NORMIRANI PROSTORI

Damir Bakić

3. siječnja 2022.

Sadržaj

1 Osnovni pojmovi teorije normiranih prostora

1.1 Norma

Ovdje ćemo proučavati isključivo realne i kompleksne vektorske prostore. $\mathbb{F}$ će biti zajednička oznaka za $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ kad god ne bude potrebno specificirati konkretan izbor. Ne postavljamo ograničenja na dimenziju prostora.

Definicija 1.1.1 *Norma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ se naziva normiran prostor.

Konačnodimenzionalan prostor $\mathbb{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$, možemo snabdjeti normom na nekoliko uobičajenih načina (koji se podudaraju u slučaju $n = 1$).

Primjer 1.1.2
$(\mathbb{F}, |\cdot|)$ (dakle, apsolutna vrijednost igra ulogu norme u polju).
$(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$.
$(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_1)$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$.
$(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_j| : j = 1, \ldots, n\}$.

U iduća tri primjera s $C([a, b])$ označavamo vektorski prostor svih neprekidnih realnih ili kompleksnih funkcija na segmentu $[a, b]$.

Primjer 1.1.3
$(C([a, b]), \|\cdot\|_2)$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$.
$(C([a, b]), \|\cdot\|_1)$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.
$(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$.

Definicija 1.1.4 *Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in X$;
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X$;

4. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, $\forall x_1, x_2, y \in X$;

5. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, $\forall x, y \in X$.

Uređen par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *se naziva unitaran prostor.*

Primjer 1.1.5
$(\mathbb{F}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}$.
$(C([a, b]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$.

Napomena 1.1.6 U svakom unitarnom prostoru za sve vektore x i y vrijedi Cauchy-Schwarzova nejednakost: $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.

Uz pomoć te nejednakosti lako se pokazuje da je na proizvoljnom unitarnom prostoru $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ formulom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ zadana jedna norma. U daljnjem ćemo podrazumijevati da je svaki unitaran prostor normiran uz ovako uvedenu normu.

Primijetimo da su norme navedene u primjeru 1.1.2 u drugom slučaju, te u primjeru 1.1.3 u prvom slučaju nastale iz skalarnih produkata navedenih u primjeru 1.1.5.

Pretpostavimo da je $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitaran prostor. Za $x, y \in X$ imamo

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle,$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle.$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo tzv. jednakost paralelograma:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ \forall x, y \in X. \tag{1}$$

Slično, lako se provjeri da vrijedi i

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2, \tag{2}$$

ako je prostor realan, odnosno

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2 + \frac{i}{4}\|x + iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x - iy\|^2, \tag{3}$$

ako je prostor kompleksan. Prethodne dvije jednakosti zovu se polarizacijske formule. One pokazuju da u svakom unitarnom prostoru skalarni produkt možemo rekonstruirati iz izvedene norme.

Jednakost paralelograma (1) je, kako smo vidjeli, uvjet koji ispunjava svaka norma koja je izvedena iz skalarnog produkta. Zanimljivo je da je taj uvjet i dovoljan. Sljedeći teorem (koji navodimo bez dokaza; vidite [SK]) pokazuje da jednakost paralelograma zapravo karakterizira norme koje potječu iz skalarnih produkata.

Teorem 1.1.7 *(Jordan - von Neumann) Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Tada postoji skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na X takav da vrijedi $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $\forall x \in X$, onda i samo onda kada ta norma zadovoljava jednakost paralelograma (1). U tom slučaju taj je skalarni produkt jedinstven i dan je polarizacijskim formulama (2), odnosno (3), ovisno o tome je li prostor X realan ili kompleksan.*

Primjer 1.1.8 Norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$ na prostorima $\mathbb{F}^n$ i $C([a,b])$ ne potječu od skalarnog produkta. Provjerite!

Napomena 1.1.9 Neka je $(x_n)_n$ konačan ili beskonačan linearno nezavisan niz u unitarnom prostoru X. (Za beskonačan skup kažemo da je linearno nezavisan ako je linearno nezavisan svaki njegov konačan podskup.) Tada postoji ortonormiran niz $(e_n)_n$ u X za koji vrijedi $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Niz $(e_n)_n$ se konstruira induktivno Gram-Schmidtovim postupkom: stavi se $e_1 = \frac{1}{\|x_1\|}x_1$ i, za $k \geq 1$, $e_{k+1} = \frac{1}{\|f_{k+1}\|}f_{k+1}$, gdje je $f_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\langle x_{k+1}, e_j\rangle e_j$.

Napomena 1.1.10 Neka su $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, normirani prostori nad istim poljem. Tada je i $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ vektorski prostor uz koordinatne operacije. Prostor X možemo normirati na više načina. Neke mogućnosti su:

$$\|(x_1, \ldots x_n)\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|,$$

$$\|(x_1, \ldots x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2},$$

$$\|(x_1, \ldots x_n)\|_\infty = \max\{\|x_j\| : j = 1, \ldots, n\}.$$

Slično, i produkt unitarnih prostora postaje unitaran prostor sa skalarnim produktom

$$\langle (x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle x_j, y_j\rangle.$$

Definicija 1.1.11 *Kažemo da je podskup S normiranog prostora X ograničen ako postoji broj $M > 0$ takav da vrijedi $\|x\| \leq M$, $\forall x \in S$.*

Definicija 1.1.12 *Neka su X i Y normirani prostori i $f : X \to Y$.*
Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \textit{ tako da } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

Funkcija f je neprekidna na skupu $S \subseteq X$ ako je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in X$.
Kažemo da je f uniformno neprekidna na skupu $S \subseteq X$ ako vrijedi

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \textit{ tako da } x_1, x_2 \in S,\ \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \epsilon.$$

Propozicija 1.1.13 *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor.*

(a) $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ *je uniformno neprekidna funkcija na* X*.*

(b) $+ : X \times X \to X$ *je uniformno neprekidno preslikavanje na* $(X \times X, \| \cdot \|_1)$*.*

(c) $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ *je uniformno neprekidno preslikavanje na svakom ograničenom skupu u* $(\mathbb{F} \times X, \| \cdot \|_1)$*; posebno, neprekidno je na* $(\mathbb{F} \times X, \| \cdot \|_1)$*.*

Dokaz: **(a)** Za bilo koje $x, y \in X$ imamo $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$; dakle, $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$. Zamijenimo li x s y, odavde dobivamo i $\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$, a iz tih dviju nejednakosti slijedi $|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x-y\|$. Odavde je uniformna neprekidnost očita; za proizvoljni $\epsilon > 0$ možemo jednostavno uzeti $\delta = \epsilon$.

(b) Po definiciji zbrajanja i norme $\| \cdot \|_1$ u $X \times X$ za proizvoljne $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$ imamo

$$\|(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\| \leq \|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\| = \|(x_1-x_2, y_1-y_2)\|_1 = \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|_1.$$

Dakle, i ovdje je dovoljno uzeti $\delta = \epsilon$.

(c) Neka je $S \subseteq \mathbb{F} \times X$ ograničen. Odaberimo broj $M > 0$ za koji vrijedi $\|(\alpha, x)\|_1 = |\alpha| + \|x\| \leq M$, $\forall (\alpha, x) \in S$. Za zadani $\epsilon > 0$ uzmimo $\delta = \frac{\epsilon}{2M}$. Sada imamo:

$$(\alpha_1, x_1), (\alpha_2, x_2) \in S,\ \|(\alpha_1, x_1) - (\alpha_2, x_2)\|_1 < \delta \Rightarrow |\alpha_1 - \alpha_2| + \|x_1 - x_2\| < \delta = \frac{\epsilon}{2M} \Rightarrow$$

$$\|\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2\| = \|\alpha_1(x_1 - x_2) + (\alpha_1 - \alpha_2)x_2\| \leq |\alpha_1|\|x_1 - x_2\| + |\alpha_1 - \alpha_2|\|x_2\| <$$

$$M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M}M = \epsilon.$$

□

Propozicija 1.1.14 *Neka je* X *unitaran prostor. Skalarni produkt je uniformno neprekidna funkcija na ograničenim skupovima prostora* $(X \times X, \| \cdot \|_1)$*; posebno, neprekidna je na* $(X \times X, \| \cdot \|_1)$*.*

Dokaz: Slijedi iz prethodne propozicije, polarizacijskih formula (2) i (3) te neprekidnosti operacija u polju $\mathbb{R}$. □

Istaknimo da smo u prethodnom korolaru dokazali neprekidnost skalarnog produkta u odnosu na $\|\cdot\|_1$ u produktnom prostoru $X \times X$. To nije najprirodnije jer znamo da je $X \times X$ zapravo unitaran prostor sa skalarnim produktom $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle$ pa bi prirodniji izbor norme na prostoru $X \times X$ bio $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, što je norma izvedena iz tog skalarnog produkta.

Međutim, vrlo brzo ćemo vidjeti da je, što se tiče neprekidnosti funkcija definiranih na $X \times X$, sasvim svejedno promatramo li na X normu $\| \cdot \|_1$ ili normu $\| \cdot \|_2$.

Definicija 1.1.15 *Kaže se da su norme* $\| \cdot \|_a$ *i* $\| \cdot \|_b$ *definirane na vektorskom prostoru* X *ekvivalentne ako postoje* $m, M > 0$ *takvi da vrijedi* $m\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq M\|x\|_a$, $\forall x \in X$*.*

Napomena 1.1.16 **(a)** Ekvivalentnost normi je relacija ekvivalencije na skupu svih normi na danom vektorskom prostoru. Provjerite!

(b) Neprekidnost funkcije $f : X \to Y$ (u točki, na skupu, uniformna) ostaje očuvana ako norme na X i/ili Y zamijenimo ekvivalentnima. Provjerite!

(c) Prema tvrdnji zadatka 1.1.30 norme $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ i $\| \cdot \|_\infty$ na produktnom prostoru $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ su međusobno ekvivalentne. Sad prethodna opaska (b) pokazuje da tvrdnje propozicija 1.1.13 i 1.1.14 ostaju vrijediti i ako na $X \times X$, odnosno $\mathbb{F} \times X$ umjesto $\| \cdot \|_1$ promatramo $\| \cdot \|_2$ ili $\| \cdot \|_\infty$.

Teorem 1.1.17 *Sve norme na konačnodimenzionalnom prostoru su ekvivalentne.*

Dokaz: Neka je $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$ proizvoljna baza prostora X. Za $x \in X$, $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$, stavimo $\|x\|_b = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|$. Nije teško vidjeti da je $\| \cdot \|_b$ norma na X. Prema napomeni 1.1.16 (a) dovoljno je dokazati da je proizvoljna norma $\| \cdot \|$ na X ekvivalentna s $\| \cdot \|_b$.

Neka je $M = \max\{\|b_j\| : j = 1, \ldots, n\}$. Sada za proizvoljan $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \in X$ imamo $\|x\| = \| \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j\| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \|b_j\| \leq M\|x\|_b$.

Da dokažemo analognu nejednakost u drugom smjeru, promotrimo funkciju $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$, $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \| \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j\|$. Prema propoziciji 1.1.13 i napomeni 1.1.16 (c), f je neprekidna na $\mathbb{F}^n$ i u normi $\| \cdot \|_1$ i u euklidskoj normi $\| \cdot \|_2$. Skup $S = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \sum_{j=1}^n |\alpha_j| = 1\}$ je ograničen i zatvoren u $\mathbb{F}^n$; dakle, kompaktan. Jer je f neprekidna na S, postoji točka $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in S$ za koju je $f(\mu_1, \ldots, \mu_n) \leq f((\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$, $\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S$. Stavimo $y = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j$. Jer je $\|y\|_b = 1$, vrijedi $y \neq 0$. Sad nam prethodna nejednakost kaže da je $\|y\| \leq \|x\|$ za sve vektore x za koje vrijedi $\|x\|_b = 1$.

Neka je sada $x \in X$ proizvoljan netrivijalan vektor. Kako je $\| \frac{1}{\|x\|_b} x\|_b = 1$, to prema prethodnom zaključujemo da mora vrijediti $\|y\| \leq \| \frac{1}{\|x\|_b} x\|$. Drugim riječima, imamo $\|y\| \|x\|_b \leq \|x\|$. Stavimo $m = \|y\|$. Zbog $y \neq 0$ imamo $m > 0$, te možemo pisati $m\|x\|_b \leq \|x\|$. Na kraju, uočimo da zadnja nejednakost vrijedi i za nul-vektor. □

Definicija 1.1.18 *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X.*

Kažemo da niz $(x_n)_n$ konvergira prema $x \in X$ i pišemo $x = lim_{n \to \infty} x_n$ ako

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tako da } n_0 \leq n \Rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev ako

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tako da } n_0 \leq m, n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

Napomena 1.1.19 Lako se provjere sljedeće tvrdnje.

(a) Limes niza je, ako uopće postoji, jedinstven.

(b) Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.

(c) Svaki Cauchyjev, pa zato i svaki konvergentan niz je ograničen.

(d) Niz koji je konvergentan ili Cauchyjev u nekoj normi konvergentan je, odnosno Cauchyjev, i u svakoj ekvivalentnoj normi.

(e) Svaki podniz konvergentnog niza i sam je konvergentan i konvergira k istom limesu.

(f) Linearna kombinacija konvergentnih nizova je konvergentan niz čiji limes je odgovarajuća linearna kombinacija limesa.

(g) Neka su X i Y normirani prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_n$ u X koji konvergira k x_0 niz $(f(x_n))_n$ konvergira prema $f(x_0)$.

U nastavku će važnu ulogu igrati i neki elementarni topološki pojmovi. Za sada ćemo se ograničiti na opis i interpretacije tih pojmova u normiranim prostorima.

Neka je X normiran prostor. Otvorena kugla s centrom u točki $x_0 \in X$ i radijusom $r > 0$ je skup $K(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$. Kako se norma razlike dvaju vektora interpretira kao njihova udaljenost, $K(x_0, r)$ je skup svih vektora iz X čija udaljenost od centra x_0 je manja od r.

Kažemo da je skup $S \subseteq X$ otvoren ako je S unija neke familije otvorenih kugala. Dodatno, po definiciji uzimamo da je i $\emptyset$ otvoren. Lako se vidi da vrijedi: $S \subseteq X$ je otvoren ako i samo ako za svaku točku $x \in S$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq S$.

Familija svih otvorenih skupova u X se označava s τ i naziva se topologija na X. τ ima sljedeća svojstva:

- $\emptyset, X \in \tau$;
- $U_j \in \tau$, $j \in J \Rightarrow \cup_{j \in J} U_j \in \tau$ za proizvoljan indeksni skup J;
- $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, $n \in \mathbb{N}, \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \tau$.

Nadalje, za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren ako je $X \setminus F$ otvoren. Očito, familija svih zatvorenih skupova u X ima svojstva komplementarna gornjima ($\emptyset$ i X su zatvoreni, presjek proizvoljne familije zatvorenih skupova je također zatvoren skup, unija konačno mnogo zatvorenih skupova je također zatvoren skup). Uočimo da je svaki jednočlani skup $\{x_0\}$ zatvoren (zaista, $X \setminus \{x_0\}$ je otvoren; provjerite!).

Zatvarač $\overline{A}$ proizvoljnog skupa $A \subseteq X$ definira se kao najmanji zatvoren skup u X koji sadrži A. Očito, $\overline{A}$ možemo ekvivalentno opisati i kao presjek svih zatvorenih skupova $F \subseteq X$ koji sadrže A.

Uočimo da je skup $A \subseteq X$ zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$. Također, lako se pokaže da za svaku otvorenu kuglu $K(x_0, r)$ vrijedi $\overline{K(x_0, r)} = \overline{K}(x_0, r)$ pri čemu je $\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$ tzv. zatvorena kugla s centrom u x_0 radijusa r.

Lema 1.1.20 *Neka je F zatvoren skup u normiranom prostoru X, neka je $(x_n)_n$ konvergentan niz točaka iz F. Tada je $lim_{n \to \infty} x_n \in F$.*

Dokaz: Označimo limes s x i pretpostavimo da vrijedi $x \notin F$. To zapravo znači da x pripada otvorenom skupu $X \setminus F$. Zato postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq X \setminus F$. Za taj r nađimo n_0 takav da $n \geq n_0 \Rightarrow \|x - x_n\| < r$. Dakle, za sve $n \geq n_0$ imamo $x_n \in K(x, r) \subseteq X \setminus F$. To je kontradikcija jer svi članovi niza leže u F. □

Lema 1.1.21 *Neka je X normiran prostor i $A \subseteq X$. Tada za svaku točku $x \in \overline{A}$ i svaku otvorenu kuglu $K(x, r)$ s centrom u x vrijedi $K(x, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno: neka postoje $x \in \overline{A}$ i $r > 0$ takvi da je $K(x,r) \cap A = \emptyset$. To zapravo znači da je $A \subseteq X \setminus K(x,r)$. Kako je skup $X \setminus K(x,r)$ zatvoren i kako je $\overline{A}$ najmanji zatvoren skup koji sadrži A, slijedi $\overline{A} \subseteq X \setminus K(x,r)$. No, to je nemoguće jer je x bio odabran kao element skupa $\overline{A}$. □

Propozicija 1.1.22 *Neka je X normiran prostor i $A \subseteq X$. Tada je $\overline{A}$ skup svih limesa svih konvergentnih nizova čiji članovi su elementi skupa A.*

Dokaz: Uzmimo niz $(x_n)_n$ u A koji konvergira prema $x \in X$. Kako je skup $\overline{A}$ zatvoren i $x_n \in A \subseteq \overline{A}$, iz leme 1.1.20 slijedi $x \in \overline{A}$.

Obratno, neka je $x \in \overline{A}$. Prema lemi 1.1.21, za svaki prirodan broj n, skup $K(x, \frac{1}{n}) \cap A$ je neprazan. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberimo točku $x_n \in K(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Očito, za ovako konstruiran niz $(x_n)_n$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

Korolar 1.1.23 *Skup A u normiranom prostoru X je zatvoren ako i samo ako sadrži limese svih konvergentnih nizova svojih članova.*

Dokaz: Jedan smjer smo dokazali u lemi 1.1.20. Obratno, ako je $x \in \overline{A}$, onda prema prethodnoj propoziciji možemo naći niz $(x_n)_n$ u A koji konvergira k x. Sada pretpostavka povlači $x \in A$. Dakle, $\overline{A} = A$, to jest, A je zatvoren.

Definicija 1.1.24 *Kažemo da je normiran prostor X separabilan ako postoji prebrojiv skup $S \subseteq X$ takav da vrijedi $\overline{S} = X$. U ovoj situaciji se još kaže da je S gust u (na) X.*

Ako je skup S gust u X onda, prema lemi 1.1.21 svaka otvorena kugla prostora X siječe S. Ovo objašnjava izbor atributa *gust* u imenu. Zbog navedenog svojstva separabilne prostore možemo zamišljati kao ne-pretjerano-velike; svaki vektor prostora je dohvatljiv (tj. može se po volji dobro aproksimirati) elementima prebrojivog skupa S. Kako je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, polje $\mathbb{F}$ je separabilan prostor. Očekivano, takvi su i svi konačnodimenzionalni prostori (vidite zadatak 1.1.34).

Definicija 1.1.25 *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$. Kažemo da je skup S kompaktan ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji limes je u S.*

Kompaktnost se inače nešto drugačije definira u metričkim, odnosno topološkim prostorima. Međutim, pokazuje se da se ta, općenitija definicija u slučaju normiranih prostora svodi na prethodnu formulaciju.

Prisjetimo se da je u $\mathbb{F}^n$ skup kompaktan ako i samo je ograničen i zatvoren. U jednom smjeru je ova tvrdnja točna i za proizvoljan normiran prostor.

Propozicija 1.1.26 *Kompaktan podskup normiranog prostora je zatvoren i ograničen.*

Dokaz: Neka je S kompaktan skup u normiranom prostoru X.

Pretpostavimo da S nije zatvoren. Tada postoji $x \in \overline{S} \setminus S$. Prema propoziciji 1.1.22 postoji niz $(x_n)_n$ u S za koji vrijedi $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. To je kontradikcija s kompaktnošću jer ovaj niz nema konvergentan podniz čiji limes je u S. Naime njegov svaki podniz je konvergentan, no limes mu je x; dakle, točka izvan skupa S.

Pretpostavimo sada da S nije ograničen: to znači da postoji niz $(x_n)_n$ u S za koji vrijedi $\|x_n\| > n$. Ovaj niz ne može imati konvergentan podniz jer prema napomeni 1.1.19 (b) svaki konvergentan niz mora biti ograničen. $\square$

Napomena 1.1.27 Obrat prethodne propozicije ne vrijedi. Najjednostavniji protuprimjer je zatvorena jedinična kugla $\overline{K}(0,1)$ u beskonačnodimenzionalnom unitarnom prostoru. Uzmimo beskonačan linearno nezavisan niz i ortonormirajmo ga; neka je $(e_n)_n$ rezultirajući ortonormirani niz. Jasno je da je $e_n \in \overline{K}(0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, kao i da $(e_n)_n$ nema konvergentnih podnizova jer za sve $n \neq m$ vrijedi $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$.

