PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

AKTUARSKA MATEMATIKA II

6.12.2007.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 80
Broj zadataka: 7
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

---

1. Prepostavite da pojedinačni iznos štete ima lognormalnu distribuciju s funkcijom gustoće $f(x)$ i parametrima μ i $\sigma^2 > 0$.

(i) Pokažite da za $a > 0$ vrijedi

$$\int_a^\infty xf(x)dx = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})\left(1 - \Phi(\frac{\log a - \mu - \sigma^2}{\sigma})\right),$$

gdje je Φ funkcija distribucije standardne normalne razdiobe. [6]

(ii) Za $\mu = 10$, $\sigma^2 = 8$, izračunajte očekivani iznos štete koji će osig. društvo isplatiti ako se primjenjuje franšiza u iznosu 160. [6]

[Ukupno 12 bodova]

2. Štete pristižu po Poissonovim procesu s Poissonovim parametrom λ. Distribucija iznosa šteta ima očekivanje μ i varijancu σ^2, a dodatak na premiju je θ.

(i) Ukratko navedite na koji način ovi parametri utječu na vjerojatnost propasti. [3]

(ii) Navedite Lundbergovu nejednakost. [2]

U portfelju polica osiguranja, prosječni iznos štete je 50000 Kn. Promatramo dvije moguće distribucije iznosa šteta. To su:

I fiksni iznos šteta od 50000 Kn

II eksponencijalna distribucija.

Koeficijenti prilagodbe označeni su sa R_I i R_{II}.

(iii) Izvedite jednadžbe za koeficijent prilagodbe za svaki od gornjih slučajeva, I i II. [4]

(iv) Koji od koeficijenata prilagodbe je veći? Obrazložite odgovor! [1]

(v) Pokažite da je koeficijent prilagodbe rastuća funkcija parametra θ u oba slučaja. [2]

[Ukupno 12 bodova]

3. Broj e-mail poruka koji svaki dan primi student aktuarstva ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem λ, gdje je iz prethodnog iskustva apriorna distribucija od λ eksponencijalna s očekivanjem μ. Student ima podatke $x_1, \ldots, x_n$, gdje je x_i broj poruka pristiglih dana i, $i = 1, \ldots, n$.

(i) Izvedite aposteriornu distribuciju od λ. [5]

(ii) Pokažite da se Bayesovska procjena od λ uz kvadratni gubitak može napisati u obliku procjene povjerenjem, te navedite faktor povjerenja. [4]

(iii) Ako je $\mu = 50$ i student primi ukupno 460 poruka u 10 dana, izračunajte Bayesovsku procjenu za λ uz kvadratni gubitak. [2]

[Ukupno 11 bodova]

4. Sustav bonusa za osiguranje motornih vozila predvidja tri kategorije popusta, 0%, 20% i 50%. Puna godišnja premija je 800 EUR.
Ako nije prijavljena šteta tokom godine, osiguranik se pomiče na sljedeći viši nivo, ili ostaje na 50%. Ako je prijavljena jedna ili više šteta, osiguranik se pomiče na sljedeći niži nivo popusta, ili ostaje na 0%. Vjerojatnost da osiguranik ima nezgodu u jednoj godini je 0.01, a vjerojatnost više od jedne nezgode je zanemariva.
U slučaju nezgode, štete imaju Pareto distribuciju s funkcijom gustoće $f(x)$, gdje je

$$f(x) = \frac{3 \times \kappa^3}{(\kappa + x)^4} \qquad (x > 0) .$$

U slučaju nezgode će osiguranik prijaviti štetu samo ako je šteta veća od ukupnih dodatnih premija koje bi se trebale platiti kroz beskonačni vremenski horizont, uz pretpostavku da neće biti daljnjih nezgoda.

(i) Za $\kappa = 1000$ odredite prijelaznu matricu Markovljevog lanca $X_1, X_2, \ldots$ gdje je X_n nivo popusta na početku godine n. [7]

(ii) Za osiguranika koji plaća punu premiju uz 30% popusta tekuće godine, izračunajte očekivanu premiju na početku sljedeće godine u ovisnosti o κ. [5]

[Ukupno 12 bodova]

5. Prepostavite da pojedinačni iznos štete ima očekivanje 9070 i standardnu devijaciju 10132, te lognormalnu distribuciju. Po polici se tokom godine može prijaviti najviše jedna šteta, a vjerojatnost prijavljivanja štete po polici je 0.1 tokom jedne godine.
Osiguravatelj je prodao 200 ovakvih polica, te želi od reosiguravatelja kupiti reosiguranje viška štete za svaku od policu u portfelju s retencijom (samopridržajem) 15000.

(i) Izračunajte vjerojatnost da će za pojedinu štetu tokom godine dio gubitka pokriti reosiguravatelj. [4]

(ii) Izračunajte očekivani iznos štete koji isplaćuje reosiguravatelj. [5]

(iii) Prepostavite da je reosiguravatelj ponudio dvije vrste reosiguranja, kod jednog je retencija 15000 a ukupna premija 20000, dok je kod drugog retencija 12000, ali ukupna premija iznosi 24000. Koji je od dva ponudjena reosiguranja bolji izbor, ako ne uzimamo u obzir osiguravatelj odnos prema riziku. [6]

[Ukupno 15 bodova]

6. Donje tablice pokazuju kumulativne iznose nastalih šteta i broj šteta prijavljen svake godine za izvjesnu grupu polica osiguranja. Pretpostavlja se da su štete u potpunosti riješene do kraja razvojne godine 2.

Kumulativni iznosi nastalih šteta

		RG 0	RG 1	RG 2
GNŠ	0	311	519	803
	1	502	779	
	2	494		

Broj prijavljenih šteta svake godine

		RG 0	RG 1	RG 2
GNŠ	0	110	85	55
	1	167	113	
	2	285		

Ako je ukupni isplaćeni iznos do danas, s obzirom na godine nastanka štete 0, 1 i 2, bio 2180, izračunajte potrebnu pričuvu upotrebom metode prosječnog troška po šteti, zanemarujući inflaciju. [Ukupno 12 bodova]

7. U okviru generaliziranog linearnog modela promatrajte eksponencijalnu distribuciju s funkcijom gustoće $f(x)$ gdje je

$$f(x) = \frac{1}{\mu}\, e^{-x/\mu} \quad (x > 0)\,.$$

(i) Pokažite da se $f(x)$ može napisati u obliku eksponencijalne familije distribucija. [2]

(ii) Pokažite da je kanonski parametar, θ, dan s $\theta = -\frac{1}{\mu}$. [1]

(iii) Odredite funkciju varijance i parametar skaliranja. [3]

[Ukupno 6 bodova]