DIOFANTSKE JEDNADŽBE

6. zadaća

9. 5. 2007.

1. Zadan je algebarski broj $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Odredite njegovu visinu $H(\alpha)$ i Mahlerovu mjeru $M(\alpha)$.

2. Nađite sva rješenja sustava jednadžbi

$$y^2 - 2x^2 = 1, \quad z^2 - 3x^2 = 1$$

   u cijelim brojevima x, y, z.

3. Nađite kubni polinom s cjelobrojnim koeficijentima $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ za čije koeficijente vrijedi $|a_i| < 1000$, $i = 0, 1, 2, 3$, te koji ima nultočku α takvu da je $|\alpha - e| < 10^{-4}$, gdje je $e = 2.718281828459\ldots$.

4. Nađite sva rješenja (u cijelim brojevima x_1, x_2, x_3) nejednadžbe

$$|x_1 \ln 2 + x_2 \ln 3 + x_3 \ln 7| \leq e^{-X},$$

   gdje je $X = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} \leq X_0 = 10^{15}$.

5. Dokažite da jednadžba $y^2 = x^3 + 7$ nema cjelobrojnih rješenja.

6. Nađite cijeli broj k ($k \neq 0$) sa svojstvom da jednadžba $y^2 = x^3 + k$ ima barem 12 cjelobrojnih rješenja (x, y).

Rok za predaju zadaće je 6.6.2007. Andrej Dujella