Pokazat će se u idućoj točki da zatvorena jedinična kugla nije kompaktan skup niti u jednom beskonačnodimenzionalnom prostoru.

Domaća zadaća 1

Zadatak 1.1.28 Dokažite da u beskonačnodimenzionalnom vektorskom prostoru postoji beskonačan linearno nezavisan skup.

Zadatak 1.1.29 Preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ na unitarnom prostoru X koje zadovoljava uvjete 1,3,4 i 5 iz definicije 1.1.4 naziva se pozitivno semidefinitan hermitski funkcional. (U tom kontekstu možemo reći da je skalarni produkt, s obzirom da zadovoljava i preostali uvjet 2, pozitivno *definitan* hermitski funkcional.)

Dokažite da za svaki pozitivno semidefinitan hermitski funkcional vrijedi Cauchy-Schwarzova nejednakost.

Zadatak 1.1.30 Dokažite da za norme na produktnom prostoru $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ normiranih prostora $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, navedene u napomeni 1.1.10 vrijedi

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty,$$

za svaki vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Zadatak 1.1.31 Neka je c_{00} vektorski prostor svih "konačnih" nizova:

$$c_{00} = \{(x_n) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da je } x_n = 0, \forall n > n_0\}.$$

Na c_{00} definiramo norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$ istim formulama kao i na $\mathbb{F}^n$. Pokažite da nikoje dvije od ove tri norme na c_{00} nisu ekvivalentne.

Zadatak 1.1.32 Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normirani prostori, neka je $(x_k)_k$ niz u $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, te neka je $x_0 \in X$. Stavimo $x_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Dokažite da je $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$ s obzirom na normu $\|\cdot\|_1$ na X ako i samo ako vrijedi $x_j^0 = \lim_{k\to\infty} x_j^k$, za sve $j = 1, 2, \ldots, n$. Pokažite da tvrdnja ostaje točna i ako normu $\|\cdot\|_1$ zamijenimo s $\|\cdot\|_2$ ili $\|\cdot\|_\infty$.

Zadatak 1.1.33 Pokažite da u svakom normiranom prostoru X vrijedi $\overline{K(x,r)} = \overline{K}(x,r)$, za sve $x \in X$ i $r > 0$. (Posebno, $\overline{K}(x,r)$ je zatvoren skup.)

Zadatak 1.1.34 Pokažite da je svaki konačnodimenzionalan normiran prostor separabilan.

1.2 Potpunost

Definicija 1.2.1 *Kažemo da je normiran prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun normiran prostor zove se još i Banachov prostor. Potpun unitaran prostor se naziva Hilbertov prostor.*

Propozicija 1.2.2 *Svaki konačnodimenzionalan normiran prostor je potpun.*

Dokaz: Uzmimo bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ za X i definirajmo normu na X s $\| \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \| = \max\{|\lambda_j| : j = 1, \ldots, n\}$ (vidite zadatak 1.2.16). Kako su sve norme na X ekvivalentne, dovoljno će biti pokazati (vidite napomenu 1.1.19 (d)) da je X potpun u ovoj normi.

Neka je $(x_k)_k$ Cauchyjev niz u X; stavimo $x_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k b_j$. Za $\epsilon > 0$ nađimo k_0 sa svojstvom $k_0 \leq k, l \Rightarrow \|x_k - x_l\| < \epsilon$. To znači da za $k, l \geq k_0$ imamo $|\lambda_j^k - \lambda_j^l| < \epsilon$ za sve $j = 1, \ldots, n$. Dakle, za svaki pojedini $j = 1, \ldots, n$, niz $(\lambda_j^k)_k$ je Cauchyjev niz u polju. Neka je $\lambda_j = \lim_{k\to\infty} \lambda_j^k$, $j = 1, \ldots, n$. Stavimo $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$.

Preostaje pokazati da je $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Uzmimo $\epsilon > 0$ i za svaki $j = 1, \ldots, n$, nađimo k_j takav da $k_j \leq k \Rightarrow |\lambda_j - \lambda_j^k| < \epsilon$. Neka je $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Očito, ako je $k_0 \leq k$ onda posebno imamo $k_j \leq k$, $\forall j$, pa slijedi $\max\{|\lambda_j - \lambda_j^k| : j = 1, \ldots, n\} < \epsilon$, to jest, $\|x - x_k\| < \epsilon$. $\square$

Propozicija 1.2.3 *Prostor $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachov.*

Dokaz: Neka je $(f_n)_n$ Cauchyjev niz. Iz $|f_n(t_0) - f_m(t_0)| \leq \max\{|f_n(t) - f_m(t)| : t \in [a,b]\} = \|f_n - f_m\|_\infty$ vidimo da je $(f_n(t_0))_n$ Cauchyjev niz za svaki pojedini $t_0 \in [a,b]$. Dakle, možemo definirati funkciju f na $[a,b]$ tako da stavimo $f(t_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$. Preostaje pokazati da je funkcija f neprekidna (dakle, da je element našeg prostora) te da polazni niz $(f_n)_n$ konvergira k f.

Odaberimo proizvoljan $\epsilon > 0$ i nađimo n_0 sa svojstvom

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \|f_m - f_n\|_\infty = \max\{|f_m(t) - f_n(t)| : t \in [a,b]\} < \epsilon \tag{4}$$

Uzmimo sad ponovo proizvoljan $t_0 \in [a,b]$. Za isti ϵ možemo pronaći $m \geq n_0$ tako da imamo

$$|f(t_0) - f_m(t_0)| < \epsilon. \tag{5}$$

Sada za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$|f(t_0) - f_n(t_0)| \leq |f(t_0) - f_m(t_0)| + |f_m(t_0) - f_n(t_0)| \overset{(4),(5)}{<} \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Jer je t_0 bio proizvoljan, zaključujemo da vrijedi

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \sup\{|f(t) - f_n(t)| : t \in [a,b]\} \leq 2\epsilon. \tag{6}$$

Dokažimo sada da je f neprekidna funkcija. Uzmimo opet bilo koji $t_0 \in [a,b]$. Neka je $\epsilon > 0$ zadan. Za taj ϵ odredimo n_0 tako da vrijedi (4), a onda i (6). Zbog neprekidnosti funkcije f_{n_0} u točki t_0 postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$t \in [a,b],\ |t - t_0| < \delta \Longrightarrow |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| < \epsilon. \tag{7}$$

Odavde dobivamo da za sve $t \in [a,b]$, $|t - t_0| < \delta$ vrijedi

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| + |f_{n_0}(t_0) - f(t_0)| \overset{(6),(7)}{<} 2\epsilon + \epsilon + 2\epsilon = 5\epsilon.$$

Time je pokazano da je funkcija f neprekidna u svakoj točki iz $[a,b]$. Sada se, međutim, (6) može iščitati tako da kažemo da $n \geq n_0$ povlači $\|f - f_n\|_\infty \leq 2\epsilon$. $\square$

Propozicija 1.2.4 *Za sve $f \in C([a,b])$ vrijedi $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$, $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$ i $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$. Nikoje dvije od navedenih normi nisu ekvivalentne.*

Dokaz: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt = \langle 1, |f|\rangle = |\langle 1, |f|\rangle| \leq \|1\|_2 \,\|\,|f|\,\|_2 = \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$. Slično dobivamo i drugu nejednakost: $\|f\|_2 = (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{1/2} \leq \|f\|_\infty (\int_a^b dt)^{1/2} = \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$. Treća nejednakost je kombinirana posljedica prve dvije.

Nađimo prirodni broj n_0 takav da vrijedi $\frac{1}{b-a} < n_0$. Sada je za sve $n \geq n_0$ formulom

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n^2(a-t) + 2n, & a \leq t \leq a + \frac{1}{n} \\ 0, & a + \frac{1}{n} \leq t \leq b \end{cases}$$

dobro definirana neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$. Lako se izračuna da vrijedi $\|f_n\|_1 = 1$, $\|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{4n}{3}}$ i $\|f_n\|_\infty = 2n$.

Dakle, niz $(f_n)_n$ je ograničen u normi $\|\cdot\|_1$, ali nije ograničen u druge dvije norme. Zato ne mogu postojati brojevi M i N za koje bi vrijedilo $\|f\|_2 \leq M\|f\|_1$, odnosno $\|f\|_\infty \leq N\|f\|_1$ za sve $f \in C([a,b])$. Na kraju, stavimo $g_n = \sqrt{\frac{3}{4n}} f_n$. Tada je $\|g_n\|_2 = 1$ i $\|g_n\|_\infty = \sqrt{3n}$. Zato ne može postojati niti broj K takav da bude $\|f\|_\infty \leq K\|f\|_2$ za sve $f \in C([a,b])$. $\square$

Propozicija 1.2.5 *Prostori $(C([a,b]), \|\cdot\|_1)$ i $(C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ nisu potpuni.*

Dokaz: Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ odabran tako da vrijedi $\frac{2}{b-a} \leq n_0$. Stavimo $c = \frac{a+b}{2}$ i za $n \geq n_0$ definirajmo

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & a \leq t \leq c - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} + \frac{n}{2}(t-c), & c - \frac{1}{n} \leq t \leq c + \frac{1}{n} \\ 1, & c + \frac{1}{n} \leq t \leq b \end{cases} .$$

Lagano se izračuna da za $m \geq n$ vrijedi $\|f_m - f_n\|_2 \leq \frac{1}{n}$ što očito pokazuje da je $(f_n)_n$ Cauchyjev niz u normi $\|\cdot\|_2$. Zbog prve nejednakosti u propoziciji 1.2.4 $(f_n)_n$ je sad Cauchyjev niz i u normi $\|\cdot\|_1$. Pokazat ćemo da taj niz nije konvergentan u normi $\|\cdot\|_1$. To će onda odmah povlačiti, opet zbog prve nejednakosti u propoziciji 1.2.4, da nije konvergentan niti u normi $\|\cdot\|_2$.

Da završimo dokaz, pretpostavimo da postoji $f \in C([a,b])$ takva da $\|f_n - f\|_1 \to 0$ i pokažimo da to vodi na kontradikciju. Uzmimo proizvoljan ϵ za koji je $0 < \epsilon < \frac{b-a}{2}$. Za $n > \frac{1}{\epsilon}$ imamo $\|f - f_n\|_1 = \int_a^b |f(t) - f_n(t)|dt \geq \int_{c+\epsilon}^b |f(t) - 1|dt$. Za $n \to \infty$ lijeva strana teži u 0, a desna strana je nenegativna konstanta. Zato je $\int_{c+\epsilon}^b |f(t) - 1|dt = 0$. Jer je $\|\cdot\|_1$ norma i na prostoru $C([c+\epsilon, b])$, slijedi $f(t) = 1, \forall t \in [c+\epsilon, b]$. Analogno, iz $\|f - f_n\|_1 \geq \int_a^{c-\epsilon} |f(t)|dt$ zaključujemo da je $f(t) = 0, \forall t \in [a, c-\epsilon]$. Kako je ϵ bio proizvoljan, izlazi da f ima prekid u točki c. □

Napomena 1.2.6 Primijetimo da nam propozicija 1.2.4 kaže kako norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$ nisu ekvivalentne, iako u jednom smjeru vrijede nejednakosti koje se traže u definiciji ekvivalencije normi. U takvoj situaciji nemoguće je da su svi involvirani prostori potpuni - to je jednostavna posljedica teorema o inverznom preslikavanju (odnosno teorema o otvorenom preslikavanju). U tom smislu, kad dokažemo taj teorem, prethodna propozicija će ponovo biti dokazana, tada kao jednostavan i direktan korolar.

U nastavku dokazujemo dvije važne propozicije koje opisuju Cauchyjeve nizove.

Propozicija 1.2.7 *Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u normiranom prostoru X.*

(a) *Skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ograničen.*

(b) *Za svaki niz pozitivnih brojeva $(\epsilon_n)_n$ postoji podniz $(x_{p(n)})_n$ niza $(x_n)_n$ sa svojstvom $\|x_{p(n+1)} - x_{p(n)}\| < \epsilon_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: **(a)** Za $\epsilon = 1$ postoji n_0 takav da $m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < 1$. Posebno, za svaki $n \geq n_0$ imamo $\|x_n\| \leq \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| < 1 + \|x_{n_0}\|$.

(b) Neka je zadan niz $(\epsilon_n)_n$. Najprije nađimo n_1 takav da $n, m \geq n_1 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon_1$. Stavimo $p(1) = n_1$. Dalje, postoji $n_2 > n_1$ takav da $n, m \geq n_2 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon_2$. Stavimo $p(2) = n_2$. Zbog $p(1), p(2) \geq n_1$ imamo $\|x_{p(2)} - x_{p(1)}\| < \epsilon_1$.

Nadalje, postoji $n_3 > n_2$ takav da $n, m \geq n_3 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon_3$. Stavimo $p(3) = n_3$. Dokaz završava primjenom principa matematičke indukcije. □

Propozicija 1.2.8 *Neka Cauchyjev niz $(x_n)_n$ u normiranom prostoru X ima podniz $(x_{p(n)})_n$ koji konvergira k $x \in X$. Tada je i $lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Dokaz: Za zadani ϵ možemo naći n_1 takav da $n \geq n_1 \Rightarrow \|x_{p(n)} - x\| < \frac{\epsilon}{2}$ i također možemo naći n_2 takav da $n, m \geq n_2 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Neka je n_0 veći od brojeva n_1 i n_2. Za $n \geq n_0$ pogotovo imamo $p(n) \geq n \geq n_0$. Zato za $n \geq n_0$ imamo $\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{p(n)}\| + \|x_{p(n)} - x\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. □

Definicija 1.2.9 *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira k vektoru $x \in X$ ako je $x = lim_{n\to\infty} s_n$ gdje je $(s_n)_n$ niz parcijalnih suma; $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.*

Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ u normiranom prostoru konvergira apsolutno ako konvergira red nenegativnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Sada smo u prilici dokazati važan kriterij potpunosti normiranog prostora. U Matematičkoj analizi 1 smo naučili da svaki apsolutno konvergentan red realnih brojeva konvergira i obično. Sljedeći teorem objašnjava da to nije ekskluzivno svojstvo polja realnih brojeva, nego da je to karakterizirajuće svojstvo potpunih prostora.

Teorem 1.2.10 *Normiran prostor X je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ vektora iz X konvergira (obično) u X. U tom slučaju vrijedi $\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.*

Dokaz: Neka je prostor Banachov i neka vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Dakle, niz parcijalnih suma tog reda je Cauchyjev, pa za $\epsilon > 0$ možemo naći n_0 takav da $m > n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| - \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \epsilon$. Sada vidimo da za $m > n \geq n_0$ također vrijedi $\|s_m - s_n\| = \| \sum_{k=n+1}^{m} x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \epsilon$. Dakle, niz $(s_n)_n$ je Cauchyjev. Kako je po pretpostavci prostor potpun, red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira u X.

Obratno, pretpostavimo da u X apsolutna konvergencija redova povlači običnu. Uzmimo proizvoljan Cauchyjev niz $(x_n)_n$ u X. Prema propoziciji 1.2.7 možemo naći podniz $(x_{p(n)})_n$ niza $(x_n)_n$ takav da vrijedi $\|x_{p(n+1)} - x_{p(n)}\| < \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Očito, red $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{p(k+1)} - x_{p(k)}\|$ konvergira. Prema pretpostavci, tada konvergira i red $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{p(k+1)} - x_{p(k)})$. Po definiciji, to znači da konvergira njegov niz parcijalnih suma $(t_n)_n$, gdje je $t_n = \sum_{k=1}^{n}(x_{p(k+1)} - x_{p(k)}) = x_{p(n+1)} - x_{p(1)}$. Dakle, postoji $x \in X$ takav da je $x = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}(x_{p(n+1)} - x_{p(1)})$. Drugim riječima, imamo $\lim_{n\to\infty} x_{p(n)} = x + x_{p(1)}$. Prema prethodnoj propoziciji to je dovoljno da se zaključi da i niz $(x_n)_n$ konvergira k $x + x_{p(1)}$.

Na kraju, uzmimo da je u potpunom prostoru red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ apsolutno konvergentan. Neka je $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Tada zbog neprekidnosti norme i napomene 1.1.19(g) imamo $\|x\| = \|\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} x_k)\| = \lim_{n\to\infty} \| \sum_{k=1}^{n} x_k\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$. □

U nastavku navodimo neka osnovna svojstva potprostora normiranih prostora.

Uočimo da je svaki potprostor normiranog (unitarnog) prostora i sam normiran (unitaran) s restrikcijom originalne norme (originalnog skalarnog produkta).

Propozicija 1.2.11 *Neka je Y potprostor normiranog prostora X.*

(a) *$\overline{Y}$ je također potprostor od X.*

(b) *Ako je X potpun, onda je i $\overline{Y}$ potpun.*

(c) *Ako je Y potpun, onda je zatvoren.*

(d) *Ako je Y konačnodimenzionalan, onda je Y zatvoren.*

Dokaz: **(a)** Neka su $x, y \in \overline{Y}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Nađimo nizove (na temelju propozicije 1.1.22) $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ u Y koji konvergiraju prema x, odnosno y. Sada je jasno da je $\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y$, pa opet primjenom propozicije 1.1.22 zaključujemo da je $\alpha x + \beta y \in \overline{Y}$.

(b) Neka je $(y_n)_n$ Cauchyjev niz u $\overline{Y}$. Kako je to Cauchyjev niz u potpunom prostoru X, postoji $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in X$. Korolar 1.1.23 sad povlači $y \in \overline{Y}$.

(c) Neka je Y potpun i $x \in \overline{Y}$. Tada je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ za neki niz $(x_n)_n$ u Y. Dakle, $(x_n)_n$ je Cauchyjev niz u potpunom prostoru Y pa ima limes $y \in Y$. Jer je limes jedinstven, slijedi $x = y$, tj. $x \in Y$.

(d) Slijedi iz propozicije 1.2.2 i prethodne tvrdnje (c). $\square$

Općenito, udaljenost točke x od skupa S u normiranom prostoru X definira se kao $d(x, S) = \inf\{\|x - a\| : a \in S\}$, dakle kao "najmanja" udaljenost točke x od točaka skupa S.

Sljedeća lema govori o udaljenosti točaka od zatvorenog potprostora.

Lema 1.2.12 *(F. Riesz) Neka je X normiran prostor i M pravi zatvoren potprostor od X. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in X$ takav da je $\|x\| = 1$ i $\|x - y\| > 1 - \epsilon$, $\forall y \in M$.*

Ako je $\dim M < \infty$ možemo postići da vrijedi čak i $\|x - y\| \geq 1$, $\forall y \in M$.

Dokaz: Kako je za $\epsilon \geq 1$ tvrdnja trivijalna, uzmimo $0 < \epsilon < 1$. Neka je $0 < \delta < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ i $x_0 \in X \setminus M$. Jer je skup $X \setminus M$ otvoren, postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq X \setminus M$, tj. $K(x_0, r) \cap M = \emptyset$. Dakle je $\|x_0 - y\| \geq r$, $\forall y \in M$.

Neka je $d = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in M\} \geq r > 0$. Kako je $d < d + d\delta$, po definiciji infimuma postoji $y_0 \in M$ takav da je $d \leq \|x_0 - y_0\| \leq d + d\delta$. Stavimo $x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$. Tada je $\|x\| = 1$ i za sve $y \in M$ vrijedi

$$\|x - y\| = \left\|\frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y\right\| = \frac{\|(x_0 - y_0) - \|x_0 - y_0\|\, y\,\|}{\|x_0 - y_0\|} = \frac{\|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\| y)\|}{\|x_0 - y_0\|} \geq$$

(jer vektor u okrugloj zagradi leži u M)

$$\frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \geq \frac{d}{d + d\delta} = \frac{1}{1 + \delta} > \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon}} = 1 - \epsilon.$$

Uzmimo sad da je $\dim M < \infty$ i prođimo ponovo kroz dokaz. Uočimo da je naš konstruirani vektor x element potprostora $Z = \mathrm{span}\{x_0, M\}$. Uzimajući $\epsilon = \frac{1}{n}$ možemo rekapitulirati ovako: $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in Z$ takav da je $\|x_n\| = 1$ i $\|x_n - y\| > 1 - \frac{1}{n}$ za sve $y \in M$. Jer je niz $(x_n)_n$ na sferi konačnodimenzionalnog prostora Z (koja je kompaktan skup!), postoji podniz $(x_{p(n)})_n$ koji konvergira k nekom vektoru x. Zbog neprekidnosti norme znamo da je $\|x\| = 1$. Jer je $1 - \frac{1}{p(n)} < \|x_{p(n)} - y\|$, $\forall y \in M$, na limesu dobivamo $1 \leq \|x - y\|$, $\forall y \in M$. $\square$

Teorem 1.2.13 *Jedinična sfera* $S(0,1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ *u beskonačnodimenzionalnom normiranom prostoru* X *nije kompaktan skup.*

Dokaz: Neka je $e_1 \in S$. Za $M_1 = \text{span}\{e_1\}$ na temelju prethodne leme možemo naći $e_2 \in S(0,1)$ takav da je $\|e_2 - y\| \geq 1$, $\forall y \in M_1$. Specijalno je $\|e_2 - e_1\| \geq 1$.

