4. Modeli doživljenja

1. Pokažite da za uvjetni intenzitet smrtnosti vrijedi
$$\mu(t|x) = \mu(t+x).$$

2. Pokažite da vrijedi:
   (a) ${}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t}\mu_s ds}$,
   (b) $\frac{d}{dt}\,{}_tp_x = (\mu_x - \mu_{x+t})\,{}_tp_x$,
   (c) ${}_{s+t}p_x = {}_tp_{x+s}\cdot {}_sp_x$.

3. Pretpostavimo da vrijedi de Moivreov zakon smrtnosti, gdje je $\omega > 0$. Nađite $\overline{F}_T$, μ i $\operatorname{Var} T_{16}$, ako se zna da je $\mathbb{E}\, T_{16} = 36$.

4. Neka je
$$\overline{F}(t|x) = \left(\frac{100-x-t}{100-x}\right)^2, \quad 0 \le t \le 100-x.$$
Nađite $\operatorname{Var} T_x$.

5. Na slučajan način biramo dvije osobe jednake životne dobi iz dane populacije. Pretpostavimo da je jedna osoba pušač, a druga ne. Neka je

   μ_x, $x > 0$ intenzitet smrtnosti za nepušače,

   $c\mu_x$, $x > 0$ intenzitet smrtnosti za pušače, gdje je $c > 1$.

   Izračunajte vjerojatnost da će pušač nadživiti nepušača.

6. Pretpostavimo da je životni vijek u populaciji A neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_A, a životni vijek u populaciji B neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_B. Neka je vjerojatnost da odaberemo osobu iz populacije A jednaka p (pa je tada vjerojatnost da odaberemo osobu iz populacije B jednaka $1-p$). Odredite gustoću životnog vijeka slučajno odabrane osobe.

7. **(Teorem o lošoj sreći)** Neka je (X_n) niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s gustoćom f. Definiramo
$$T := \inf\{n \ge 2 :\ x_n \ge X_1\}.$$
Nađite razdiobu od T i $\mathbb{E}\, T$.

8. Nađite izraze za ${}_tp_x$ i ${}_tq_x$ preko funkcije l_x.

9. Zakon smrtnosti je zadan funkcijom

$$l_x = \sqrt{121 - x},\ 0 \le x \le 121.$$

Izračunajte vjerojatnost da je osoba koja je doživjela dob od 21 godine živjela duže od 40, ali ne duže od 57 godina.

10. Zadana je tablica

x	e_x
75	10.5
76	10.0
77	9.5

Izračunajte vjerojatnost da osoba dobi od 75 godina doživi 77 godina.

11. Izrazite formulom i izračunajte koristeći LAT A1967-70 vjerojatnost da će osoba koja doživi 30 godina

(a) doživjeti dob od 40 godina,

(b) umrijeti prije 40. godine,

(c) umrijeti nakon 60., ali prije 80. godine.

12. Odredite približno μ_{90} koristeći LAT A1967-70.

13. Uz pretpostavku o uniformnoj razdiobi smrti kroz godinu, izračunajte ${}_{0.25}q_{38.5}$ koristeći LAT A1967-70.

14. Skupi dio za vaš auto se na tržištu nalazi u dvije varijante: s vjerojatnošću p kupit ćete nelegalnu kopiju čiji je vijek trajanja $\text{Exp}(\mu)$, a s vjerojatnošću $1-p$ legalnu kopiju s vijekom trajanja $\text{Exp}(\lambda)$. Pretpostavimo da je $\lambda < \mu$. Neka je T životni vijek ovako nabavljenog dijela. Ima li T razdiobu rastućeg hazarda? Što ako je $\lambda > \mu$?

15. Pretpostavimo da je dio iz Zad 14 doživio dob t. Kolika je vjerojatnost da je on nelegalan?

16. Pokažite da je negativna binomna razdioba razdioba rastućeg hazarda.

17. Za neprekidnu razdiobu F kažemo da je prosječno monotono rastućeg hazarda ako je

$$t \mapsto -\frac{\ln(\overline{F}(t))}{t}$$

rastuća funkcija. Pokažite tvrdnje:

(a) Ako je F monotono rastućeg hazarda onda je i prosječno monotono rastućeg hazarda.

