PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

AKTUARSKA MATEMATIKA II

2. 11. 2004.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 80
Broj zadataka: 7
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

---

1. Ukupan iznos šteta za određeni rizik u portfelju promatra se kroz 5 uzastopnih godina.

(i) Iz prethodnog iskustva o sličnim portfeljima, osiguratelj vjeruje da su štete normalno distribuirane s očekivanjem θ i varijancom 25, te da je apriorna distribucija od θ normalna s očekivanjem 125 i varijancom 36.

(a) Izvedite Bayesovsku procjenu za θ uz kvadratni gubitak, te pokažite da se može zapisati u obliku procjene povjerenjem. [4]

(b) Navedite faktor povjerenja i izračunajte premiju povjerenja ako je srednji iznos šteta kroz 5 godina jednak 122. [3]

(c) Komentirajte kako bi se promijenili faktor povjerenja i procjena povjerenjem kada bi se povećala varijanca 25. [1]

(ii) Drugi osiguratelj ne vjeruje da je to odgovarajuća apriorna distribucija za rizike u portfelju, te odlučuje koristiti Model 1 empirijske Bayesovske teorije povjerenja, u kojem premija povjerenja kombinira očekivanje za određeni rizik sa procjenjenom vrijednosti od $\mathbb{E}[m(\theta)]$. Dostupni su podaci o tri rizika u tom portfelju kroz 5 godina. Neka je X_{ij} šteta za rizik i u godini j. Sljedeća tablica pokazuje statistike za opažene podatke.

	$\bar{X}_i$	$\sum_{j=1}^{5}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$
Rizik 1 ($i = 1$)	122	2 848
Rizik 2 ($i = 2$)	164	1 628
Rizik 3 ($i = 3$)	106	1 887

(a) Izračunajte procijenjeni faktor povjerenja, te izračunajte premiju povjerenjem za rizik 1. [6]

(b) Usporedite odgovore s onima dobivenim u (i)(b). [1]

[Ukupno 15 bodova]

2. Osiguravajuće društvo za neživotna osiguranja rapolaže sljedećim podacima o prirastima isplata šteta (u tisućama kuna). Možete pretpostaviti da su sve štete isplaćene do kraja godine.

Prirasti isplata šteta

Godina nastanka štete	**Razvojna godina**			
	0	**1**	**2**	**3**
2000	210	95	40	3
2001	225	105	45	
2002	215	95		
2003	220			

Inflacije šteta kroz dvanaest mjeseci do sredine svake godine bile su kako slijedi:

2001	3.0%
2002	2.5%
2003	2.5%

Pretpostavlja se da je je inflacija šteta od sredine 2003. godine nadalje 3.0% godišnje.

(i) Izračunajte pričuve na dan 31. prosinca 2003. upotrebom metode ulančanih ljestvica prilagođene na inflaciju u prošlosti. [10]

(ii) Navedite korištene pretpostavke. [2]

[Ukupno 12 bodova]

3. Štete pristižu kao Poissonov proces s parametrom λ i imaju eksponencijalnu distribuciju s parametrom μ. Dodatak na premiju je θ.

(i) Izvedite formulu za koeficijent prilagodbe, te navedite gornju ogradu za vjerojatnost propasti uz početni kapital u. [6]

(ii) Pretpostavite $\mu = 1$.

(a) Odredite vrijednost od θ tako da je vjerojatnost propasti najviše 0.01 uz početni kapital 20. [4]

(b) Navedite kako se ta vrijednost θ mijenja ako je početni kapital uvećan.

[2]

[Ukupno 12 bodova]

4. Štete se pojavljuju kao Poissonov proces s parametrom 20. Pojedinačne štete su nezavisne slučajne varijable s gustoćom

$$f(x) = \frac{3}{(1+x)^4}\,, \quad x > 0\,,$$

nezavisne od procesa dolazaka šteta.

(i) Izračunajte očekivanje i varijancu ukupnog iznosa šteta do trenutka $t = 2$. [6]

(ii) Upotrebom normalne aproksimacije izvedite približnu vjerojatnost da su u trenutku $t = 2$ ukupne štete veće od 36. [4]

[Ukupno 10 bodova]

5.

(i) Distribucija šteta u portfelju neživotnog osiguranja je Weibullova distribucija s funkcijom gustoće

$$f_1(x) = 2cxe^{-cx^2} \quad (x > 0)\,.$$

Vjerojatnost da je šteta iz portfelja veća od 1000 iznosi 0.01. Iskoristite tu informaciju za procjenu parametra c. [3]

(ii) Alternativni prijedlog je da je gustoća dana sa

$$f_2(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0)\,.$$

Upotrijebite istu informaciju kao u (i) za procjenu parametra λ. [3]

(iii) (a) Za svaku od funkcija gustoće $f_1(x)$ i $f_2(x)$ izračunajte vrijednost M tako da je

$$\mathbb{P}(X > M) = 0.001\,.$$

[3]

(b) Komentirajte te rezultate. [1]

[Ukupno 10 bodova]

6. Sustav bonusa koji upotrebljava osiguravajuće društvo za godišnje osiguranje motornih vozila ima četiri razine popusta:
Razina 1: 0%
Razina 2: 25%
Razina 3: 45%
Razina 4: 60%
Ako osiguranik nema štete po polici u određenoj godini tada se pomiče za jednu razinu nagore (ili ostaje na razini 4), a ako je šteta načinjena ide za dvije razine nadolje (ili ostaje, ili se pomiče, na razinu 1). Puna premija koja se plaća na razini 0% popusta je 900.
Pretpostavlja se da je vjerojatnost nesreće u godini 0.2 za sve osiguranike, a iznosi šteta slijede lognormalnu distribuciju s očekivanjem 1 188 i standardnom devijacijom 495. Međutim, osiguranici prijavljuju štetu samo ako je gubitak veći od ukupne dodatne premije koja bi trebala biti plaćena kroz tri sljedeće godine uz pretpostavku da neće biti daljnjih šteta.

(i) Izračunajte najmanji iznos gubitka za koji će štetu prijaviti osiguranik na razini 0% popusta. [4]

(ii) Upotpunite prijelaznu matricu izračunavši nedostajuće vrijednosti:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0.147 & 0 & 0.853 & 0 \\ 0.120 & 0 & 0 & 0.880 \\ 0 & 0.197 & 0 & 0.803 \end{pmatrix}$$

[6]

(iii) Izračunajte omjer osiguranika na svakoj razini popusta kada sustav dostigne stabilno stanje. [5]

[Ukupno 15 bodova]

7. U okviru generaliziranog linearnog modela promatrajte eksponencijalnu distribuciju s funkcijom gustoće $f(x)$ gdje je

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \quad (x > 0)\,.$$

(i) Pokažite da se $f(x)$ može napisati u obliku eksponencijalne familije distribucija. [2]

(ii) Pokažite da je kanonski parametar, θ, dan s $\theta = -\frac{1}{\mu}$. [1]

(iii) Odredite funkciju varijance i parametar skaliranja. [3]

[Ukupno 6 bodova]