Dalje, za $M_2 = \text{span}\{e_1, e_2\}$ nađimo $e_3 \in S(0,1)$ takav da je $\|e_3 - y\| \geq 1$, $\forall y \in M_2$. Induktivno dolazimo do niza $(e_n)_n$ na sferi $S(0,1)$ za koji vrijedi $\|e_n - e_m\| \geq 1$, $\forall n \neq m$. Taj niz očito nema konvergentnih podnizova. $\square$

Napomena 1.2.14 Uočimo da smo samo implicitno koristili pretpostavku $\dim X = \infty$. Naime, u svakom koraku imali smo potprostor M_n konačne dimenzije; dakle, definitivno zatvoren i različit od X. Zbog toga smo u svakom koraku mogli koristiti drugu tvrdnju prethodne leme.

Napomena 1.2.15 Uočimo da je sfera $S(0,1)$ zatvoren i ograničen skup u X. Dakle, čim je $\dim X = \infty$, nije istina da je svaki ograničen i zatvoren skup kompaktan. Zato možemo reći: normiran prostor je konačnodimenzionalan ako i samo ako je svaki njegov ograničen i zatvoren podskup kompaktan.

Domaća zadaća 2

Zadatak 1.2.16 Neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza vektorskog prostora X. Pokažite da je formulom $\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \| = \max\{|\lambda_j| : j = 1, \ldots, n\}$ dana jedna norma na X.

Zadatak 1.2.17 Neka su $X_1, \ldots, X_n$ normirani prostori. Pokažite da je prostor $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ potpun u odnosu na neku od normi $\| \cdot \|_p$, $p \in \{1, 2, \infty\}$, ako i samo ako je svaki od prostora $X_1, \ldots, X_n$ potpun.

Zadatak 1.2.18 Neka je X normiran prostor i M zatvoren potprostor od X. Prisjetimo se da je kvocijentni prostor X/M vektorski prostor nad istim poljem čiji su elementi linearne mnogostrukosti $[x] = x + M$, $x \in X$, a operacije definirane s $(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$ i $\alpha(x+M) = \alpha x + M$.

Pokažite da je s $\|x + M\| = \inf\{\|x - a\| : a \in M\}$ zadana norma na X/M. Na taj (standardni) način kvocijent normiranog prostora i sam postaje normiran prostor.

Je li za konstrukciju nužno da je potprostor M zatvoren?

Uočite da za sve $x \in X$ zapravo vrijedi $\|x + M\| = \mathrm{d}(x, M)$.

Zadatak 1.2.19 Pokažite da niti jedna sfera $S(x_0, r)$ i niti jedna zatvorena kugla $\overline{K}(x_0, r)$ u beskonačnodimenzionalnom normiranom prostoru nije kompaktan skup.

1.3 Ograničeni linearni operatori

Definicija 1.3.1 *Neka su X i Y normirani prostori. Kažemo da je linearan operator $A : X \to Y$ ograničen ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\|Ax\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. Skup svih ograničenih operatora označavamo s $\mathbb{B}(X, Y)$. Za $X = Y$ pišemo $\mathbb{B}(X)$.*

Propozicija 1.3.2 *Neka su X i Y normirani prostori i $A : X \to Y$ linearan operator. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) *A je neprekidan u nekoj točki $x_0 \in X$;*

(b) *A je neprekidan na X;*

(c) *A je uniformno neprekidan na X;*

(d) *A je ograničen.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$: Uzmimo $x \in X$ i pretpostavimo da je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Tada je $x_0 = \lim_{n\to\infty}(x_n - x + x_0)$ pa zbog pretpostavke imamo $Ax_0 = \lim_{n\to\infty}(Ax_n - Ax + Ax_0)$. Pribrojimo li lijevo i desno stacionaran niz $(Ax - Ax_0)$, dobivamo $Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n$.

$(a) \Rightarrow (d)$: Iz neprekidnosti u točki 0 i činjenice $A0 = 0$ zaključujemo: za $\epsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ tako da $\|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < 1$. Sad za bilo koji $x \neq 0$ imamo $\|\frac{\delta}{2\|x\|}x\| < \delta$ pa je $\|A(\frac{\delta}{2\|x\|}x)\| < 1$, to jest $\|Ax\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$. Dobivena nejednakost očito vrijedi i za $x = 0$.

$(d) \Rightarrow (c)$: Uzmimo da je $\|Ax\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. Neka je $\epsilon > 0$. Stavimo $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Tada imamo: $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq M\|x - y\| < \epsilon$.

$(c) \Rightarrow (a)$ je trivijalno. □

Napomena 1.3.3 Uočimo da ograničenost operatora ne znači da je skup $A(X) = \mathrm{Im}\, A$ ograničen. Ograničen linearan operator je zapravo ograničen na zatvorenoj jediničnoj kugli. Ako je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ onda je A ograničen i u bilo kojem paru normi na X i Y koje su, respektivno, ekvivalentne s originalnima. Provjerite!

Napomena 1.3.4 Neka su X i Y normirani prostori i $f : X \to Y$ bilo kakva funkcija, ne nužno linearna. Tada vrijedi: f je neprekidna na X ako i samo je za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ i skup $f^{-1}(V)$ otvoren u X.

Dokaz: Neka su originali otvorenih skupova otvoreni. Uzmimo proizvoljan $x \in X$ i pretpostavimo da neki niz $(x_n)_n$ konvergira k x. Neka je $\epsilon > 0$. Kugla $K(f(x), \epsilon)$ je otvoren skup u Y, pa je po pretpostavci $f^{-1}(K(f(x), \epsilon))$ otvoren skup u X koji (očito) sadrži točku x. Zato postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq f^{-1}(K(f(x), \epsilon))$. Zbog $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ sada postoji n_0 takav da $n \geq n_0$ povlači $\|x - x_n\| < r$, to jest $x_n \in K(x, r)$. Kako je $K(x, r) \subseteq f^{-1}(K(f(x), \epsilon))$, slijedi $f(x_n) \in K(f(x), \epsilon)$; drugim riječima, za $n \geq n_0$ imamo $\|f(x) - f(x_n)\| < \epsilon$. Dakle, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Time smo dokazali da je f neprekidna u proizvoljno odabranoj točki $x \in X$.

Obratno, neka je f neprekidna na X. Odaberimo proizvoljan otvoren skup V u Y i pretpostavimo da skup $f^{-1}(V)$ nije otvoren. Tada skup $X \setminus f^{-1}(V)$ nije zatvoren pa je

$X \setminus f^{-1}(V)$ pravi podskup svog zatvarača $\overline{X \setminus f^{-1}(V)}$.
Odaberimo $x \in \overline{X \setminus f^{-1}(V)} \setminus (X \setminus f^{-1}(V))$. Jer $x \notin X \setminus f^{-1}(V)$ imamo $x \in f^{-1}(V)$. Jer je $x \in \overline{X \setminus f^{-1}(V)}$, možemo prema propoziciji 1.1.22 naći niz $(x_n)_n$ u $X \setminus f^{-1}(V)$ koji konvergira k x. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki x sada je $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Međutim, imamo $f(x) \in V$ i $f(x_n) \notin V$, $\forall n$. Kako je V otvoren, možemo naći $r > 0$ takav da je $K(f(x), r) \subseteq V$. Sad bi zbog konvergencije niza $(f(x_n))_n$ prema $f(x)$ svi članovi niza $(f(x_n))_n$, osim konačno mnogo njih, morali biti u $K(x, r) \subseteq V$. Kontradikcija. □

Očita posljedica ove tvrdnje je i sljedeći kriterij neprekidnosti: funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna na X ako i samo ako je za svaki zatvoren skup $F \subseteq Y$ i skup $f^{-1}(F)$ zatvoren u X. Naime, za svaki $F \subseteq Y$ vrijedi $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$.

Napomena 1.3.5 Za svaki linearan operator $A : X \to Y$ jezgra $\operatorname{Ker} A$ i slika $\operatorname{Im} A$ su potprostori od X i Y. Ako je A ograničen, onda prethodna napomena zbog $\operatorname{Ker} A = f^{-1}(\{0\})$ pokazuje da je $\operatorname{Ker} A$ zatvoren potprostor od X.

S druge strane, slika $\operatorname{Im} A$ ograničenog operatora A ne mora biti zatvoren potprostor (i to ćemo vidjeti u mnogim primjerima i konkretnim situacijama).

Propozicija 1.3.6 *Ako su X i Y normirani prostori i $\dim X < \infty$, svaki linearan operator $A : X \to Y$ je ograničen.*

Dokaz: Uzmimo bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ za X i promatrajmo X s normom $\|\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j\| = \max\{|\lambda_j| : j = 1, \ldots, n\}$; to smijemo zbog napomene 1.3.3 i teorema 1.1.17.

Označimo $M = \sum_{j=1}^n \|Ab_j\|$. Sada za $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$ imamo $\|Ax\| = \|A(\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j)\| = \|\sum_{j=1}^n \lambda_j Ab_j\| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \|Ab_j\| \leq M\|x\|$. □

Nisu svi linearni operatori ograničeni. Čak i ako je kodomena konačnodimenzionalan prostor, operator ne mora biti ograničen. Štoviše, ni linearni funkcionali ne moraju biti ograničeni. U stvari, vidjet ćemo da je pravo pitanje upravo obratno; nije a priori jasno da na proizvoljnom normiranom prostoru uopće postoje netrivijalni ograničeni funkcionali. Jasno, ograničene funkcionale na unitarnim prostorima je lako naći. Naime, za svaki fiksni vektor a unitarnog prostora X preslikavanje $f : X \to \mathbb{F}$ definirano s $f(x) = \langle x, a \rangle$ je linearno i, zbog Cauchy-Schwarzove nejednakosti, očito ograničeno.

Definicija 1.3.7 *Neka je X normiran prostor. Skup svih ograničenih linearnih funkcionala na X, $\mathbb{B}(X, \mathbb{F})$, zove se dualni prostor prostora X i označava se s X'.*

Primjer 1.3.8 Neka je $\ell^1 = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^\infty |x_k| < \infty\}$. Očito je ℓ^1 vektorski prostor uz koordinatno definirane operacije. Primijetimo da je $\dim \ell^1 = \infty$ jer $c_{00} \leq \ell^1$ (ovdje je c_{00} vektorski prostor svih "konačnih" nizova iz zadatka 1.1.31).

Lagano se provjeri da je s $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ zadana jedna norma na ℓ^1. (Istaknimo odmah da ovo nije standardni izbor norme na prostoru ℓ^1. Uobičajeno je prostor l^1 promatrati s normom $\|\cdot\|_1$ koja je definirana formulom $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^\infty |x_k|$.)

Definirajmo $f : \ell^1 \to \mathbb{F}$ formulom $f(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k$; jer je $\mathbb{F}$ potpun prostor, u njemu svaki apsolutno konvergentan red konvergira, pa je f dobro definirano preslikavanje. Očito je f linearno. Međutim, ovo je primjer neograničenog linearnog funkcionala. Zaista, za

$x = (1, 1, \dots, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ (jedinice na prvih $n-1$ mjesta u nizu) imamo $\|x\|_\infty = 1$ i $f(x) = n$. Jer je ovdje n proizvoljan prirodan broj, jasno je da f ne može biti ograničen.

Usput možemo primijetiti da ℓ^1 uz ovako definiranu normu $\|\cdot\|_\infty$ nije potpun. To se može pokazati direktno, a također i uz pomoć opaske da je $c_{00} \le \ell^1 \le c_0$. Ovdje smo sa c_0 označili vektorski prostor svih nizova skalara koji konvergiraju u 0; to je također normiran prostor s normom $\|(x_n)_n\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Kad bi sad ℓ^1 bio potpun u odnosu na $\|\cdot\|_\infty$ bio bi zbog propozicije 1.2.11(c) i zatvoren. Kako je (vidite zadatak 1.3.17) c_{00} gust u c_0 u promatranoj normi $\|\cdot\|_\infty$, sad bi slijedilo $c_0 = \overline{c_{00}} \subseteq \overline{\ell^1} = l_1$. To je, međutim, nemoguće jer je jasno da je l^1 striktno sadržan u c_0.

Neka su X i Y normirani prostori. Uočimo da je i $\mathbb{B}(X,Y)$ vektorski prostor uz točkovne operacije. Naime, za $A, B \in \mathbb{B}(X,Y)$ po definiciji postoje brojevi M i N takvi da je $\|Ax\| \le M\|x\|$ i $\|Bx\| \le N\|x\|$ za sve $x \in X$. Sada je $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le (M+N)\|x\|$. Analogno vidimo i da je αA ograničen operator za sve $\alpha \in \mathbb{F}$ i $A \in \mathbb{B}(X,Y)$.

Za $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ definiramo $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| \le 1\}$. Jer je A ograničen, slika zatvorene jedinične kugle je ograničen skup, pa je ova definicija dobra. Primijetimo da sada za proizvoljan $x \in X$, $x \neq 0$, imamo $\|A(\frac{1}{\|x\|}x)\| \le \|A\|$, a odavde slijedi $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$, $\forall x \in X$. Štoviše, $\|A\|$ je najmanji od svih brojeva M za koje vrijedi $\|Ax\| \le M\|x\|$, $\forall x \in X$. Naime, ako je M neki takav broj, onda za svaki $x \in X$ takav da je $\|x\| \le 1$ imamo $\|Ax\| \le M\|x\| \le M$, pa je po definiciji supremuma $\|A\| \le M$.

Na kraju ovih razmatranja primijetimo da je formulom $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| \le 1\}$ zaista definirana norma na prostoru $\mathbb{B}(X,Y)$. (Provjerite!) Ta se norma zove operatorska norma i u daljnjem ćemo prostor $\mathbb{B}(X,Y)$ uvijek prešutno shvaćati kao normiran prostor uz operatorsku normu.

Teorem 1.3.9 *Neka su X i Y normirani prostori. Tada je i $\mathbb{B}(X,Y)$ s operatorskom normom normiran prostor. Ako je Y Banachov, onda je i prostor $\mathbb{B}(X,Y)$ Banachov. Ako je Y Banachov i ako je $X_0 \le X$ gust potprostor od X, onda za svaki operator $A_0 \in \mathbb{B}(X_0,Y)$ postoji jedinstven operator $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ za koji vrijedi $A|_{X_0} = A_0$ i $\|A\| = \|A_0\|$.*

Dokaz: Prvu tvrdnju smo već komentirali neposredno prije teorema. Uzmimo Cauchyjev niz $(A_n)_n$ u $\mathbb{B}(X,Y)$. Za $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da

$$m, n \ge n_0 \Longrightarrow \|A_m - A_n\| < \epsilon. \tag{8}$$

Posebno, odavde zaključujemo i da je

$$m, n \ge n_0,\ x \in X \Longrightarrow \|A_m x - A_n x\| \le \|A_m - A_n\| \cdot \|x\| < \epsilon\|x\|.$$

Dakle, niz $(A_n x)_n$ je Cauchyjev u Banachovom prostoru Y. Stavimo $Ax = \lim_n A_n x$, $x \in X$. Time smo definirali jedno preslikavanje s X u Y. Očito je to linearan operator. Preostaje pokazati da je taj operator ograničen i da predstavlja limes zadanog niza. (Uočimo da već znamo da je A točkovni limes zadanog niza; mi, međutim, trebamo dokazati da je A limes zadanog niza u operatorskoj normi. To nije isto - uskoro ćemo vidjeti i konkretne primjere. Zapravo se radi o razlici između tzv. jake konvergencije i konvergencije u normi.)

Uzmimo proizvoljan $x \in X$ takav da je $\|x\| \leq 1$. Zadajmo $\epsilon > 0$. Za taj ϵ nađimo n_0 tako da vrijedi (8). Nadalje, za isti ϵ uzmimo bilo koji $m \geq n_0$ takav da vrijedi

$$\|Ax - A_m x\| < \epsilon. \tag{9}$$

Sada za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$\begin{aligned} \|Ax - A_n x\| &\leq \|Ax - A_m x\| + \|A_m x - A_n x\| \\ &\leq \|Ax - A_m x\| + \|A_m - A_n\| \cdot \|x\| \\ &\overset{(9),(8)}{<} \epsilon + \epsilon\|x\| \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Dokazali smo, dakle, da vrijedi

$$\|Ax - A_n x\| < 2\epsilon, \;\; \forall x \in X, \; \|x\| \leq 1, \; \forall n \geq n_0. \tag{10}$$

Preostaje uzeti supremum po svim x, $\|x\| \leq 1$. Tako dobivamo $\|A - A_n\| \leq 2\epsilon$ za sve $n \geq n_0$. To pokazuje da je $A - A_n \in \mathbb{B}(X, Y)$ (što onda odmah daje i $A = (A - A_n) + A_n \in \mathbb{B}(X, Y)$), a ujedno i $A = \lim_n A_n$.

Za dokaz treće tvrdnje definirajmo A na sljedeći način: za x iz X nađimo niz $(x_n)_n$ u X_0 koji konvergira k x. Posebno, niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev, a iz $\|A_0 x_n - A_0 x_m\| \leq \|A_0\| \|x_n - x_m\|$ vidimo da je Cauchyjev i niz $(A_0 x_n)_n$ u prostoru Y. Jer je Y Banachov, možemo staviti $Ax = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n$. Pokažimo da je definicija dobra. U tu svrhu uzmimo da $x_n \to x$ i $y_n \to x$, pri čemu je $x \in X$, a $x_n, y_n \in X_0$. Sada imamo $x_n - y_n \to 0$ pa iz neprekidnosti operatora A_0 zaključujemo $A_0(x_n - y_n) \to 0$. Jer su nizovi $(A_0 x_n)_n$ i $(A_0 y_n)_n$ konvergentni, slijedi $\lim_{n\to\infty} A_0 x_n = \lim_{n\to\infty} A_0 y_n$.

Jasno je da je konstruirano preslikavanje A linearno.

Ako je $x \in X_0$ onda u gornjoj konstrukciji možemo uzeti stacionaran niz; to odmah pokazuje da je $A|_{X_0} = A_0$.

Na kraju, iz $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ i $Ax = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n$ uz pomoć neprekidnosti norme dobivamo $\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_0 x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_0\| \|x_n\| = \|A_0\| \|x\|$, a to pokazuje da je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ i $\|A\| \leq \|A_0\|$. Jer je A_0 restrikcija od A, obratna nejednakost $\|A_0\| \leq \|A\|$ je trivijalna (supremum po manjem skupu ne može biti veći). $\square$

Napomena 1.3.10 Ako u prostoru operatora $\mathbb{B}(X, Y)$ vrijedi $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ onda za dani $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da $n \geq n_0$ povlači $\|A - A_n\| < \epsilon$. Odavde za svaki $x \in X$ imamo $n \geq n_0 \Rightarrow \|Ax - A_n x\| = \|(A - A_n)x\| \leq \|A - A_n\| \|x\| < \epsilon \|x\|$. Ovo pokazuje da niz $(A_n x)_n$ konvergira k x, za svaki x u X, i to uniformno po x na jediničnoj kugli prostora X (jer izbor kritičnog indeksa n_0 za zadani ϵ ne ovisi o x). Zato se ponekad operatorska norma zove i norma uniformne konvergencije.

Korolar 1.3.11 *Za svaki normiran prostor X dualni prostor X' je Banachov.*

Napomena 1.3.12 Uskoro ćemo vidjeti da je i obrat druge tvrdnje teorema 1.3.9 točan: ako je $\mathbb{B}(X, Y)$ potpun, tada je nužno i prostor Y potpun. Ova tvrdnja će se izvesti kao jednostavna posljedica Hahn-Banachovog teorema.

Napomena 1.3.13 Ako se operatori A i B mogu komponirati i ako su oba ograničena, onda za svaki x imamo $\|BAx\| \leq \|B\|\|Ax\| \leq \|B\|\|A\|\|x\|$ što pokazuje da vrijedi $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$. Posebno, to vrijedi i u algebri $\mathbb{B}(X)$, gdje je X proizvoljan normiran prostor. Kad imamo normu na algebri s jedinicom koja je submultiplikativna i zadovoljava $\|1\| = 1$, onda se ta struktura zove normirana algebra s jedinicom. Dakle, ako je X normiran prostor, $\mathbb{B}(X)$ je normirana algebra s jedinicom.