(b) F je prosječno monotono rastućeg hazarda ako i samo ako je

$$\left(\overline{F}(t)\right)^{\alpha} \le \overline{F}(\alpha t),\ \forall t > 0,\ \forall \alpha \in [0,1].$$

18. Pretpostavimo da grupa osoba podliježe smrtnosti koja se između dobi 80 i 90 godina može pretpostaviti LAT A 1967-70 tablicom uz odbitak intenziteta smrtnosti u iznosu od 0.05 u dobi od 80 godina, pri čemu se taj odbitak povećava linearno do iznosa 0.15 u dobi od 90 godina. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana osoba starosti 80 godina doživi 85, ali ne i 90 godina.

19. Za osobu dobi od 55 godina pretpostavljamo da je izložena konstanstnom intenzitetu smrtnosti $\mu = 0.02$ do dobi od 62 godine, nakon čega se pretpostavlja da je izložena intenzitetu smrtnosti prema LAT A 1967-70. Izračunajte

    (a) vjerojatnost smrti prije navršene 60. godine,

    (b) vjerojatnost doživljenja dobi od 70 godina,

    (c) vjerojatnost smrti između 60. i 65. godine.

DZad Uz pretpostavku da LAT A 1967-70 slijedi *Gompertzov* intenzitet smrtnosti

$$\mu_x = Bc^x,$$

izračunajte c koristeći podatke l_{60}, l_{70} i l_{80} iz tablice.
(Rješenje: $c = 1.10194$)

DZad Ako je

$$_n p_x = \frac{x}{n + x},$$

odredite μ_x.
(Rješenje: $\mu_x = x^{-1}$)

DZad Neka je

$$l_x = 100\sqrt{100 - x}, 0 \leq x \leq 100.$$

Odredite μ_{84} približno i egzaktno
(Rješenje: egzaktno: 0.03125, približno: 0.03129 ili 0.03127)

DZad Pretpostavimo da je μ_{x+t} konstantan za $0 \leq t \leq 1$ i pretpostavimo da je $q_x = 16$. Odredite t takav da je $_t p_x = 0.95$.
(Rješenje: $t = 0.294$)

5. Osnove životnog osiguranja

1. Osoba stara 30 godina osigurava život na iznos od 50 000 plativ u trenutku smrti. Ako je funkcija doživljenja

$$\overline{F}(x) = 1 - \frac{x}{100}, \ 0 \leq x \leq 100,$$

a intenzitet kamate $\delta = 0.01$, nađite vrijednost premije koju osiguranik mora platiti ako je plaća sada i odjednom.

2. Osoba dobi x osigurava život, a plaća premiju odjednom i sada. Nađite iznos premije, ako je osigurani iznos 10 000 prvih 20 godina, a 20 000 nakon toga. Osoba također dobije i povrat premije (bez kamata) u slučaju smrti u prvih 20 godina. Ako pretpostavimo da se osigurani iznos isplaćuje na kraju godine smrti, nađite odgovarajuću premiju izraženu preko funkcija M i D.

DZad Izračunajte varijance premija za jednostavne tipove osiguranja:

(a) osiguranje života,

(b) osiguranje doživljenja.

(Rješenje: (a) $\text{Var}Z = A_{x,v^2} - A^2_{x,v}$, (b) $\text{Var}Z = v^{2n}{}_np_x\,{}_nq_x$)

3. Duljina života T ima funkciju gustoće

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{5000}, & 0 \leq t \leq 100 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Osiguranje se isplaćuje u trenutku smrti. Intenzitet kamate je konstantan i iznosi $\delta = 0.1$. Nađite premiju za osobu dobi x godina kojoj se izdaje osiguranje u iznosu 50.

4. Osoba dobi x godina pristupa životnom osiguranju koje

(i) isplaćuje 10 000 nakon 20 godina, ako je osoba živa;

(ii) vraća premiju P na kraju godine smrti, ako osoba umre u prvih 20 godina.

Izrazite premiju P preko D i M te nađite iznos premije iz LAT A 1967-70 za $x = 30$ i $i = 0.04$.

5. Osoba stara 30 godina ugovara osiguranje života. Ako je osigurani iznos 10 000, nađite premiju koju osoba mora platiti sada koristeći LAT A 1967-70 i $i = 0.04$.

