

DIOFANTOVE m -TORKE I ELIPTIČKE KRIVULJE

2. zadaća

1. Pokažite da je krivulja

$$y^2 = x^3 + 3x^2 - 4$$

singularna. Odredite joj singularnu točku, te nađite jednu njezinu racionalnu parametrizaciju.

2. Kubnu krivulju zadanu jednađbom

$$u^3 + v^3 - 6 = 0$$

prikažite u kratkoj Weierstrassovoj formi. Nađite tri rješenja jednađbe $u^3 + v^3 = 6$ u racionalnim brojevima u, v , gdje je $u < v$.

3. Nađite tri različita pozitivna racionalna broja x_1, x_2, x_3 sa svojstvom da je $(x_i + 1)(3x_i + 1)(8x_i + 1)(120x_i + 1)$ kvadrat racionalnog broja za $i = 1, 2, 3$.
4. Odredite j -invarijantu eliptičke krivulje zadane jednađbom

$$y^2 = x(x + (t^2 - 1)^2) \left(x + \left(\frac{4t^2}{t^2 - 1} \right)^2 \right),$$

gdje je $t \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Nađite vrijednost parametra t za koju je ova krivulja izomorfna s krivuljom $y^2 = (-\frac{145}{408}x + 1)(\frac{408}{145}x + 1)(\frac{145439}{59160}x + 1)$?

5. Eliptička krivulja nad \mathbb{Q} zadana je jednađbom

$$E : y^2 = x^3 + 625x + 359375.$$

Odredite njezinu minimalnu Weierstarssovu jednađbu. Kakvu redukciju (dobru ili lošu; aditivnu ili multiplikativnu; rascjepivu ili nerascjepivu) ima ova krivulja za $p = 13$?

Andrej Dujella