Banachova algebra je normirana algebra koja je potpun normiran prostor u predmetnoj normi. Iz prethodnih razmatranja slijedi: ako je prostor X Banachov, onda je $\mathbb{B}(X)$ Banachova algebra s jedinicom.

Napomena 1.3.14 U kategoriji vektorskih prostora izomorfizmi su bijektivni linearni operatori. Kad promatramo normirane prostore, prirodno je tražiti i ograničenost operatora koji uspostavljaju bijektivnu korespondenciju danih prostora. No, ovdje je važno uočiti da iz ograničenosti bijektivnog linearnog operatora $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ ne možemo a priori zaključiti da je i inverzni operator $A^{-1} : Y \to X$ ograničen. (Pokazat će se kasnije da je taj zaključak ipak moguć ako su prostori X i Y Banachovi; to je posljedica čuvenog teorema o otvorenom preslikavanju.)

Zato kažemo da su normirani prostori X i Y izomorfni (kaže se i topološki izomorfni) ako postoji bijektivan linearan operator $A : X \to Y$ takav da su A i A^{-1} ograničeni.

Viši (finiji) oblik izomorfnosti prostora X i Y dobivamo ako između njih uspijemo uspostaviti bijektivan *izometričan* linearan operator. Općenito, kažemo da je (ne nužno bijektivan) operator $A : X \to Y$ izometrija ako vrijedi $\|Ax\| = \|x\|$, $\forall x \in X$. Primijetimo da za izometričan operator imamo $\|A\| = 1$. Nadalje, izometričan operator je nužno injektivan, a ako je i surjektivan, inverzni operator je također izometričan.

Ukoliko između dva normirana prostora možemo uspostaviti bar jedan izometrički izomorfizam, kažemo da su ti prostori izometrički izomorfni. Takve prostore s apstraktne točke gledišta shvaćamo jednakima i u praksi ih često poistovjećujemo. Naime, lako se pokazuje da je izometrička izomorfnost relacija ekvivalencije na skupu svih normiranih prostora nad istim poljem.

Domaća zadaća 3

Zadatak 1.3.15 Neka su X i Y normirani prostori i $A : X \to Y$ linearan operator. Dokažite da je $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| = 1\}$.

Zadatak 1.3.16 Neka je c_{00} vektorski prostor svih "konačnih" nizova iz zadatka 1.1.31. Neka je, za $n \in \mathbb{N}$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, , \ldots)$ (jedinica na n-tom mjestu). Uočimo da je skup $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ algebarska baza za c_{00}. Definirajmo linearan funkcional f na c_{00} s $f(e_n) = n$. Pokažite da f nije ograničen niti u jednoj od normi $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$.

Zadatak 1.3.17 Neka je c_0 vektorski prostor svih nizova skalara koji konvergiraju u 0. Provjerite da je c_0 normiran prostor s normom $\|(x_n)_n\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Pokažite da je c_{00} gust u c_0 u normi $\|\cdot\|_\infty$.

Zadatak 1.3.18 Neka je f neograničen linearan funkcional na normiranom prostoru X. Dokažite da je tada $\operatorname{Ker} f$ gust potprostor od X.

Zadatak 1.3.19 Neka je X normiran prostor, $M \leq X$ zatvoren potprostor i $\pi : X \to X/M$ kvocijentno preslikavanje, $\pi(x) = x + M$. Pokažite da je π ograničen linearan operator i da vrijedi $\|\pi\| = 1$.

Nadalje, ako je X Banachov, pokažite da je i kvocijentni prostor X/M potpun.

Zadatak 1.3.20 Neka su X i Y normirani prostori, te neka je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ izometrija. Je li $\operatorname{Im} A$ zatvoren potprostor od Y?

Zadatak 1.3.21 Neka su X i Y normirani prostori. Za linearan operator $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ kažemo da je ograničen odozdo ako postoji $m > 0$ za koji vrijedi $\|Ax\| \geq m\|x\|$, $\forall x \in X$. Dokažite: ako je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ odozdo ograničen i ako je prostor X Banachov, onda je $\operatorname{Im} A$ zatvoren potprostor od Y.

1.4 Upotpunjenje normiranog prostora

Potpuni prostori imaju niz prednosti u odnosu na one koji nisu potpuni. Do sada smo vidjeli samo jednu konkretnu posljedicu potpunosti (apsolutno konvergentni redovi konvergiraju), no pokazat će se da je takvih korisnih posljedica potpunosti zaista mnogo.

Ako prostor nije potpun, intuitivno možemo zamišljati kako je prepun šupljina; na mnogim mjestima gdje bi se trebali nalaziti limesi Cauchyjevih nizova u prostoru jednostavno nedostaju vektori koji bi bili limesi takvih nizova. Zato je prirodno razmišljati o "upotpunjenju" prostora koji nije potpun. Ovako intuitivno shvaćen koncept upotpunjenja ima i svoju preciznu matematičku formulaciju.

Definicija 1.4.1 *Upotpunjenje normiranog prostora X je uređen par (Y, φ) pri čemu je Y Banachov prostor, a $\varphi : X \to Y$ linearna izometrija takva da je $\overline{\operatorname{Im} \varphi} = Y$.*

Primijetimo da je u gornjoj definiciji φ izometrija, što znači da X izometrički izomorfan svojoj slici $\varphi(X) = \operatorname{Im} \varphi$. Ukoliko u duhu napomene 1.3.14 identificiramo X s $\varphi(X)$, onda upotpunjenje prostora X možemo shvaćati kao veći prostor Y koji je potpun i koji sadrži X kao gust potprostor.

Sljedeći teorem nam kaže da postoji upotpunjenje svakog normiranog prostora, te da je ono u suštini jedinstveno.

Teorem 1.4.2 *Neka je X normiran prostor.*

(a) *Postoji upotpunjenje od X.*

(b) *Ako je X unitaran prostor, njegovo upotpunjenje je Hilbertov prostor.*

(c) *Ako su* (Y_1, φ_1) *i* (Y_2, φ_2) *dva upotpunjenja od* X*, onda postoji jedinstven izometrički izomorfizam* $\psi : Y_1 \to Y_2$ *takav da vrijedi* $\psi\varphi_1 = \varphi_2$.

Dokaz: (a) Ovo će biti dokazano kasnije kao posljedica Hahn-Banachovog teorema. Upotpunjenje od X će biti realizirano kao potprostor drugog duala X'' prostora X.

(b) Prema teoremu 1.1.7 treba samo provjeriti da norma na Y zadovoljava jednakost paralelograma. Uzmimo proizvoljne $y, z \in Y$. S obzirom da je $\operatorname{Im}\varphi$ gust skup u Y, možemo prema propoziciji 1.1.22 naći nizove $(y_n)_n$ i $(z_n)_n$ u X takve da je $y = \lim_{n\to\infty}\varphi(y_n)$ i $z = \lim_{n\to\infty}\varphi(z_n)$. Sada za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\|\varphi(y_n) + \varphi(z_n)\|^2 + \|\varphi(y_n) - \varphi(z_n)\|^2 = \|\varphi(y_n + z_n)\|^2 + \|\varphi(y_n - z_n)\|^2 =$$

$$\|y_n + z_n\|^2 + \|y_n - z_n\|^2 = 2\|y_n\|^2 + 2\|z_n\|^2 = 2\|\varphi(y_n)\|^2 + 2\|\varphi(z_n)\|^2.$$

Jer je zbroj (razlika) konvergentnih nizova konvergentan i jer su norma i operacije u polju neprekidne, prelaskom na limes slijedi $\|y + z\|^2 + \|y - z\|^2 = 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2$.

(c) Definirajmo $\psi_0 : \operatorname{Im}\varphi_1 \to \operatorname{Im}\varphi_2$ formulom $\psi_0(\varphi_1(x)) = \varphi_2(x)$. Ovo preslikavanje je dobro definirano jer je φ_1 injekcija. Također, odmah vidimo da je ψ_0 linearno i izometrično, te da vrijedi $\operatorname{Im}\psi_0 = \operatorname{Im}\varphi_2$. Sad prema trećoj tvrdnji teorema 1.3.9 dobivamo ograničen linearan operator $\psi : Y_1 \to Y_2$ koji proširuje ψ_0 te stoga očito zadovoljava traženu jednakost $\psi\varphi_1 = \varphi_2$. Dobiveni operator ψ je izometričan: ako je $y = \lim_{n\to\infty}\varphi_1(x_n)$ onda zbog neprekidnosti normi imamo $\|\psi(y)\| = \lim_{n\to\infty}\|\psi_0(\varphi_1(x_n))\| = \lim_{n\to\infty}\|\varphi_2(x_n)\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|\varphi_1(x_n)\| = \|y\|$. Na kraju, uočimo da je ψ i surjekcija: za $z \in Y_2$ najprije nađimo niz $(\varphi_2(x_n))_n$ u $\operatorname{Im}\varphi_2$ koji konvergira k z; to možemo jer je po pretpostavci potprostor $\operatorname{Im}\varphi_2$ gust u Y_2. Sad je lako vidjeti da je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u X, pa je zato i $(\varphi_1(x_n))_n$ Cauchyjev niz u Y_1. Ako je $y = \lim_{n\to\infty}\varphi_1(x_n))$, po definiciji operatora ψ slijedi $\psi(y) = \lim_{n\to\infty}\psi_0(\varphi_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty}\varphi_2(x_n) = z$. □

Napomena 1.4.3 (a) Uočimo da je po definiciji svaki Banachov prostor sam svoje upotpunjenje; preciznije, ako je X Banachov prostor, njegovo upotpunjenje je par (X, I).

(b) Zadnja tvrdnja prethodnog teorema pokazuje da je upotpunjenje normiranog prostora jedinstveno, do na izometričku izomorfnost. Međutim, uočimo da dva izometrički neizomorfna prostora mogu imati isto upotpunjenje. Tipično, to se događa u sljedećoj situaciji: ako je Y upotpunjenje od X te ako vrijedi $X \leq X_1 \leq Y$, onda je Y ujedno i upotpunjenje od X_1.

Napomena 1.4.4 Uočimo da smo surjektivnost operatora ψ iz dokaza teorema 1.4.2 mogli dokazati direktnim pozivanjem na tvrdnju zadatka 1.3.21.

U nastavku uvodimo važan primjer beskonačnodimenzionalnog Hilbertovog prostora.

Definicija 1.4.5 $\ell^2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$.

U ℓ^2, kao i u drugim prostorima nizova podrazumijevamo definicije zbrajanja i množenja skalarom "po točkama": $(x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$ i $\alpha(x_n)_n = (\alpha x_n)_n$.

Teorem 1.4.6 *ℓ^2 je Hilbertov prostor. Za $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell^2$ skalarni produkt je dan s $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$, pri čemu taj red konvergira i apsolutno (pa je, dakle, norma na ℓ^2 dana s $\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$).*

Dokaz: Očito, $\|x\|_2 \geq 0$ i $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Također, $\|\alpha x\|_2 = |\alpha|\|x\|_2$; posebno, $x \in \ell^2 \Rightarrow \alpha x \in \ell^2$.

Za $x, y \in \ell^2$ i bilo koji $n \in \mathbb{N}$ nejednakost trokuta u $\mathbb{F}^n$ daje $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2} \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$. Kad pustimo $n \to \infty$ vidimo da je $x + y \in \ell^2$ i $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$. Dakle, ℓ^2 je normiran prostor.

Uzmimo opet $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell^2$. Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti u prostoru $\mathbb{F}^n$ na n-torke $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ i $(|\overline{y_1}|, \ldots, |\overline{y_n}|)$ dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k\overline{y_k}| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|\overline{y_k}| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2} \leq \|x\|_2\|y\|_2.$$

Dakle, red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}$ konvergira apsolutno, pa onda i obično. To znači da je dobro definirano $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$. Sad se izravno provjeri da je to zaista skalarni produkt. Jasno je da je $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Dokažimo potpunost. Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u ℓ^2; stavimo $x_n = (x_k^n)_k$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^2 < \epsilon^2. \tag{11}$$

Očito, sada i za svaki pojedini k imamo $|x_k^n - x_k^m|^2 < \epsilon^2$, čim je $m, n \geq n_0$. Dakle, za svaki k, niz $(x_k^n)_n$ je Cauchyjev niz u polju. Stavimo $x_k^0 = \lim_{n\to\infty} x_k^n, \forall k \in \mathbb{N}$, i $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots)$.

Uzmimo $\epsilon > 0$ i nađimo n_0 takav da vrijedi (11). Fiksirajmo $n \geq n_0$. Sada za svaki $K \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} \left|x_k^0 - x_k^n\right|^2 &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{K} |x_k^m - x_k^n|^2 \\
&\leq \limsup_{m} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^m - x_k^n|^2 \\
&= \limsup_{m} \|x_m - x_n\|^2 \leq \epsilon^2.
\end{aligned}$$

To pokazuje da red $\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^0 - x_k^n\right|^2$ konvergira te da je $\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^0 - x_k^n\right|^2 \leq \epsilon^2$, čim je $n \geq n_0$. Drugim riječima, imamo $x_0 - x_n \in \ell^2$, pa onda i $x_0 = (x_0 - x_n) + x_n \in \ell^2$, i pritom je $\|x_0 - x_n\| < \epsilon$, za sve $n \geq n_0$.

Pogledajmo vektore $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (jedinica na n-tom mjestu). Za proizvoljan $x = (x_n)_n \in \ell^2$ imamo $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Zato za zadani $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da $n \geq n_0$ povlači $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 < \epsilon$. Uočimo da je zadnju nejednakost moguće pisati i u obliku

$\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\|_2^2 < \epsilon$. To pokazuje da je $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ u normi prostora ℓ^2. Na kraju primijetimo da je $\langle x, e_n \rangle = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Time smo dokazali da vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \ \forall x \in \ell^2. \tag{12}$$

□

Napomena 1.4.7 Niz $(e_n)_n$ iz zadnjeg dijela prethodnog dokaza se zove standardna ili kanonska ortonormirana baza Hilbertovog prostora ℓ^2. Njegovu ortonormiranost smo već konstatirali, dok pojam (topološke) baze formalno uvodimo u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.4.8 *Niz $(b_n)_n$ u normiranom prostoru X se naziva topološka baza za X ako svaki $x \in X$ postoji jedinstven niz skalara $(\lambda_n)_n$ takav da vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n$ (pri čemu se ovdje podrazumijeva obična konvergencija navedenog reda u normi prostora X).*

Istaknimo još jednom da je spomenuta standardna ortonormirana baza $(e_n)_n$ prostora l^2 zaista topološka u smislu prethodne definicije. Naime, jer su vektori e_n, $n \in \mathbb{N}$, ortonormirani, a skalarni produkt neprekidan u svakoj varijabli, skalarnim množenjem jednakosti $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ s e_n izlazi $\lambda_n = \langle x, e_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}$. S druge strane, jednakost $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$, $\forall x \in \ell^2$, već smo konstatirali na kraju dokaza teorema 1.4.6.

Propozicija 1.4.9 *Svaki normiran prostor X s topološkom bazom $(b_n)_n$ je separabilan.*

Dokaz: Neka je S skup svih konačnih linearnih kombinacija vektora b_n, $n \in \mathbb{N}$, s racionalnim koeficijentima (kao i obično, kompleksan broj smatramo racionalnim ako su mu i realni i imaginarni dio racionalni). Jasno je da je skup S prebrojiv. Uzmimo $x \in X$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k b_k$. Neka je $\epsilon > 0$ zadan. Najprije nađimo $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k\| < \frac{\epsilon}{2}$. Neka je $M = \max\{\|b_j\| : j = 1, \ldots, n\}$. Dalje, za isti ϵ nađimo racionalne brojeve $\rho_1, \ldots, \rho_n$ za koje vrijedi $|\lambda_k - \rho_k| < \frac{\epsilon}{2nM}$, $\forall k = 1, \ldots n$. Sada za $s = \sum_{k=1}^{n} \rho_k b_k \in S$ imamo $\|x - \sum_{k=1}^{n} \rho_k b_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k\| + \|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \rho_k) b_k\| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \rho_k| \, \|b_k\| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{2nM} M = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. □

Korolar 1.4.10 *ℓ^2 je separabilan Hilbertov prostor.*

Na kraju, prisjetimo se prostora c_{00} i uočimo da je c_{00}, kao unitaran prostor uz uobičajeni skalarni produkt, zapravo potprostor od ℓ^2. Jasno je da zapravo vrijedi $c_{00} = \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdje je $(e_n)_n$ standardna ortnormirana baza prostora ℓ^2. Zbog toga je c_{00} gust u ℓ^2. Sad kao direktnu posljedicu prethodnih razmatranja dobivamo sljedeći rezultat.

Korolar 1.4.11 *ℓ^2 je upotpunjenje unitarnog prostora c_{00} s obzirom na $\|\cdot\|_2$.*

Napomena 1.4.12 Iz definicije topološke baze normiranog prostora X odmah je vidljivo da je svaka topološka baza $(b_n)_n$ linearno nezavisan i fundamentalan niz u X. Pritom fundamentalnost znači da niz $(b_n)_n$ razapinje gust potprostor u X, tj. da vrijedi $\overline{\text{span}}\,\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = X$. Međutim, obrat ne vrijedi. Naime, linearno nezavisan fundamentalan niz ne mora biti topološka baza.

Kao primjer jednog takvog niza možemo uzeti niz $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ u *realnom* Banachovom prostoru $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Taj je niz očito linearno nezavisan. Prema Weierstassovom teoremu (`http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Weierstrass_theorem`) za svaku funkciju $f \in C([0,1])$ i svaki $\epsilon > 0$ postoji polinom p takav da je $\|f - p_{|[0,1]}\|_\infty < \epsilon$. Dakle, niz $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ je i fundamentalan u $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Međutim, ne može za svaku funkciju $f \in (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ postojati niz skalara $(\lambda_n)_n$ takav da vrijedi $f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n$. Naime, kako je konvergencija u normi $\|\cdot\|_\infty$ zapravo uniformna konvergencija na $[0,1]$, prikaz $f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n$ implicira da je funkcija f analitička u nekoj okolini točke 0.

Iz propozicije 1.4.9 slijedi da neseparabilan prostor ne može imati topološku bazu. Štoviše, P. Enflo je 1973. godine dokazao da postoje i separabilni (čak) Banachovi prostori bez topoloških baza. Inače, prostor $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ipak nije takav; jednu njegovu topološku bazu čini tzv. Faber-Schauderov sistem (više o ovome se može vidjeti na `http://en.wikipedia.org/wiki/Haar_wavelet`).

Na kraju, spomenimo da za topološku bazu $(b_n)_n$ normiranog prostora X, s obzirom da za svaki vektor $x \in X$ postoji jedinstveni niz skalara $(\lambda_n(x))_n$ sa svojstvom $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) b_n$, možemo za svaki $n \in \mathbb{N}$ promatrati funkcionale $x \mapsto \lambda_n(x)$. Očito su ovi funkcionali linearni. Sad je prirodno pitati jesu li i neprekidni, odnosno ograničeni. Kaže se da je baza $(b_n)_n$ Schauderova ako su svi funkcionali $x \mapsto \lambda_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, ograničeni. Zanimljivo je da su u Banachovim prostorima sve topološke baze Schauderove.

Domaća zadaća 4

Zadatak 1.4.13 Pokažite da je upotpunjenje separabilnog normiranog prostora separabilan prostor.

Zadatak 1.4.14 Pokažite da je unitaran prostor c_{00} separabilan. Uočite da to, uz primjenu tvrdnje prethodnog zadatka i korolara 1.4.11, predstavlja alternativni dokaz separabilnosti prostora ℓ^2.

Zadatak 1.4.15 Neka je $(x_n)_n$ konvergentan niz u ℓ^2; neka je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Stavimo $x_n = (x_k^n)_k$ i $x = (x_k)_k$. Pokažite da je tada $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, konvergencija u l^2 povlači konvergenciju svih komponentnih nizova. Primijetite na primjeru standardne ortonormirane baze $(e_n)_n$ da obrat ove tvrdnje ne vrijedi.

Zadatak 1.4.16 Pokažite da je niz $(e_n)_n$ topološka baza normiranog prostora $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ svih nizova skalara koji konvergiraju u 0. Ovdje je, kao i prije, $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (jedinica na n-tom mjestu).

1.5 Prostori ℓ^p i L^p

ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$, je standardna oznaka za seriju važnih normiranih prostora čiji elementi su nizovi skalara. U svakom od tih vektorskih prostora podrazumijevamo da su operacije zbrajanja i množenja nizova skalarima definirane kao i u ranije uvedenom prostoru ℓ^2, po komponentama.

