom o Diofantovim m-torkama i eliptičkim krivuljama.

Nameće se paralela s Pitagorejcima koje je fasciniralo nalaženje Pitagorejskih trojki, a s kojih su Euklidove formule skinule mistiku. Tako je rad akademika Dujelle skinuo puno mistike s Diofantovih n-torki.

Knjiga akademika Dujelle počinje od samih početaka teorije brojeva, a kao što vidimo, stiže do samih rubova današnjih istraživanja, i do područja koje je stvorio akademik Dujella.

Moram priznati da mi je žao što nisam imao ovakvu knjigu kada sam stvarao bazu svog matematičkog obrazovanja.