6. Nađite izraz za $A_x^{(m)}$ uz pretpostavku $(\star)$.

7. Nađite izraz za $\ddot{a}^{(m)}$ uz pretpostavku $(\star)$.

DZad Koristeći pretpostavku $(\star)$, dokažite formulu

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1 - A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}}{d^{(m)}}.$$

8. Izračunajte $\ddot{a}^{(2)}_{40}$ i $\ddot{a}^{(2)}_{40:\,\overline{30}|}$ uz efektivnu kamatnu stopu od 4 %.

9. Dokažite jednokost:

$$ {}_n p_x \, d \, \ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{i=0}^{n-1} (1 - v^{k+1}) {}_k p_x \; q_{x+k} = 1 - A_{x:\,\overline{n}|} \, .$$

10. Osoba stara 65 godina sklapa posebno životno osiguranje rastuće doživotne rente. Renta će se isplaćivati postnumerando godišnje. Iznos prve uplate je 1 000 i svake godine se povećava za 9.62 % iznosa prethodne godine. Odredite neto cijenu ove rente ako su na snazi stope mortaliteta iz LAT A 1967-70 uz efektivnu kamatnu stopu od 14 %.

11. Osoba dobi 35 godina sklapa mješovito osiguranje sa svotom 2 000 u slučaju smrti i svotom 4 000 u slučaju doživljenja od 20 godina. Odredite godišnju neto premiju koristeći LAT A 1967-70 ultimate.

12. Doživotno osiguranje izdano u dobi x daje naknadu od 10 000. Premije se uplaćuju prenumerando kroz 20 godina. Naknada se plaća na kraju godine smrti. Tijekom perioda u kojem se premija plaća, osiguranik uz naknadu u slučaju smrti dobije i 50 % zadnje uplaćene premije. Pokažite da je tada godišnja neto premija dana izrazom

$$\frac{10000 A_x}{(1 + \frac{d}{2})\ddot{a}_{x:\,\overline{20}|} - \frac{1}{2}(1 - v^{20}\,{}_{20}p_x)}.$$

13. Osoba stara 40 godina ugovara posebnu odgođenu prenumerando rentu godišnjeg iznosa 1 000 kada navrši 60 godina. Ako osoba umre nakon navršenih 60 godina, ali prije nego joj je uplaćeno ukupno 15 000, razlika se plaća na kraju godine smrti. Izračunajte godišnju neto premiju koristeći LAT A 1067-70 select.

14. Ako je $i = 0.1$, $a_{30:\,\overline{9}|} = 5.6$ i $v^{10}\,{}_{10}p_{30} = 0.35$, izračunajte $1000P_{\overset{1}{30}:\,\overline{10}|}$.

15. Neka je L ubitak vezan uz osiguranje života na 2 godine u iznosu 1 plativom na kraju godine smrti. Neto godišnja premije se plaća unaprijed, ali je nepoznata. Ako je $q_x = 0.1$, $q_{x+1} = 0.2$ i $v = 0.9$, nađite $\mathrm{Var}L$.

16. Osoba dobi x osigurava doživotnu godišnju rentu u iznosu R plativu unaprijed, ali odgođenu n godina. Premija se plaća godišnje tijekom m godina, $m < n$. Odredite ${}_tV_x$ za $t = 0, 1, \ldots, n$.

17. Ako je ${}_{10}V_{25} = 0.1$ i ${}_{10}V_{35} = 0.2$, odredite ${}_{20}V_{25}$.

18. Pretpostavimo da osoba starosti 35 godina kupuje životnu rentu u iznosu 1 godišnje uz odgodu od 20 godina. Neka je $i = 0.04$ i neka se neto premija plaća godišnje kroz 20 godina. Koristeći LAT A 1967-70 ultimate, nađite neto premijsku rezervu na kraju 10. godine.

19. Osoba ima 30 godina i ugovara mješovito osiguranje uz $n = 25$. Osigurani iznos je 5 000 za smrt i 10 000 za doživljenje. Ako je premija neto godišnja, nađite neto premijsku rezervu nakon 10. godine koristeći LAT A 1967-70 ultimate.