Definicija 1.5.1 $\ell^1 = \{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$.

Teorem 1.5.2 *ℓ^1 s normom $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ je separabilan Banachov prostor s topološkom bazom $(e_n)_n$, gdje je e_n niz čiji je n-ti član jednak 1, dok su svi ostali članovi jednaki 0.*

Dokaz: Očito je $\|\cdot\|_1$ norma na ℓ^1. Dokaz potpunosti je u biti isti kao za prostor ℓ^2. Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u ℓ^1; stavimo $x_n = (x_k^n)_k$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za zadani $\epsilon > 0$ možemo naći n_0 takav da

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m| < \epsilon. \tag{13}$$

Posebno, za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo $m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_k^n - x_k^m| < \epsilon$; dakle, svaki od nizova $(x_k^n)_n$ je Cauchyjev. Za svaki k stavimo $x_k^0 = \lim_{n\to\infty} x_k^n$ i definirajmo niz $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots)$. Sad se pokaže da je $x_0 \in \ell^1$ te da je $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$; argumentacija je u biti identična onoj koju smo iznijeli za prostor ℓ^2 pa je izostavljamo.

Nadalje, za $x = (x_n)_n \in \ell^1$ i $\epsilon > 0$ možemo naći n_0 takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \epsilon$. To možemo pisati i kao $n \geq n_0 \Rightarrow \|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\|_1 < \epsilon$. Dakle je $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$. Ovaj prikaz je jedinstven. Naime, ako bi bilo $x = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ i $y_{k_0} \neq x_{k_0}$ za barem jedan indeks k_0, imali bismo, za svaki $n \geq k_0$, $\|x - \sum_{k=1}^{n} y_k e_k\|_1 \geq |x_{k_0} - y_{k_0}|$ što je kontradikcija s $x = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$. Dakle, $(e_n)_n$ je topološka baza za ℓ^1. Sad separabilnost slijedi iz propozicije 1.4.9. $\square$

Definicija 1.5.3 $\ell^\infty = \{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : sup\,\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$.

Teorem 1.5.4 *ℓ^∞ s normom $\|x\|_\infty = sup\,\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ je neseparabilan Banachov prostor.*

Dokaz: Da je ℓ^∞ s normom $\|\cdot\|_\infty$ normiran prostor, očito je. Dokažimo potpunost. Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz; stavimo $x_n = (x_k^n)_k$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_\infty = \sup\{|x_k^n - x_k^m| : k \in \mathbb{N}\} < \epsilon.$$

Kao i prije vidimo da su komponentni nizovi konvergentni. Ako od njihovih limesa sastavimo novi niz, pokazat će se i ovdje da je taj niz u ℓ^∞ i da je upravo to limes polaznog niza $(x_n)_n$. Detalje izostavljamo.

Pokažimo neseparabilnost. Za $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$, promotrimo $x_S := \chi_S \in \ell^\infty$. Očito je $\|x_S\|_\infty = 1$. Jednako očito je $\|x_{S_1} - x_{S_2}\|_\infty = 1$ za sve $S_1 \neq S_2$. Zato su kugle $K(x_{S_1}, \frac{1}{2})$ i $K(x_{S_2}, \frac{1}{2})$ disjunktne. Uočimo da ima neprebrojivo mnogo kugli oblika $K(x_S, \frac{1}{2})$, $S \subseteq \mathbb{N}$. Prema lemi 1.1.21 skup koji je gust u (bilo kojem) prostoru mora sjeći svaku otvorenu kuglu. U ovoj situaciji takav skup očito ne može biti prebrojiv. $\square$

Uzmimo sada proizvoljan niz $a = (a_n)_n \in \ell^\infty$. Definirajmo $f_a : \ell^1 \to \mathbb{F}$ formulom $f_a(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k x_k$. Očito, zbog $\sum_{k=1}^\infty |a_k x_k| \leq \|a\|_\infty \|x\|_1$, dobili smo dobro definiran linearan funkcional. Štoviše, $f_a \in (\ell^1)'$ jer $|\sum_{k=1}^\infty a_k x_k| \leq \sum_{k=1}^\infty |a_k x_k| \leq \|a\|_\infty \|x\|_1$, tj. $\|f_a\| \leq \|a\|_\infty$. Dakle, preslikavanje $\varphi : \ell^\infty \to (l^1)'$, $\varphi(a) = f_a$, je dobro definirano. Jasno je da je φ linearan operator, a kako vrijedi $\|\varphi(a)\| = \|f_a\| \leq \|a\|_\infty$, vidimo da je φ i ograničen te da je $\|\varphi\| \leq 1$.

U obratnom smjeru, za $f \in (\ell^1)'$, stavimo $\psi(f) = (f(e_1), f(e_2), \ldots)$ gdje je $(e_n)_n$ standardna topološka baza za ℓ^1. Jer je f ograničen funkcional, imamo $|f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\|_1 = \|f\|$. Dakle, $\psi(f) \in \ell^\infty$ i $\|\psi(f)\|_\infty \leq \|f\|$, pa je i ψ ograničen linearan operator i vrijedi $\|\psi\| \leq 1$.

Uočimo da je $\psi(\varphi(a)) = (a_1, a_2, \ldots) = a$, te da je $\varphi(\psi(f)) = f$. Naime, $(\varphi(\psi(f)))(x) = \sum_{k=1}^\infty f(e_k) x_k = \sum_{k=1}^\infty f(x_k e_k) = f(\sum_{k=1}^\infty x_k e_k) = f(x)$. Posljednje dvije jednakosti slijede iz $x = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k$ (konvergencija u normi) i neprekidnosti od f.

Dakle, φ i ψ su međusobno inverzna preslikavanja. Na kraju, $\|a\|_\infty = \|\psi(\varphi(a))\|_\infty \leq \|\varphi(a)\| \leq \|a\|_\infty$ pokazuje da su i φ i ψ izometrije.

Ovime smo dokazali tvrdnju sljedeće propozicije:

Propozicija 1.5.5 *$(\ell^1)'$ i ℓ^∞ su izometrički izomorfni prostori.*

Napomena 1.5.6 Za $x \in \ell^1$ definirajmo $f_x : \ell^\infty \to \mathbb{F}$ formulom $f_x(a) = \sum_{k=1}^\infty x_k a_k$. Kao i prije vidimo da je ovo dobro definirano, te da vrijedi $f_x \in (\ell^\infty)'$ i $\|f_x\| \leq \|x\|_1$. Zato možemo definirati $\varphi : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ formulom $\varphi(x) = f_x$. Očito, φ je ograničen linearan operator i vrijedi $\|\varphi(x)\| = \|f_x\| \leq \|x\|_1$. Štoviše, φ je izometrija. Naime, za proizvoljan $x = (x_k)_k \in \ell^1$ pogledajmo niz $a = (a_k)_k$ takav da je $|a_k| = 1$ i $x_k a_k = |x_k|$, za svaki k. Očito, $\|a\|_\infty = 1$ i $f_x(a) = \sum_{k=1}^\infty x_k a_k = \sum_{k=1}^\infty |x_k| = \|x\|_1$. Dakle, našli smo $a \in \ell^\infty$ takav da je $\|a\|_\infty = 1$ i $|f_x(a)| = \|x\|_1$, tj. $\|\varphi(x)(a)\| = \|x\|_1$. Zato je $\|\varphi(x)\| = \|x\|_1$. Uz pomoć tvrdnje zadatka 1.3.21 sada zaključujemo da je $\operatorname{Im}\varphi$ zatvoren potprostor od $(\ell^\infty)'$.

Pokazat će se primjenom jedne od posljedica Hahn-Banachovog teorema da ovo preslikavanje φ nije surjekcija. Štoviše, vidjet ćemo da prostori ℓ^1 i $(\ell^\infty)'$ niti ne mogu biti izometrički izomorfni.

Napomena 1.5.7 Dual prostora ℓ^2 je sam ℓ^2, jedino što će u ovoj situaciji naš izometrički izomorfizam biti antilinearan ako je prostor kompleksan. To ćemo pokazati u idućem poglavlju kao opću činjenicu istinitu za sve Hilbertove prostore.

Definicija 1.5.8 *Za $1 \leq p < \infty$ definira se $\ell^p = \{(x_n)_n : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ i, za $x = (x_n)_n \in \ell^p$, $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.*

Napomena 1.5.9 Za sve $1 \leq p < \infty$, ℓ^p je separabilan Banachov prostor. Za sve $1 \leq p < \infty$ i $1 < q \leq \infty$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (kaže se da su ovakvi p i q konjugirani eksponenti) prostor $(\ell^p)'$ je izometrički izomorfan prostoru ℓ^q (vidite [SK]).

Napomena 1.5.10 Neka je (X, M, μ) prostor mjere, te neka je f kompleksna funkcija na X, izmjeriva u odnosu na Borelove skupove (dakle, u $\mathbb{C}$ promatramo σ-algebru generiranu svim otvorenim skupovima). Za $1 \leq p < \infty$ definiramo $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. Poistovjećujući funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0, definiramo $L^p(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ izmjeriva}, \|f\|_p < \infty\}$. Pokazuje se da je $L^p(X)$ s normom $\|\cdot\|_p$ Banachov prostor. Ključnu ulogu pritom igra Hölderova nejednakost $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ koja vrijedi za sve kompleksne izmjerive funkcije i za svaki par konjugiranih eksponenata p, q, $1 < p, q < \infty$.

Nadalje, za izmjerivu funkciju $f : X \to \mathbb{C}$ definiramo esencijalni supremum kao $\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) = 0\}$ (uz dogovor $\inf \emptyset = \infty$). Sad se definira $L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ izmjeriva}, \|f\|_\infty < \infty\}$. Pokazuje se da je i $L^\infty(X)$ s normom $\|\cdot\|_\infty$ Banachov prostor te da za sve kompleksne izmjerive funkcije vrijedi i $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Još primijetimo da vrijedi $\|f_n - f\|_\infty \to \infty$ ako i samo ako postoji izmjeriv skup $E \subseteq X$ takav da $f_n \to f$ uniformno na E te da vrijedi $\mu(X \setminus E) = 0$. Ukoliko je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i ako radimo s Lebesgueovom mjerom $\mu = \lambda$, ze neprekidne funkcije se esencijalni supremum podudara s običnim supremumom i skup svih neprekidnih funkcija sa sup-normom čini zatvoren potprostor od $L^\infty(X)$.

I ovdje se može promatrati preslikavanje $\varphi : L^q(X) \to (L^p(X))'$ definirano formulom $\varphi(g)(f) = \int_X fg d\mu, \forall p, q, 1 \leq p \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. To je dobro definiran izometričan linearan operator (za $p = 1, q = \infty$ treba pretpostaviti da je mjera μ σ-konačna što znači da je X prebrojiva unija izmjerivih skupova konačne mjere).

Za $1 \leq p < \infty$ dobije se i surjektivnost (pri čemu za $p = 1$ i za ovu tvrdnju treba pretpostaviti σ-konačnost mjere).

Dakle, i ovdje vrijedi $(L^p(X))' \cong L^q(X)$ za $1 \leq p < \infty$ pri čemu znak $\cong$ označava da su navedeni prostori izometrički izomorfni.

Napomena 1.5.11 Vidjeli smo da je prostor $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ potpun, dok isti vektorski prostor nije potpun u odnosu na norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$. Analogno bismo mogli promatrati i normu $\|\cdot\|_p$ definiranu formulom $\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$. Međutim, pokazuje se da $C([a, b])$ nije potpun niti za jedan p, $1 \leq p < \infty$.

Može se dokazati da je upotpunjenje od $(C([a, b]), \|\cdot\|_p)$ zapravo $(L^p([a, b]), \|\cdot\|_p)$ uz Lebesgueovu mjeru na $[a, b]$. Uočimo da ova zadnja tvrdnja ne vrijedi za $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ jer taj prostor je već potpun. Opširniju diskusiju o ovome pronađite u [SK].

Domaća zadaća 5

Zadatak 1.5.12 I za $0 < p < 1$ mogli bismo promatrati $\ell^p = \{(x_n)_n : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ i, za $x = (x_n)_n \in l^p$, $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Međutim, niti za jedan p, $0 < p < 1$, preslikavanje $\|\cdot\|_p$ nije norma na ℓ^p jer nije zadovoljena nejednakost trokuta. Provjerite!

Zadatak 1.5.13 Pokažite da vrijedi $c_{00} \subseteq \ell^1 \subseteq \ell^2 \subseteq c_0 \subseteq \ell^\infty$, te da su sve navedene inkluzije striktne.

Zadatak 1.5.14 Pokažite da je c_0 zatvoren potprostor od ℓ^∞ (pa je, dakle, i c_0 Banachov prostor). Sjetimo se (vidite primjer 1.3.8 i zadatak 1.3.17) da je $c_{00} \subset \ell^1 \subset c_0$, te da je s obzirom na normu $\|\cdot\|_\infty$ prostor c_{00} gust u c_0. Sad sve navedeno pokazuje da je s obzirom na promatranu normu prostor c_0 istovremeno upotpunjenje i prostora c_{00} i prostora ℓ^1. Slično, l^2 je zajedničko upotpunjenje prostora c_{00} i ℓ^1 s obzirom na $\|\cdot\|_2$.

Zadatak 1.5.15 Za $x \in \ell^1$ promotrimo preslikavanje $f_x : c_0 \to \mathbb{F}$ definirano formulom $f_x(a) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k$ (uočimo da se ovdje radi o restrikciji preslikavanja f_x definiranog u napomeni 1.5.6 na potprostor c_0 prostora ℓ^∞. Pokažite da je f_x dobro definiran ograničen linearan funkcional na c_0 te da je preslikavanje $x \mapsto f_x$ izometrički izomorfizam prostora ℓ^1 i $(c_0)'$.

Zadatak 1.5.16 Neka je c vektorski prostor svih konvergentnih nizova skalara. Pokažite da je c zatvoren potprostor prostora ℓ^∞ s obzirom na normu $\|\cdot\|_\infty$ (pa je, dakle, i c Banachov prostor s obzirom na navedenu normu).

Zadatak 1.5.17 Linearan funkcional f na c je ograničen ako i samo ako postoje skalar α i niz $x = (x_n)_n \in l^1$ takvi da za sve $y = (y_n)_n \in c$ vrijedi $f(y) = \alpha(\lim_{n\to\infty} y_n) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. *Uputa:* uočite da za stacionaran niz $e = (1, 1, 1, \ldots)$ za sve $y \in c$ vrijedi $y - (\lim_{n\to\infty} y_n)e \in c_0$ pa iskoristite tvrdnju zadatka 1.5.15

Završne napomene i primjeri

Napomena 1.5.18 *(O algebarskim bazama)* Skup S je algebarska ili Hamelova baza vektorskog prostora X ako je linearno nezavisan i ako se svaki $x \in X$ može prikazati kao konačna linearna kombinacija vektora iz skupa S. Pokazuje se da vrijedi (vidite u [BG]):

(a) Prikaz svakog vektora u algebarskoj bazi je jedinstven.

(b) Svaki vektorski prostor ima algebarsku bazu.

(c) Svaki linearno nezavisan skup se može nadopuniti do algebarske baze.

(d) Sve algebarske baze bilo kojeg vektorskog prostora su jednakobrojne te se algebarska dimenzija prostora definira kao taj zajednički kardinalitet svih baza.

(e) Algebarska dimenzija beskonačnodimenzionalnog Banachovog prostora je neprebrojiva.

(f) Algebarska dimenzija separabilnog beskonačnodimenzionalnog Banachovog prostora iznosi c.

Primjer 1.5.19 Uočimo vektore $x_t = (1, t, t^2, t^3, \ldots)$, $t \in (0, 1)$, u separabilnom Hilbertovom prostoru ℓ^2 . Nije teško pokazati da je skup $\{x_t : t \in (0, 1)\}$ linearno nezavisan. (Usporedite tvrdnje napomene 1.5.18 (e), (f).)

Napomena 1.5.20 *(Ograničenost na bazi nije dovoljna.)* Uzmimo kanonsku bazu $(e_n)_n$ u ℓ^2 i nađimo algebarsku bazu koja sadrži sve vektore e_n (v. napomenu 1.5.18 (c)). Neka je f_0 neki element te baze različit od svih e_n. Definirajmo $Af_0 = f_0$ i $Af = 0$ za sve ostale članove baze. Time je, uz proširenje po linearnosti, dobro definiran linearan operator A na l^2 i očito $A \neq 0$. Međutim, A nije ograničen. Kad bi A bio ograničen, bio bi i neprekidan i tada bi zbog $Ae_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, i neprekidnosti operatora A za svaki $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \in \ell^2$ slijedilo $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle Ae_n = 0$. Kontradikcija.

Ovo je, dakle, primjer neograničenog operatora iz kojeg uočavamo: ako imamo linearan operator koji je čak uniformno ograničen na nekoj topološkoj bazi prostora, to još uvijek ne implicira da je taj operator ograničen.

Napomena 1.5.21 *(Normu operatora nije moguće odrediti na bazi.)* Promotrimo opet kanonsku bazu $(e_n)_n$ u ℓ^2 i fiksirajmo prirodan broj n. Neka je $A : \ell^2 \to \ell^2$ preslikavanje definirano s $Ax = \langle x, e_1 + e_2 + \ldots + e_n \rangle e_1$. Očito je A linearan operator, a iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti vidimo i da je ograničen: $\|Ax\|_2 = |\langle x, e_1 + \ldots + e_n \rangle| \leq \sqrt{n}\|x\|_2$. Ovo pokazuje da je $\|A\| \leq \sqrt{n}$. S druge strane, za jedinični vektor $\frac{1}{\sqrt{n}}(e_1 + \ldots + e_n)$ vrijedi $\|A(\frac{1}{\sqrt{n}}(e_1 + \ldots + e_n))\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}\langle e_1 + e_2 + \ldots + e_n, e_1 + e_2 + \ldots + e_n \rangle = \sqrt{n}$. Dakle, $\|A\| = \sqrt{n}$. S druge strane, operator A na bazi $(e_n)_n$ djeluje na sljedeći način: za $j \leq n$ imamo $Ae_j = e_1$, dok je $Ae_j = 0$ za sve $j > n$.

S obzirom da je na početku broj n bio proizvoljno odabran, uočavamo: postoji ograničen operator po volji velike norme koji je na bazi ograničen s 1.

Napomena 1.5.22 *(Linearan operator s dodatnim "dobrim" svojstvom još uvijek ne mora biti ograničen.)* Promotrimo unitaran prostor c_{00} sa standardnim skalarnim produktom (rezultirajuća norma je $\|\cdot\|_2$). Neka je $A : c_{00} \to c_{00}$ definiran formulom $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots)$. Jasno je da je A neograničen jer je $\|Ae_n\|_2 = n$ i $\|e_n\|_2 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Uočimo da A zadovoljava relaciju $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$, $\forall x, y \in c_{00}$.

Ovdje je problem u tome što c_{00} nije potpun, tj. Hilbertov prostor. Kasnije ćemo vidjeti da je linearan operator A na Hilbertovom prostoru H za kojeg postoji linearan operator B definiran na istom prostoru tako da vrijedi $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$, $\forall x, y \in H$, nužno ograničen.

Napomena 1.5.23 *(Ograničen operator čija slika nije zatvorena.)* Neka je $A : \ell^2 \to \ell^2$ definiran s $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots)$. Jasno je da je A dobro definiran, linearan i ograničen. Jer je $c_{00} \subseteq \operatorname{Im} A$, zaključujemo da je $\operatorname{Im} A$ gust potprostor od ℓ^2. Međutim, $\operatorname{Im} A$ nije zatvoren potprostor. Naime, u suprotnom bi onda zbog gustoće vrijedilo $\operatorname{Im} A = \ell^2$, a to nije istina. Npr. dovoljno je uočiti da vrijedi $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) \in l^2 \setminus \operatorname{Im} A$.

1.6 Dodatak: L^2

U napomeni 1.5.10 definirali smo za prostor mjere (X, M, μ) normirane prostore $L^p(X)$ i naveli njihova najvažnija svojstva. Ovdje ćemo dokazati neke od navedenih tvrdnji za prostor $L^2(X)$. Podsjetimo se: $L^2(X) = \{f : X \to \mathbb{F} : f$ izmjeriva, $\int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$ pri čemu zapravo poistovjećujemo funkcije s njihovim klasama ekvivalencije s obzirom na relaciju podudarnosti do na skupove mjere 0. Na $L^2(X)$ imamo definiran skalarni produkt $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g} d\mu$ i iz njega izvedenu normu $\|f\|_2 = \sqrt{\int_X |f|^2 d\mu}$.

