DIOFANTSKE JEDNADŽBE

5. zadaća

11. 4. 2007.

1. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$(x^3 - 2x^2y + y^3)(x^2 - 3y^2) = 1.$$

2. Dokažite da je derivacija hipergeometrijske funkcije $F\left(\begin{matrix}\alpha,\,\beta\\ \gamma\end{matrix}\;\middle|\; x\right)$ jednaka

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}F\left(\begin{matrix}\alpha+1,\,\beta+1\\ \gamma+1\end{matrix}\;\middle|\; x\right).$$

3. Dokažite da hipergeometrijska funkcija $F = F\left(\begin{matrix}\alpha,\,\beta\\ \gamma\end{matrix}\;\middle|\; x\right)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$x(x-1)F'' + ((1+\alpha+\beta)x - \gamma)F' + \alpha\beta F = 0\,.$$

4. Dokažite da za sve $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left|\sqrt[3]{19} - \frac{p}{q}\right| > \frac{10^{-7}}{q^{2.56}}\,.$$

(Uputa: pronađite prirodne brojeve α i β takve da vrijedi $19\alpha^3 - \beta^3 = 1$, pa primijenite Teorem 3.6 na $a = 3 \cdot 19\alpha^3$ i $b = 3 \cdot \beta^3$.)

5. Nađite prirodne brojeve p_1, p_2, q takve da je $q > 10$ i vrijedi

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p_1}{q}\right| < \frac{1}{q^2}, \quad \left|\sqrt{3} - \frac{p_2}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

6. Nađite prirodan broj d (takav da ni d ni $2d$ nisu potpuni kvadrati), te prirodne brojeve p_1, p_2, q takve da vrijedi

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p_1}{q}\right| < \frac{0.01}{q^{1.5}}, \quad \left|\sqrt{d} - \frac{p_2}{q}\right| < \frac{0.01}{q^{1.5}}.$$

Rok za predaju zadaće je 25.4.2007.

Andrej Dujella