

# DIOFANTSKE APROKSIMACIJE I PRIMJENE

## 1. zadaća

1. Dokažite da je broj  $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2}$  iracionalan.
2. Neka su  $\frac{h}{k}$  i  $\frac{h'}{k'}$  susjedni elementi Fareyevog niza  $\mathcal{F}_n$ . Dokažite da je tada  $k + k' > n$ .
3. Neka  $\frac{h}{k}$  i  $\frac{h'}{k'}$  prolaze svim parovima uzastopnih elemenata Fareyevog niza  $\mathcal{F}_n$ ,  $n > 1$ . Izračunajte

$$\min \left( \frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} \right) \quad \text{i} \quad \max \left( \frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} \right).$$

4. Neka su  $\frac{h}{k}$ ,  $\frac{h''}{k''}$ ,  $\frac{h'}{k'}$  tri uzastopna elementa niza  $\mathcal{F}_n$ . Dokažite da je  $\frac{k + k'}{k''}$  prirodan broj, te da vrijedi

$$\frac{k + k'}{k''} = \frac{h + h'}{h''} = \left\lfloor \frac{k + n}{k''} \right\rfloor.$$

5. Označimo sa  $s_n$   $n$ -ti član niza  $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, \dots$  prirodnih brojeva oblika  $2^a 3^b$ ,  $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , zapisanih u rastućem redoslijedu. Dokažite da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1.$$

Andrej Dujella