Teorem 1.6.1 $L^2(X)$ *je Hilbertov prostor.*

Dokaz: Trebamo dokazati potpunost, a prema teoremu 1.2.10 dovoljno je provjeriti da u $L^2(X)$ svaki apsolutno konvergentan red konvergira. Uzmimo zato da za niz $(f_n)_n$ u $L^2(X)$ vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < \infty$.

Za $n \in \mathbb{N}$ označimo $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ i $g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$. Zbog $f_n \in L^2(X)$ imamo i $|f_n| \in L^2(X)$ pa slijedi $s_n, g_n \in L^2(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Niz $(g_n)_n$ je uzlazan, $g_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa je i niz $(g_n^2)_n$ uzlazan, $g_n^2 \geq 0$, i funkcije g_n^2 su integrabilne, za sve $n \in \mathbb{N}$. Osim toga, vrijedi

$$\sqrt{\int_X g_n^2 d\mu} = \|g_n\|_2 = \|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\|_2 \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_2 < \infty.$$

Jer je $\left(\int_X g_n^2 d\mu\right)_n$ rastući niz, zaključujemo da je konvergentan, tj. da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n^2 d\mu < \infty. \tag{14}$$

Po Levijevu teoremu (vidite [SM2], §3, teorem 13) slijedi da je $\lim_{n\to\infty} g_n^2(x) < \infty$ s.s. Posebno, tada je i $\lim_{n\to\infty} g_n(x) < \infty$ s.s. Dakle, postoji izmjeriva funkcija g za koju je

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \text{ s.s.}$$

Kako je $g^2 = \lim_{n\to\infty} g_n^2$ i vrijedi (14), zaključujemo da je i g^2 integrabilna funkcija. Drugim riječima, $g \in L^2(X)$.

Nadalje, jer $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konvergira skoro svuda, postoji $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ s.s. Funkcija s je izmjeriva i vrijedi $|s| = |\sum_{n=1}^{\infty} f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = g$ s.s. Odavde je $|s|^2 \leq g^2$, a to povlači $s \in L^2(X)$. Time smo pokazali da polazni apsolutno konvergentni red konvergira po točkama (osim možda na skupu mjere 0) k funkciji $s \in L^2(X)$. Dokaz će biti završen ako dokažemo da taj red konvergira k s i u normi, tj. da vrijedi $\|s - s_n\|_2 \to 0$.

Prvo uočimo da je

$$|s - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k| = g - g_n \text{ s.s.}$$

Zato je

$$\|s - s_n\|_2^2 = \int_X |s - s_n|^2 d\mu \leq \int_X (g - g_n)^2 d\mu = \|g - g_n\|_2^2.$$

Jer je $\lim_{n\to\infty}(g - g_n)^2 = 0$ s.s. i jer niz $((g - g_n)^2)_n$ pada, slijedi $\lim_{n\to\infty}\|g - g_n\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \int_X (g - g_n)^2 d\mu = 0$. Zato je i $\lim_{n\to\infty}\|s - s_n\|_2^2 = 0$. $\square$

U narednom teoremu promatrat ćemo segment realnih brojeva $[a, b]$ s Lebesgueovom mjerom.

Teorem 1.6.2 *Skup $C([a,b])$ je gust u $L^2([a,b])$. Posebno, $L^2([a,b])$ je upotpunjenje unitarnog prostora $(C([a,b]), \|\cdot\|_2)$.*

Dokaz: Neka je $A \subseteq [a,b]$ neprazan i zatvoren. Definirajmo preslikavanje $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ formulom $t(x) = d(x, A) = \inf\{|x-y| : y \in A\}$. Lako se vidi da je t neprekidno. Sad za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ s $g_n(x) = \frac{1}{1+nt(x)}$. Jasno je da je i g_n neprekidno, te da vrijedi $g_n(y) = 1$, $\forall y \in A$. Osim toga, jer je $t(x) \neq 0$ za sve $x \in [a,b] \setminus A$, za sve takve x vrijedi $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \chi_A(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Sad po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\|\chi_A - g_n\|_2^2 = \int_a^b (\chi_A(x) - g_n(x))^2 dx \to 0.$$

Dakle, χ_A možemo po volji dobro aproksimirati u $\|\cdot\|_2$ neprekidnom funkcijom. Zato to možemo učiniti i za svaku konačnu linearnu kombinaciju karakterističnih funkcija zatvorenih skupova. U idućem koraku se isti zaključak proširuje na sve jednostavne izmjerive funkcije. Konačno, svaku funkciju iz $L^2([a,b])$ možemo po volji dobro aproksimirati u $\|\cdot\|_2$ jednostavnom izmjerivom funkcijom. Da kompletiramo argument, dovoljno je obrazložiti ovu zadnju tvrdnju za pozitivne funkcije.

Za pozitivnu funkciju $f \in L^2([a,b])$ pronađimo rastući niz jednostavnih izmjerivih funkcija (s_n) takav da je $s_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ i $s_n(x) \to f(x)$ s.s. Kako je $|f - s_n|^2 \leq f^2$, teorem o dominiranoj konvergenciji povlači $\|f - s_n\|_2^2 = \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2 dx \to 0$. $\square$

Tvrdnja prethodnog teorema vrijedi u daleko većoj općenitosti i s jačim zaključkom (u smislu da su vrlo specijalni potprostori neprekidnih funkcija gusti u L^2).

Neka je X proizvoljan interval u skupu $\mathbb{R}$ - konačan ili beskonačan, s uključenim ili isključenim rubovima. Opet ćemo promatrati $L^2(X)$ s Lebesgueovom mjerom. Sa $C_c(X)$ označavamo prostor svih neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ čiji nosač $\operatorname{supp} f$ je kompaktan skup. Pritom se definira

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Jasno je da je $C_c(X)$ potprostor od $L^2(X)$.

Teorem 1.6.3 *$C_c(X)$ je gust u $L^2(X)$.*

Dokaz: Najprije se prisjetimo da Lebesgueova mjera λ ima sljedeća svojstva:

(a) $\lambda(K) < \infty$, za svaki kompaktan skup K;

(b) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subseteq A,\ K \text{ kompaktan}\}$;

(c) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subseteq U,\ U \text{ otvoren}\}$.

Uzmimo proizvoljan izmjeriv $A \subseteq X$ takav da je $\lambda(A) < \infty$. Neka je $\epsilon > 0$. Na temelju navedenih svojstava Lebesgueove mjere nađimo kompaktan K i otvoren U takve da je $K \subseteq A \subseteq U$ i $\lambda(U \setminus K) = \lambda(U) - \lambda(K) < \epsilon$.

Prema Urysohnovoj lemi za lokalno kompaktne Hausdorffove prostore (vidite npr. Theorem 1 na `http://planetmath.org/sites/default/files/texpdf/41281.pdf`) postoji funkcija $f \in C_c(X)$ takva da je $0 \leq f \leq 1$, $f_{|K} = 1$ i $\operatorname{supp} f \subseteq U$. Za tako odabranu funkciju f vrijedi

$$\int_X |\chi_A - f|^2 dx = \int_{U \setminus K} |\chi_A - f|^2 dx < \epsilon.$$

Odmah slijedi da se i proizvoljna jednostavna izmjeriva funkcija na X može aproksimirati po volji dobro u $\| \cdot \|_2$ nekom funkcijom iz $C_c(X)$. Kako takve funkcije čine gust skup u $L^2(X)$ (vidite kraj dokaza prethodnog teorema), slijedi $\overline{C_c(X)} = L^2(X)$. $\square$

Napomena 1.6.4 Teorem 1.6.3 vrijedi i u mnogo općenitijoj situaciji: ako je X proizvoljan lokalno kompaktan topološki prostor, M σ-algebra na X koja sadrži sve kompaktne skupove, a μ mjera koja ima svojstva (a), (b) i (c) iz prethodnog dokaza, tada je $C_c(X)$ gust u $L^2(X)$. Posebno, možemo uzeti $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kao produkt intervala i Lebesgueovu mjeru λ na $\mathbb{R}^n$.

I u ovoj općenitijoj situaciji prethodni dokaz funkcionira bez ikakvih izmjena.

Na kraju, još spomenimo da isti dokaz pokazuje kako je $C_c(X)$ gust u $L^p(X)$ za sve p, $1 \leq p < \infty$.

2 Hilbertovi prostori

2.1 Ortonormirana baza

U dokazu teorema 1.4.6 smo vidjeli da za standardnu bazu $(e_n)_n$ prostora ℓ^2 vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$, $\forall x \in \ell^2$. Kako je niz $(e_n)_n$ ortonormiran, a skalarni produkt neprekidan, to odmah povlači i jednakosti $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$ i $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2$, za sve $x, y \in \ell^2$. U ovoj točki pokazujemo da svaki separabilan unitaran prostor posjeduje ortonormiranu topološku bazu. Običaj je da atribut *topološka* u ovom kontekstu ispušta. Napomenimo odmah da će analogan rezultat za neseparabilne prostore biti dokazan u idućem poglavlju.

Lema 2.1.1 *Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ortonormiran skup u unitarnom prostoru X, te neka je x proizvoljan vektor u X. Tada za vektor $x_0 = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k$ vrijedi $\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 < \|x - y\|^2$, $\forall y \in span\{e_1, e_2, \ldots e_n\}, y \neq x_0$.*

Dokaz: Uzmimo proizvoljan $y \in \text{span}\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ različit od x_0. Stavimo $y = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$. Jer je $y \neq x_0$, za bar jedan indeks k vrijedi $\alpha_k \neq \langle x, e_k\rangle$. Sada imamo

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\rangle =$$

$$\langle x, x\rangle - \sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}\langle x, e_k\rangle - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\langle e_k, x\rangle + \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2 =$$

$$\langle x, x\rangle - \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}\langle x, e_k\rangle - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\langle e_k, x\rangle + \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2 =$$

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle - \alpha_k|^2 > \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2.$$

Ako uzmemo $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$, $\forall k = 1, \ldots, n$ (tj. $y = x_0$), isti račun pokazuje da vrijedi $\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2$. □

Propozicija 2.1.2 *(Besselova nejednakost) Neka je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u unitarnom prostoru X. Tada za sve vektore x iz X vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.*

Dokaz: U prošloj lemi dokazali smo da za sve $x \in X$ i proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $0 \leq \|x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2$. Odavde je $\sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. □

Propozicija 2.1.3 *U separabilnom unitarnom prostoru X svaki ortonormiran skup je konačan ili prebrojiv. Postoji prebrojiv ortonormiran skup E u X takav da je $\overline{span}E = X$.*

Dokaz: Uzmimo ortonormiran skup $\{e_j : j \in J\}$ u X. Kako udaljenost svaka dva člana ovog skupa iznosi točno $\sqrt{2}$, otvorene kugle $K(e_j, \frac{\sqrt{2}}{2})$ su u parovima disjunktne. Uzmimo sad prebrojiv gust skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ u X. Kako taj skup mora sjeći svaku kuglu u X, dobro je definirana funkcija $j \mapsto \min\{n : x_n \in K(e_j, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$. Zbog disjunktnosti kugli $K(e_j, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $j \in J$, ova funkcija je očito injekcija. Jer se skup J može injektivno preslikati u $\mathbb{N}$, nužno je konačan ili prebrojiv.

Uzmimo ponovo niz $(x_n)_n$ koji je gust u X. Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je $x_1 \neq 0$. Sad induktivnim postupkom možemo iz niza $(x_n)_n$ izbaciti sve vektore koji se mogu prikazati kao linearna kombinacija svojih prethodnika; tako dobivamo podniz $(x_{p(n)})_n$ čiji članovi čine linearno nezavisan skup. Očito vrijedi $\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \text{span}\{x_{p(n)} : n \in \mathbb{N}\}$. Gram-Schmidtovim postupkom dobivamo ortonormiran niz $(e_{p(n)})_n$ takav da je $\text{span}\{e_{p(n)} : n \in \mathbb{N}\} = \text{span}\{x_{p(n)} : n \in \mathbb{N}\}$. Zato je $\overline{\text{span}}\{e_{p(n)} : n \in \mathbb{N}\} = \overline{\text{span}}\{x_{p(n)} : n \in \mathbb{N}\} = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \supseteq \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = X$. $\square$

Napomena 2.1.4 Za skup S u normiranom prostoru X koji razapinje gust potprostor u X (dakle, za koji vrijedi $\overline{\text{span}}\, S = X$) kaže se da je fundamentalan u X. Dakle, druga tvrdnja prethodne propozicije kaže da u svakom separabilnom unitarnom prostoru postoji fundamentalan ortonormiran niz.

Definicija 2.1.5 *Ortonormiran niz $(e_n)_n$ u unitarnom prostoru X je ortonormirana baza (ONB) za X ako svaki vektor $x \in X$ dopušta prikaz oblika $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ (obična konvergencija u normi prostora X).*

Napomena 2.1.6 Uočimo da zbog ortonormiranosti niza $(e_n)_n$ i neprekidnosti skalarnog produkta iz $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ odmah slijedi $\langle x, e_n\rangle = \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, prikaz vektora x u ONB $(e_n)_n$ je jedinstven. To pokazuje da je prethodna definicija kompatibilna s definicijom 1.4.8 u normiranom prostoru. U tom širem kontekstu sad možemo reći da je svaka ONB unitarnog prostora ujedno i topološka baza - razlika je ovdje jedino u tome što jedinstvenost prikaza vektora u ONB nije potrebno eksplicitno zahtijevati.

Inače, izraz $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ se zove Fourierov red vektora x, a skalari $\langle x, e_n\rangle$ Fourierovi koeficijenti vektora x s obzirom na ONB $(e_n)_n$.

Teorem 2.1.7 *Neka je X unitaran prostor i $(e_n)_n$ ortonormiran niz u X. Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:*

(a) *$(e_n)_n$ je ONB za X;*

(b) *$(e_n)_n$ je fundamentalan niz u X;*

(c) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$, $\forall x \in X$ *(Parsevalova jednakost);*

(d) $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$, $\forall x, y \in X$.

Dokaz: $(a) \Rightarrow (b)$ Ovo slijedi direktno iz definicija ONB i fundamentalnog skupa (niza).

$(b) \Rightarrow (c)$ Uzmimo $x \in X$ i $\epsilon > 0$. Prema definiciji fundamentalnosti možemo naći $n \in \mathbb{N}$ i $y \in \text{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ tako da vrijedi $\|x - y\| < \epsilon$. Prema lemi 2.1.1 sad imamo

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\| \leq \|x - y\| < \epsilon$$

i zato, prema istoj lemi, i

$$0 \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \epsilon^2.$$

Zbog Besselove nejednakosti (propozicija 2.1.2) $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ ovo je sad dovoljno da se zaključi da vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Opet primijenjujemo lemu 2.1.1. Sad prema pretpostavci (c) za svaki $x \in X$ i $\epsilon > 0$ možemo naći n_0 takav da $n \geq n_0$ povlači $\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \epsilon$.

$(a) \Rightarrow (d)$ Ovo slijedi iz neprekidnosti skalarnog produkta.

$(d) \Rightarrow (c)$ U jednakost (d) samo treba uvrstiti $y = x$. $\square$

Napomena 2.1.8 (a) Uočimo da je konvergencija reda u jednakosti (d) prethodnog teorema apsolutna. Zaista, kombinirana primjena Cauchyjeve nejednakosti u $\mathbb{F}^n$ i Besselove nejednakosti daje, za svaki prirodan broj n,

$$(\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle|)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2)(\sum_{k=1}^{n} |\langle y, e_k \rangle|^2) \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Preostaje izvaditi drugi korijen (koji je rastuća funkcija).

(b) Pretpostavimo da je X unitaran prostor, te da je (H, φ) njegovo upotpunjenje. Sjetimo se da je i prostor H unitaran; dakle, H je Hilbertov prostor. S obzirom da je φ izometrija, originalni prostor X možemo identificirati s $\varphi(X) \leq H$; drugim riječima, možemo uzeti da je $X \leq H$. Kako je prema definiciji upotpunjenja X gust u H, ekvivalencija uvjete (a) i (b) iz prethodnog teorema nam pokazuje: ako je $(e_n)_n$ ONB za X, onda je isti taj niz $(e_n)_n$ ujedno i ONB za H.

Teorem 2.1.9 *Svaki separabilan unitaran prostor ima ONB. Ako je X unitaran, separabilan i beskonačnodimenzionalan, onda je X izometrički izomorfan nekom gustom potprostoru od ℓ^2. Posebno, svaki separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor je izometrički izomorfan s ℓ^2.*

Dokaz: Neka je X unitaran, separabilan i beskonačnodimenzionalan prostor. Prema propoziciji 2.1.3 postoji fundamentalan ortonormiran niz $(e_n)_n$ u X. Prema implikaciji $(b) \Rightarrow (a)$ iz teorema 2.1.7, taj niz je ONB za X.

Nadalje, sada svojstvo (c) iz istog teorema pokazuje da za svaki x iz X niz $(\langle x, e_n \rangle)_n$ leži u ℓ^2. Zato je dobro definiran operator $A : X \to l^2$, $Ax = (\langle x, e_n \rangle)_n$. Očito je A

linearan, a navedeno svojstvo (c) iz teorema 2.1.7 nam kaže da je A izometrija. Konačno, slika operatora A posebno sadrži sve vektore Ae_n, a to su upravo vektori standardne baze u ℓ^2. Zato je ta slika gust potprostor od ℓ^2.

Ako je prostor X i potpun (dakle, Hilbertov), prema tvrdnji zadatka 1.3.21 $\operatorname{Im} A$ je i zatvoren potprostor od ℓ^2. Dakle, u tom slučaju A je i surjekcija. □

Napomena 2.1.10 Primijetimo da operator A iz prethodnog dokaza zadovoljava jednakost $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in X$; to slijedi direktno iz definicije skalarnog produkta u ℓ^2 i svojstva (d) iz teorema 2.1.7. U stvari, polarizacijske formule pokazuju da svaki izometričan linearan operator između unitarnih prostora čuva skalarne produkte. Bijektivan linearan operator između dva unitarna prostora koji ima navedeno svojstvo čuvanja skalarnih produkata zove se *unitaran* operator.

U nastavku se okrećemo separabilnim Hilbertovim prostorima. Najprije dokazujemo jednostavan kriterij konvergencije reda oblika $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ za proizvoljan ortonormiran niz (ne nužno ONB) u Hilbertovom prostoru.

Propozicija 2.1.11 *Neka je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru H, te neka je $(\alpha_n)_n$ niz skalara. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ konvergira u H ako i samo ako je $(\alpha_n)_n \in \ell^2$.*

Dokaz: Označimo sa $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ i $t_n = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$ relevantne parcijalne sume. Sada za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, imamo

$$\|s_m - s_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_k|^2 = |t_m - t_n|.$$

Dakle, niz $(s_n)_n$ je Cauchyjev ako i samo ako je niz $(t_n)_n$ Cauchyjev. Kako su oba prostora potpuna, slijedi da je $(s_n)_n$ konvergentan ako i samo ako je $(t_n)_n$ konvergentan.

Još je korisno uočiti: ako red $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ konvergira, onda je $(\alpha_n)_n \in \ell^2$ jer je ℓ^2 Hilbertov prostor - u dokazu ove implikacije nije nam trebala pretpostavka da je polazni prostor H potpun.

□

Napomena 2.1.12 Pretpostavimo da je $(e_n)_n$ ONB Hilbertovog prostora H. Primijetimo da je prema prethodnoj propoziciji tada za svaki niz $(\alpha_n)_n \in \ell^2$ dobro definiran vektor $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in H$. Međutim, konvergencija ovog reda ne mora biti apsolutna. Jasno je da će taj red konvergirati i apsolutno onda i samo onda kad je $(\alpha_n)_n \in \ell^1$. Preostaje prisjetiti se da je ℓ^1 striktno sadržan u ℓ^2.

Sljedeći teorem dopunjuje opis ortonormiranih baza iz teorema 2.1.7 za Hilbertove prostore (treba uočiti da u pretpostavkama teorema 2.1.7 nismo trebali potpunost).

Teorem 2.1.13 *Neka je H Hilbertov prostor i $(e_n)_n$ ortonormiran niz u H. Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:*

(a) $(e_n)_n$ *je ONB prostora* H*;*

(e) $(e_n)_n$ *je maksimalan niz u* H*, tj. ima svojstvo* $x \perp e_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$*.*

Dokaz: $(a) \Rightarrow (e)$: Pretpostavimo da za $x \in H$ vrijedi $x \perp e_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Kako je $(e_n)_n$ ONB za H, slijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n = 0$. Primijetimo da u dokazu ove implikacije nije korištena potpunost prostora H; dakle, ova implikacija vrijedi i u svakom unitarnom prostoru.

$(e) \Rightarrow (a)$: Za proizvoljan $x \in H$ i $n \in \mathbb{N}$ stavimo $x_n = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k$. Besselova nejednakost $\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2 < \infty$ nam kaže da je pripadajući niz parcijalnih suma Cauchyjev pa sad, za $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, jednakost $\|x_m - x_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m}|\langle x, e_k\rangle|^2$ pokazuje da je i niz $(x_n)_n$ Cauchyjev. (Uočimo da je ovaj dio argumenta identičan onome iz dokaza prethodne propozicije.) Kako je po pretpostavci prostor H potpun, možemo staviti $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$. Zbog neprekidnosti skalarnog produkta vrijedi $\langle x_0, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle, \forall n \in \mathbb{N}$. Slijedi $\langle x - x_0, e_n\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Prema pretpostavci sada je $x = x_0$ pa možemo pisati $x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$. Dakle, $(e_n)_n$ je ONB za H. □

Primjer 2.1.14 U kompleksnom Hilbertovom prostoru $L^2([-\pi, \pi])$ svih kvadratno integrabilnih kompleksnih funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$ promotrimo niz $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definiran s $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$. Pokazuje se da je ovo ONB prostora $L^2([-\pi, \pi])$. Primijetimo da su ovdje Fourierovi koeficijenti bilo koje funkcije $f \in L^2([-\pi, \pi])$ oblika $\langle f, e_n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}dt$. Kao što je to slučaj sa svakom ONB u bilo kojem unitarnom prostoru, imamo za svaku funkciju $f \in L^2([-\pi, \pi])$ Fourierov red $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, e_n\rangle e_n$.

Napomenimo da se ovdje radi o konvergenciji u normi prostora $L^2([-\pi, \pi])$ i da ta konvergencija *ne* povlači konvergenciju po točkama.

Još primijetimo da se suma gornjeg reda indeksiranog po skupu $\mathbb{Z}$ interpretira kao limes niza parcijalnih suma oblika $s_n = \sum_{k=-n}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k$. U idućem poglavlju ćemo otkloniti moguću zabrinutost u pogledu korektnosti ovakvog grupiranja članova u tvorbi parcijalnih suma.

Kako se dokazuje da je niz $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ zaista ONB prostora $L^2([-\pi, \pi])$?

Prije svega, odmah je jasno da je taj niz ortonormiran. Sad je prema teoremu 2.1.7(b) dovoljno ustanoviti da je taj niz i fundamentalan, tj. da je potprostor $\mathrm{span}\{\mathrm{e}^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ gust u $L^2([-\pi, \pi])$. Uzmimo proizvoljnu funkciju $f \in L^2([-\pi, \pi])$ i $\epsilon > 0$. Trebamo naći element $T \in \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ za koji vrijedi $\|f - T\|_2 < \epsilon$. To ćemo učiniti u tri koraka.

Najprije, prema teoremu 1.6.2 potprostor $C([-\pi, \pi])$ je gust u $L^2([-\pi, \pi])$. Zato postoji neprekidna funkcija $g \in C([-\pi, \pi])$ za koju vrijedi $\|f - g\|_2 < \frac{\epsilon}{3}$.

Nadalje, za funkciju g možemo naći također neprekidnu funkciju $g_p \in C([-\pi, \pi])$ takvu da je $g_p(-\pi) = g(\pi)$ i $\|g - g_p\|_2 < \frac{\epsilon}{3}$ (vidite zadatak 2.1.21).

Konačno, preostaje primijeniti Stone-Weierstassov teorem na algebru kompleksnih neprekidnih periodičnih funkcija s periodom 2π i skup svih trigonometrijskih polinoma (to su funkcije iz $\mathrm{span}\{\mathrm{e}^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ oblika $T(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\mathrm{e}^{ikt}$): za našu funkciju g_p postoji trigonometrijski polinom T takav da vrijedi $\|g_p - T\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\epsilon}{3}$. Posebno, zato je $\|g_p - T\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|g_p - T\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$. Za tako odabrani trigonometrijski polinom T vrijedi $\|f - T\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - g_p\|_2 + \|g_p - T\|_2 < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$.

Primjer 2.1.15 U realnom Hilbertovom prostoru $L^2([-\pi,\pi])$ svih kvadratno integrabilnih realnih funkcija na segmentu $[-\pi,\pi]$ ONB čini niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ čiji članovi su, redom, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \ldots$ Dakle, za $n\in\mathbb{N}$ imamo $e_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt$ i $e_{2n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$.

U ovoj bazi svakoj funkciji $f\in L^2([-\pi,\pi])$ pripada Fourierov red oblika

$$f=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

koji u $\|\cdot\|_2$ konvergira k f pri čemu su koeficijenti c_0, a_n i b_n dani formulama

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt,\ n\in\mathbb{N}.$$

Da bismo dokazali da je navedeni niz zaista ONB za $L^2([-\pi,\pi])$ prvo primijetimo da je taj niz ortonormiran - to se vidi direktnom provjerom. Dalje možemo nastaviti točno kao u prethodnom primjeru. Jedina razlika je u tome što ćemo ovdje Stone-Weierstrassov teorem primijeniti na realne neprekidne 2π-periodične funkcije i realne trigonometrijske polinome (to su funkcije oblika $T(t)=c_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$, $c_0,a_k,b_k\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$).

Alternativno, može se primijeniti teorem 2.1.13 i to tako da se provjeri maksimalnost niza $(e_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ u prostoru $L^2([-\pi,\pi])$. Dokaz maksimalnosti može se naći, na primjer, na `http://warwickmaths.org/files/fourier.pdf` (Theorem 4.1).

Primjer 2.1.16 Naravno, postoje i mnoge druge baze i realnog i kompleksnog prostora L^2. Na primjer, u realnom prostoru $L^2([-1,1])$ možemo promatrati linearno nezavisan skup $\{1,t,t^2,t^3,\ldots\}$. Neka skup $\{p_0,p_1,p_2,p_3,\ldots\}$ nastaje iz njega Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije. Tako dobiveni polinomi se nazivaju Legendreovi polinomi. Iz Stone-Weierstrassovog teorema slijedi da je $\operatorname{span}\{1,t,t^2,t^3,\ldots\}$ gust u $L^2([-1,1])$. Kako je $\operatorname{span}\{p_0,p_1,p_2,p_3,\ldots\}=\operatorname{span}\{1,t,t^2,t^3,\ldots\}$, zaključujemo da je niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ONB prostora $L^2([-1,1])$. Računom izlazi da su polinomi p_n, do na normirajući faktor $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$, dani s

$$p_0(t)=1,\ p_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Domaća zadaća 6

Zadatak 2.1.17 Neka je $(y_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H takav da se svaki vektor $x\in H$ može prikazati kao linearna kombinacija konačno mnogo članova tog niza. Pokažite da je tada $\dim H<\infty$. Uputa: pokažite da se smije pretpostaviti da je niz $(y_n)_n$ linearno nezavisan, ortonormirajte i iskoristite tvrdnju propozicije 2.1.11.

Zadatak 2.1.18 Neka je $U\in(H,K)$ unitaran operator Hilbertovih prostora H i K, te neka je $(e_n)_n$ ONB za H. Dokažite da je tada $(Ue_n)_n$ ONB prostora K.

Zadatak 2.1.19 Pokažite da operator jednostranog pomaka (unilateralan šift) $S \in \mathbb{B}(\ell^2)$ definiran formulom $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ nije unitaran, iako je izometričan i, posljedično, zbog polarizacijske formule, zadovoljava jednakost $\langle Sx, Sy\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in \ell^2$. Uočite da se u definiciji unitarnog operatora (iskazanoj u napomeni 2.1.10) izrijekom traži bijektivnost. Kad je linearan operator izometričan, automatski je injektivan, no, kako ovaj primjer pokazuje, ne nužno i surjektivan.

Zadatak 2.1.20 Neka je $(e_n)_n$ standardna baza prostora ℓ^2 i $e_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$. Promotrimo potprostor $X = \text{span}\{e_0, e_2, e_3, \ldots\}$ i uočimo da X nije potpun. Pokažite da je niz $(e_k)_{k\geq 2}$ maksimalan u X, ali nije ONB za X. Primijetimo da ovaj primjer pokazuje kako je pretpostavka o potpunosti prostora bila zaista nužna za dokaz ekvivalencije $(c) \Rightarrow (a)$ u teoremu 2.1.13.

Zadatak 2.1.21 Neka je $g \in C([-\pi, \pi])$ i $\epsilon > 0$. Pokažite da postoji funkcija $g_p \in C([-\pi, \pi])$ (realna ili kompleksna u ovisnosti o tome je li g realna ili kompleksna) za koju vrijedi $g_p(-\pi) = g_p(\pi)$ i $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - g_p(t)|^2 dt < \epsilon$. Uputa: funkciju g_p odaberite tako da se podudara s g na $[-\pi, \pi - \delta]$, da bude neprekidna, te da vrijedi $g_p(\pi) = g(-\pi)$. Broj $\delta > 0$ odaberite prikladno.

Zadatak 2.1.22 Pokažite da je $U : L^2([-\pi, \pi]) \to L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ definiran s $Uf(t) = \sqrt{2\pi} f(2\pi t)$, unitaran operator. Ispišite eksplicitno ONB prostora $L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ koje dobivamo djelovanjem operatora U na ONB opisane u primjerima 2.1.14 i 2.1.15.

2.2 Ortogonalna projekcija

Prema lemi 2.1.1, za svaki vektor unitarnog prostora postoji najbolja aproksimacija vektorima iz n-dimenzionalnog potprostora. Taj rezultat ćemo sad poopćiti. Razmotrit ćemo pitanje najbolje aproksimacije danog vektora vektorima iz nekog skupa, ne nužno potprostora. Rezultat koji slijedi formuliran je za konveksne skupove S $(x, y \in S, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in S)$, premda će nam trebati samo da skup zajedno sa svake dvije svoje točke sadrži i središte segmenta koji ih povezuje $(x, y \in S \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in S)$. S druge strane, pojačat ćemo pretpostavku na prostor: ovdje ćemo zahtijevati potpunost.

Teorem 2.2.1 *Neka je H Hilbertov prostor i $S \subseteq H$ neprazan, zatvoren i konveksan skup. Za svaki x iz H postoji jedinstven $x_0 \in S$ takav da vrijedi $\|x - x_0\| = inf\{\|x - y\| : y \in S\}$ (drugim riječima, $\|x - x_0\| < \|x - y\|$, $\forall y \in S, y \neq x_0$).*

Dokaz: Za $x \in S$ tvrdnja teorema je trivijalna; tada je $x_0 = x$.

Za $x \notin S$ stavimo $d = \inf\{\|x - y\| : y \in S\}$. Zbog zatvorenosti skupa S svakako je $d > 0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ nađimo $x_n \in S$ sa svojstvom $\|x - x_n\| \leq d + \frac{1}{n}$. Tvrdimo da je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz.

Najprije, relacija paralelograma daje

$$\|(x-x_m)+(x-x_n)\|^2+\|(x-x_m)-(x-x_n)\|^2=2\|x-x_m\|^2+2\|x-x_n\|^2,$$

odakle nakon dijeljenja s 4 dobivamo

$$\|x-\frac{1}{2}(x_n+x_m)\|^2+\frac{1}{4}\|x_n-x_m\|^2=\frac{1}{2}\|x-x_m\|^2+\frac{1}{2}\|x-x_n\|^2.$$

Jer je $\frac{1}{2}(x_n+x_m)\in S$, imamo $d\leq\|x-\frac{1}{2}(x_n+x_m)\|$. Zato je

$$d^2+\frac{1}{4}\|x_n-x_m\|^2\leq\frac{1}{2}\left(d+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{2}\left(d+\frac{1}{m}\right)^2,$$

odnosno

$$\|x_n-x_m\|^2\leq 2\left(2\frac{d}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+2\left(2\frac{d}{m}+\frac{1}{m^2}\right).$$

Zbog potpunosti prostora sada niz $(x_n)_n$ konvergira. Neka je $x_0=\lim_{n\to\infty}x_n\in H$. Zbog zatvorenosti skupa S mora biti $x\in S$. Prelaskom na limes u relaciji $\|x-x_n\|\leq d+\frac{1}{n}$ dobivamo $\|x-x_0\|\leq d$. Po definiciji infimuma sad zaključujemo $\|x-x_0\|=d$.

Da dokažemo jedinstvenost uzmimo da i za vektor $v\in S$ vrijedi $\|x-v\|=d$. Tada je

$$\|(x-x_0)+(x-v)\|^2+\|(x-x_0)-(x-v)\|^2=2\|x-x_0\|^2+2\|x-v\|^2=4d^2,$$

to jest,

$$4d^2+\|x_0-v\|^2\leq 4\|x-\frac{1}{2}(x_0+v)\|^2+\|x_0-v\|^2=4d^2$$

odakle slijedi $\|x_0-v\|^2=0$. □

Za dokaz teorema o projekciji treba nam još i sljedeći tehnički rezultat:

Lema 2.2.2 *Neka su b,v vektori u unitarnom prostoru X. Tada je $b\perp v$ ako i samo ako vrijedi $\|b\|\leq\|b+\lambda v\|$, $\forall\lambda\in\mathbb{F}$.*

Dokaz: Ako je $b\perp v$ onda za sve λ imamo $\|b+\lambda v\|^2=\|b\|^2+|\lambda|^2\,\|v\|^2\geq\|b\|^2$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $\|b\|\leq\|b+\lambda v\|$, $\forall\lambda\in\mathbb{F}$. Tada je i

$$\|b\|^2\leq\|b-\lambda v\|^2=\langle b-\lambda v,b-\lambda v\rangle=\|b\|^2-\lambda\langle v,b\rangle-\overline{\lambda}\langle b,v\rangle+|\lambda|^2\,\|v\|^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{F}.$$

Neka je $v\neq 0$ (u protivnom se nema što dokazivati). Ako uvrstimo $\lambda=\frac{\langle b,v\rangle}{\|v\|^2}$ slijedi

$$\|b\|^2\leq\|b\|^2-\frac{|\langle b,v\rangle|^2}{\|v\|^2}-\frac{|\langle b,v\rangle|^2}{\|v\|^2}+\frac{|\langle b,v\rangle|^2}{\|v\|^2}=\|b\|^2-\frac{|\langle b,v\rangle|^2}{\|v\|^2}.$$

Odavde je $\langle b,v\rangle=0$. □

Definicija 2.2.3 *Neka je X unitaran prostor i $S\subseteq X$, $S\neq\emptyset$. Ortogonal skupa S se definira kao $S^\perp=\{x\in X:\langle x,s\rangle=0,\ \forall s\in S\}$.*

Teorem 2.2.4 *(Rieszov o teorem projekciji) Neka je H Hilbertov prostor i $M \leq H$ zatvoren potprostor. Svaki vektor $x \in H$ dopušta jedinstven prikaz u obliku $x = a + b$ pri čemu je $a \in M$ i $b \in M^\perp$. Ako je $M \neq \{0\}$, preslikavanje $P : H \to H$ definirano s $Px = a$ je ograničen linearan operator za kojeg vrijedi $P^2 = P$ i $\|P\| = 1$ (dok za $M = \{0\}$ očito imamo $P = 0$).*

Dokaz: Neka je $M \neq \{0\}$ i $x \in H$. Prema teoremu 2.2.1 postoji najbolja aproksimacija $a \in M$ vektora x vektorima iz potprostora M. Dokazat ćemo da je $b := x - a \in M^\perp$.

Za $\lambda \in \mathbb{F}$ i $v \in M$ imamo $a - \lambda v \in M$ pa je $\|b\| = \|x - a\| \leq \|x - (a - \lambda v)\| = \|b + \lambda v\|$. Prema lemi 2.2.2 sada je $b \perp v$.

Dokažimo jedinstvenost navedenog rastava. Pretpostavimo da vrijedi $x = a + b$ i $x = a_1 + b_1$ za $a, a_1 \in M$ i $b, b_1 \in M^\perp$. Tada je $a - a_1 = b - b_1$ odakle zaključujemo da je $a - a_1 \in M$ i istovremeno $a - a_1 \in M^\perp$. Naime, kako je $b, b_1 \in M^\perp$, slijedi $b - b_1 \in M^\perp$ jer $M^\perp$ je očito potprostor (v. zadatak 2.2.18). Odavde je $a = a_1$, a onda i $b = b_1$.

Zbog upravo dokazane jedinstvenosti prikaza svih vektora $x \in H$ u traženom obliku, operator P je dobro definiran i linearan. Očito je također da je $Pa = a$ za sve vektore $a \in M$ odakle je jasno da vrijedi $P^2 = P$. To, zajedno s $\|Px\|^2 = \|a\|^2 \leq \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|a + b\|^2 = \|x\|^2$, pokazuje i da je $\|P\| = 1$. □

Definicija 2.2.5 *Zadržimo oznake iz prethodnog teorema. Vektor $Px = a$ se naziva ortogonalna projekcija vektora x na potprostor M. Operator P se zove ortogonalni projektor na M.*

Napomena 2.2.6 U svjetlu tvrdnje prethodnog teorema pišemo $H = M \oplus M^\perp$. Uočimo (v. zadatak 2.2.18) da su potprostori M i $M^\perp$ jedan drugome direktni komplementi. S obzirom na specifičan geometrijski položaj ta dva potprostora kaže se da je $M^\perp$ ortogonalni komplemet od M (i obratno, jer očito vrijedi $(M^\perp)^\perp = M$).

Inače, napomenimo da u normiranom prostoru X zatvoren potprostor M ne mora nužno imati direktan komplement, tj. općenito ne mora postojati zatvoren potprostor L od X takav da vrijedi $M \cap L = \{0\}$ i $M \dot{+} L = X$.

Već ranije smo uočili da je na svakom unitarnom prostoru lako pronaći ograničene linearne funkcionale. Ako je X unitaran prostor i $a \in X$, onda je formulom $f_a(x) = \langle x, y \rangle$ zadan ograničen linearan funkcional na X. Lako je provjeriti da vrijedi $\|f_a\| = \|a\|$. U sljedećem teoremu dokazujemo da su na Hilbertovom prostoru svi ograničeni funkcionali upravo tog oblika.

Teorem 2.2.7 *Neka je H Hilbertov prostor i $f \in H'$. Tada postoji jedinstven vektor $a \in H$ takav da vrijedi $f(x) = \langle x, a \rangle, \forall x \in H$, to jest, $f = f_a$.*

Dokaz: Za $f = 0$ očito treba uzeti $a = 0$. Ako $f \neq 0$, onda je $\operatorname{Ker} f$ pravi zatvoren potprostor od H pa je prema prethodnom teoremu potprostor $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ različit od $\{0\}$. Neka je $v \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$, $\|v\| = 1$.

Stavimo $a = \overline{f(v)}v$. Neka je $x \in H$ proizvoljan vektor. Uočimo da je $f(x - \frac{f(x)}{f(v)}v) = 0$. Zato je $\langle x - \frac{f(x)}{f(v)}v, v \rangle = 0$, tj. $\langle x, v \rangle = \frac{f(x)}{f(v)}\langle v, v \rangle = \frac{f(x)}{f(v)}$. Konačno, sada je $f(x) = f(v)\langle x, v \rangle = \langle x, \overline{f(v)}v \rangle = \langle x, a \rangle$.

Ako bismo imali $f(x) = \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle$, $\forall x \in H$, slijedilo bi $\langle x, a - b\rangle = 0$, $\forall x \in H$, što očito povlači $a - b = 0$. $\square$

Napomena 2.2.8 Prethodni teorem za separabilne Hilbertove prostore mogli smo dokazati i koordinatno, kopirajući dokaz za konačnodimenzionalne prostore.

Uzmimo proizvoljan $f \in H'$ i odaberimo neku ONB $(e_n)_n$ za H. Sad tvrdimo da niz $(\overline{f(e_n)})_n$ leži u prostoru ℓ^2. Da to provjerimo, uvedimo za $n \in \mathbb{N}$ vektor $v_n = \sum_{k=1}^n \overline{f(e_k)} e_k$. Sada je $f(v_n) = \sum_{k=1}^n |f(e_k)|^2$, a odavde imamo $\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^2 = |f(v_n)| \le \|f\|\|v_n\| = \|f\|(\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^2)^{\frac{1}{2}}$. Dakle je $(\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^2)^{\frac{1}{2}} \le \|f\|$, odnosno $\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^2 \le \|f\|^2$.

Ovime smo utvrdili da je $(\overline{f(e_n)})_n \in l^2$, a sad nam propozicija 2.1.11 jamči da je dobro definiran vektor $a = \sum_{k=1}^\infty \overline{f(e_k)} e_k$.

Konačno, uzmimo proizvoljan $x = \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k$. Zbog neprekidnosti funkcionala f i neprekidnosti skalarnog produkta u drugom argumentu imamo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle f(e_k) = \langle x, \sum_{k=1}^{\infty} \overline{f(e_k)} e_k\rangle = \langle x, a\rangle.$$

Uočimo da je druga jednakost u ovom nizu opravdana postojanjem vektora $\sum_{k=1}^\infty \overline{f(e_k)} e_k$.

Korolar 2.2.9 *Neka je H Hilbertov prostor. Preslikavanje $\varphi : H \to H'$ definirano s $\varphi(a) = f_a$ je antilinearan izometrički izomorfizam.*

Dokaz: Sve osim antilinearnosti je već dokazano. Uzmimo $a, b \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, te proizvoljan $x \in H$. Sada je $(\varphi(\alpha a + \beta b))(x) = f_{\alpha a + \beta b}(x) = \langle x, \alpha a + \beta b\rangle = \overline{\alpha}\langle x, a\rangle + \overline{\beta}\langle x, b\rangle = \overline{\alpha} f_a(x) + \overline{\beta} f_b(x) = (\overline{\alpha} f_a + \overline{\beta} f_b)(x) = (\overline{\alpha}\varphi(a) + \overline{\beta}\varphi(b))(x)$. $\square$

Na kraju ove točke uvodimo pojam hermitski adjungiranog operatora. Najprije nam treba lema koja je i sama za sebe korisna.

Lema 2.2.10 *Neka su X i Y unitarni prostori i $A : X \to Y$ linearan operator. Tada je A ograničen ako i samo ako je $M := sup\{|\langle Ax, y\rangle| : x \in X, y \in Y, \|x\|, \|y\| \le 1\} < \infty$. U tom je slučaju $\|A\| = M$.*

Dokaz: Neka je A ograničen. Zbog $|\langle Ax, y\rangle| \le \|Ax\|\|y\|$ očito vrijedi $M \le \|A\| < \infty$.

Neka je sada $M < \infty$. Uzmimo $x \in X$ takav da je $\|x\| \le 1$ i $Ax \ne 0$. Za vektor $y_0 = \frac{1}{\|Ax\|} Ax$ imamo $\|y_0\| = 1$ i $|\langle Ax, y_0\rangle| = \|Ax\|$. To pokazuje da vrijedi

$$\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| \le 1\} \subseteq \{|\langle Ax, y\rangle| : x \in X, y \in Y, \|x\|, \|y\| \le 1\}$$

Zato za supremume ova dva skupa vrijedi $\|A\| \le M < \infty$. $\square$

Teorem 2.2.11 *Neka su H, K Hilbertovi prostori i $A \in \mathbb{B}(H, K)$. Tada postoji jedinstven operator $A^* \in \mathbb{B}(K, H)$ sa svojstvom $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$, $\forall x \in H, \forall y \in K$. Pritom za sve skalare α_1, α_2 i sve operatore $A, A_1, A_2 \in \mathbb{B}(H, K)$ vrijedi $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^* = \overline{\alpha_1} A_1^* + \overline{\alpha_2} A_2^*$, $(A^*)^* = A$, $\|A^*\| = \|A\|$ i $\|A^* A\| = \|A\|^2$. Osim toga, ako se operatori A i B mogu komponirati, vrijedi i $(AB)^* = B^* A^*$.*

Dokaz: Fiksirajmo $y \in K$. Tada je preslikavanje $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ jedan linearan funkcional na H. Zbog Cauchyjeve nejednakosti i ograničenosti operatora A, taj funkcional je očito ograničen. Zato prema teoremu 2.2.7 postoji jedinstveno određen vektor u H - smisleno ga je označiti s $A^*(y)$ - za koji vrijedi $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$, $\forall x \in H$. Očito je da ovo možemo načiniti za svaki vektor $y \in K$. Tako smo, zbog jedinstvenosti vektora $A^*(y)$ koji zadovoljava prethodnu jednakost, dobro definirali preslikavanje $y \mapsto A^*(y)$ prostora K u prostor H. Sad se jednostavnim računom pokaže da je ovako definirano preslikavanje A^* linearno; dokaz je identičan onome iz linearne algebre. Najprije za proizvoljne $x \in H$, $y_1, y_2 \in K$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ imamo

$$\langle x, A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\rangle = \langle Ax, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \overline{\lambda_1}\langle Ax, y_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle Ax, y_2\rangle =$$
$$\overline{\lambda_1}\langle x, A^* y_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle x, A^* y_2\rangle = \langle x, \lambda_1 A^* y_1 + \lambda_2 A^* y_2\rangle.$$

Drugačije zapisano, dokazali smo da vrijedi

$$\langle x, A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^* y_1 - \lambda_2 A^* y_2\rangle = 0.$$

To znači da je vektor $A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^* y_1 - \lambda_2 A^* y_2 \in H$ okomit na sve $x \in H$. Zato je $A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^* y_1 - \lambda_2 A^* y_2 = 0$.

Dakle, imamo linearan operator $A^* : K \to H$ koji zadovoljava jednakost iz teksta teorema.

Pokažimo da je A^* ograničen. Prema prethodnoj lemi imamo $\|A^*\| = \sup\{|\langle A^* y, x\rangle| : \|x\|, \|y\| \le 1\} = \sup\{|\langle x, A^* y\rangle| : \|x\|, \|y\| \le 1\} = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : \|x\|, \|y\| \le 1\} = \|A\| < \infty$. Primijetimo da smo zadnju jednakost ponovo dobili iz prethodne leme, ovaj put primijenjene na operator A.

Operator A^* s traženim svojstvom je zaista jedinstven. Naime, kad bismo imali dva operatora, nazovimo ih B i C, koji zadovoljavaju $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ i $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Cy\rangle$, $\forall x \in H, \forall y \in K$, onda bi za svaki pojedini vektor $y \in K$ vrijedilo $\langle x, By - Cy\rangle = 0$, $\forall x \in H$, pa posebno i $\langle By - Cy, By - Cy\rangle = 0$; dakle $By - Cy = 0$.

Promotrimo sada operator A^*. Znamo da i za njega mora postojati operator $(A^*)^*$ sa svojstvom $\langle A^* y, x\rangle = \langle y, (A^*)^* x\rangle$, $\forall y \in K, \forall x \in H$. No prema prvom dijelu dokaza također znamo da vrijedi $\langle A^* y, x\rangle = \overline{\langle x, A^* y\rangle} = \overline{\langle Ax, y\rangle} = \langle y, Ax\rangle$, $\forall y \in K, \forall x \in H$. Dakle, operator A igra ulogu operatora $(A^*)^*$. Zbog jedinstvenosti hermitski adjungiranog operatora sada možemo zaključiti da je $(A^*)^* = A$.

Potpuno analogno se dokazuje i jednakost $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^* = \overline{\alpha_1} A_1^* + \overline{\alpha_2} A_2^*$; opet je poanta u jedinstvenosti operatora A^*.

Iz prethodne leme i jednakosti $(A^*)^* = A$ imamo $\|A^* A\| = \sup\{|\langle A^* Ax, y\rangle| : x, y \in H, \|x\|, \|y\| \le 1\} \ge \sup\{|\langle A^* Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| \le 1\} = \sup\{|\langle Ax, Ax\rangle| : x \in H, \|x\| \le 1\} = \sup\{\|Ax\|^2 : x \in H, \|x\| \le 1\} = \|A\|^2$. S druge strane, jer je operatorska norma submultiplikativna i jer znamo da je $\|A^*\| = \|A\|$, imamo $\|A^* A\| \le \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$.

Dokaz posljednje tvrdnje opet izlazi direktno iz jedinstvenosti operatora A^*. □

Definicija 2.2.12 *Kaže se da je operator A^* iz prethodnog teorema hermitski adjungiran operatoru A. Za operator $A \in \mathbb{B}(H, K)$ kažemo da je:*
- unitaran, ako je $A^* A = I_H$ i $AA^* = I_K$;
- hermitski, ako je $H = K$ i $A^* = A$;
- normalan, ako je $H = K$ i $A^* A = AA^*$.

Primijetimo da je unitaran operator A surjektivna izometrija (a takav je onda i A^*). Dakle, unitarni operatori su stvarni izomorfizmi Hilbertovih prostora. S druge strane, sada također možemo uočiti da je operator $A \in \mathbb{B}(H, K)$ izometrija ako i samo ako vrijedi $A^*A = I$.

Propozicija 2.2.13 *Neka su H, K Hilbertovi prostori i $A \in \mathbb{B}(H, K)$. Tada je $Ker\,A = (\overline{Im\,A^*})^\perp$, $Ker\,A^* = (\overline{Im\,A})^\perp$, $\overline{Im\,A} = (Ker\,A^*)^\perp$ i $\overline{Im\,A^*} = (Ker\,A)^\perp$.*

Dokaz: $x \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow \langle Ax, y\rangle = 0, \forall y \in K \Leftrightarrow \langle x, A^*y\rangle = 0, \forall y \in K \Leftrightarrow x \perp \operatorname{Im} A^*$. Time smo dokazali $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$. Međutim, za svaki potprostor M vrijedi $M^\perp = (\overline{M})^\perp$ (v. zadatak 2.2.19). Time je prva jednakost dokazana. Druga jednakost je time također dokazana ako operator A zamijenimo operatorom A^*. Ostale dvije jednakosti slijede iz prve dvije i pravila $(M^\perp)^\perp = M$ koje vrijedi za svaki zatvoren potprostor M (v. zadatak 2.2.20). □

Sljedeća propozicija daje vrlo korisnu formulu za normu hermitskih operatora, u duhu tvrdnje leme 2.2.10. Štoviše, formula je točna i za operatore koji imaju svojstvo samoadjungiranosti, a djeluju na unitarnim prostorima koji nisu nužno potpuni.

Propozicija 2.2.14 *Za svaki operator $A \in \mathbb{B}(X)$ na unitarnom prostoru X koji ima svojstvo $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ za sve x, y iz X vrijedi $\|A\| = sup\,\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$.*

Dokaz: Označimo supremum iz teksta propozicije sa $s(A)$. Očito je $s(A) \leq \|A\|$. Da dokažemo obratnu nejednakost najprije uočimo da vrijedi

$$|\langle Av, v\rangle| \leq s(A)\, \|v\|^2,\ \forall v \in X. \tag{1}$$

Nadalje, za sve $x, y \in X$ imamo

$$\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle = 4\mathrm{Re}\,\langle Ax, y\rangle.$$

Odavde za $x, y \in X$ takve da je $\|x\| \leq 1$ i $\|y\| \leq 1$ uz pomoć relacije paralelograma dobivamo

$$4|\mathrm{Re}\,\langle Ax, y\rangle| = |\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle| \leq |\langle A(x+y), x+y\rangle| + |\langle A(x-y), x-y\rangle| \overset{(1)}{\leq}$$

$$s(A)\|x+y\|^2 + s(A)\|x-y\|^2 = 2s(A)(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq 4s(A)$$

iz čega slijedi $|\mathrm{Re}\,\langle Ax, y\rangle| \leq s(A)$. Uzmimo sad broj φ takav da vrijedi $\langle Ax, y\rangle = \mathrm{e}^{i\varphi}|\langle Ax, y\rangle|$. Tada je $|\langle Ax, y\rangle| = \langle A(\mathrm{e}^{-i\varphi}x), y\rangle = |\mathrm{Re}\,\langle A(\mathrm{e}^{-i\varphi}x), y\rangle| \leq s(A)$. Uzimanjem supremuma po $\|x\|, \|y\| \leq 1$ uz pomoć leme 2.2.10 sad slijedi $\|A\| \leq s(A)$. □

Napomena 2.2.15 Korisno je razmisliti o dokazu prethodne propozicije u slučaju kad je prostor konačnodimenzionalan. Najprije, jasno je da za svaki operator A, ne nužno hermitski, vrijedi $\sup\,\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \leq \|A\|$, neovisno o dimenziji prostora.

Sad uzmimo da je $\dim H = n < \infty$, te da je $A \in \mathbb{B}(H)$ hermitski operator. Tada postoji ONB $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora H u kojoj se A dijagonalizira. Dakle, vrijedi $Ae_i =$

$\lambda_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$ za neke realne (!) brojeve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Neka je $M = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$. Pokazat ćemo da vrijedi $\|A\| \leq M \leq \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$.

Prije svega, druga nejednakost odmah slijedi iz $|\langle Ae_i, e_i\rangle| = |\lambda_i|$, $i = 1, \ldots, n$. S druge strane, za svaki $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$ imamo

$$\|Ax\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i\rangle e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \, |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq M^2 \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2 = M^2 \|x\|^2.$$

iz čega slijedi $\|A\| \leq M$.

Na kraju, primijetimo da smo dokazali kako zapravo vrijedi i $\|A\| = M$.

Primjer 2.2.16 Ako su M i L zatvoreni potprostori Hilbertovog prostora i ako vrijedi $M \perp L$ nije teško pokazati da je $M + L$ zatvoren potprostor. (Provjerite! Uočite da se ovdje ne pretpostavlja da je $L = M^\perp$, nego da je $L \subseteq M^\perp$.)

Međutim, općenito, suma dva zatvorena potprostora Hilbertovog prostora ne mora biti zatvoren potprostor. Da to pokažemo, promotrimo Hilbertov prostor H i produktni prostor $H \oplus H$. (Općenito, kad imamo dva unitarna prostora X i Y i kad promatramo produktni prostor $X \times Y$ sa skalarnim produktom $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle$ običaj je koristiti oznaku $X \oplus Y$. To je zato što ovdje možemo prostore X i Y identificirati s $X \times \{0\}$, odnosno $\{0\} \times Y$, a tada je očito $X \perp Y$.)

Neka je sada $A \in \mathbb{B}(H)$ proizvoljan ograničen operator. Promotrimo u prostoru $H \oplus H$ potprostore $M = \{(x, 0) : x \in H\}$ i $G = \{(x, Ax) : x \in H\}$. Jasno je da je M zatvoren. Pokažimo da je zatvoren i G. U tu svrhu pretpostavimo da za $(x, y) \in H \oplus H$ vijedi $(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, Ax_n)$ gdje je $((x_n, Ax_n))_n$ proizvoljan konvergentan niz u G. Prema tvrdnji zadatka 1.1.32 sada je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ i $y = \lim_{n\to\infty} Ax_n$. Iz $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ i neprekidnosti operatora A slijedi $Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n$. Zbog jedinstvenosti limesa sad imamo $y = Ax$, tj $(x, y) \in G$.

Sad tvrdimo da vrijedi $M + G = H \oplus \operatorname{Im} A$. Naime, očito je da je $(x, 0) + (v, Av) = (x + v, Av) \in H \oplus \operatorname{Im} A$. Obratno za proizvoljan vektor $(x, Av) \in H \oplus \operatorname{Im} A$ imamo $(x, Av) = (x - v, 0) + (v, Av) \in M + G$.

Razmotrimo sada pitanje zatvorenosti potprostora $M + G$. Neka niz $((x_n, Ay_n))_n$ u $M + G$ konvergira k vektoru (u, v). Tada je $u = \lim_{n\to\infty} x_n$ i $v = \lim_{n\to\infty} Ay_n$. Zanima nas je li vektor (u, v) u $M + G = H \oplus \operatorname{Im} A$. Neupitno je da vrijedi $u \in H$. Međutim, ne mora nužno biti $v \in \operatorname{Im} A$; to možemo zaključiti tek ako znamo da je $\operatorname{Im} A$ zatvoren potprostor od H. Kako slika ograničenog operatora ne mora biti zatvorena, vidimo da svaki takav operator ovom konstrukcijom dovodi do primjera dva zatvorena potprostora čija suma nije zatvorena.

U svjetlu činjenice da suma dva zatvorena potprostora ne mora biti zatvorena korisno je zabilježiti sljedeći rezultat.

Propozicija 2.2.17 *Neka su M i N zatvoreni potprostori Hilbertovog prostora H te neka je $\dim M < \infty$. Tada je i potprostor $M + N$ zatvoren.*

Dokaz: Dokažimo prvu tvrdnju uz pretpostavku da je $\dim M = 1$; neka je $M = \operatorname{span}\{b\}$. Tada je $M + N = \{\alpha b + x : \alpha \in \mathbb{F}, x \in N\}$. Ako je $b \in N$ nema se što dokazivati.

Uzmimo zato da vrijedi $b \notin N$. Neka je b_0 ortogonalna projekcija vektora b na potprostor N. Primijetimo da je tada $b - b_0 \perp N$. Sada za proizvoljan $x \in N$ imamo $\|\alpha b + x\|^2 = \|\alpha(b - b_0) + (\alpha b_0 + x)\|^2 = |\alpha|^2\|b - b_0\|^2 + \|\alpha b_0 + x\|^2 \geq |\alpha|^2\|b - b_0\|^2$. Time smo pokazali da vrijedi

$$|\alpha| \leq \frac{\|\alpha b + x\|}{\|b - b_0\|}. \tag{2}$$

Odavde imamo i

$$\|x\| = \|\alpha b + x - \alpha b\| \leq \|\alpha b + x\| + \frac{\|\alpha b + x\|}{\|b - b_0\|}\|b\|. \tag{3}$$

Uzmimo sad da niz $(\alpha_n b + x_n)_n$ konvergira k, recimo, $v \in H$. Posebno je $(\alpha_n b + x_n)_n$ Cauchyjev niz. Nejednakosti (2) i (3) sad pokazuju da su i $(\alpha_n)_n$ i $(x_n)_n$ Cauchyjevi nizovi. Ako im limese označimo s α i x, onda je $v = \alpha b + x$. Kako je N zatvoren, znamo da je $x \in N$ pa je zato $v = \alpha b + x \in M + N$.

Ako je $\dim M > 1$ nastavimo induktivno. Za ilustraciju koraka indukcije dovoljno je primijetiti ako vrijedi $M = \text{span}\{b_1, b_2\}$ da je tada $M + N = \text{span}\{b_2\} + (\{\text{span}\{b_1\} + N)$.
$\square$

Domaća zadaća 7

Zadatak 2.2.18 Neka je X unitaran prostor i $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$. Pokažite da je skup $S^\perp = \{x \in X : \langle x, a\rangle = 0, \forall a \in S\}$ uvijek zatvoren potprostor od X te da vrijedi ili $\cap S^\perp = \emptyset$ ili $S \cap S^\perp = \{0\}$.

Zadatak 2.2.19 Neka je M potprostor unitarnog prostora X. Dokažite da je tada $(\overline{M})^\perp = M^\perp$.

Zadatak 2.2.20 Neka je M zatvoren potprostor Hilbertovog prostora H. Dokažite da je tada $(M^\perp)^\perp = M$.

Zadatak 2.2.21 Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$ koji je zatvoren i koji sadrži polovište $\frac{1}{2}(x + y)$ za svake dvije točke x, y iz S. Dokažite da je tada S konveksan. Pokažite i da bez pretpostavke o zatvorenosti sadržavanje polovišta svih vlastitih točaka ne implicira konveksnost.

Zadatak 2.2.22 Neka je H Hilbertov prostor i $P \in \mathbb{B}(H)$. Dokažite: P je ortogonalan projektor na neki zatvoren potprostor M od H ako i samo ako vrijedi $P^2 = P = P^*$.

Zadatak 2.2.23 Ako je $(e_n)_n$ ONB separabilnog Hilbertovog prostora H onda za svaki operator $A \in (H)$ možemo promatrati beskonačnu matricu (α_{ij}) čiji koeficijenti su definirani standardno: $\alpha_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle$. Obrat je netrivijalan: ako je dana beskonačna matrica nije a priori jasno da postoji ograničen operator čiji bi to bio matrični zapis u danoj ONB.

Neka je $(e_n)_n$ ONB separabilnog Hilbertovog prostora H. Pretpostavimo da za skalare $\alpha_{ij} \geq 0, p_i > 0$, $i, j \in \mathbb{N}$, postoje brojevi $r, s > 0$ takvi da vrijedi $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} p_j \leq r p_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$ i $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij} p_i \leq s p_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Tada postoji operator $A \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $\|A\|^2 \leq rs$ kojem u ONB $(e_n)_n$ pripada matrični zapis (α_{ij}).

Zadatak 2.2.24 Neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ONB separabilnog Hilbertovog prostora H. Pokažite da postoji operator $A \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $\|A\| \leq \pi$ kojem u ONB $(e_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ pripada matrični zapis (α_{ij}) pri čemu je $\alpha_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$ za sve $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ (*Uputa:* prethodni zadatak s $p_i = \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}}$, $p_j = \frac{1}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}$, $r = s = \pi$.)

3 Sumabilnost i konvergencija redova

3.1 Sumabilne familije u normiranim prostorima

Ako je X normiran prostor i (x_j), $j \in J$, familija vektora u X, željeli bismo dati značenje izrazu $\sum_{j\in J} x_j$ i kad indeksni skup J nije nužno prebrojiv. Za to je najprije potrebno uvesti pojam hiperniza i konvergencije hiperniza. Općenito, pokazuje se da u topološkim razmatranjima nizovi nisu dovoljni da se opišu temeljni pojmovi poput zatvarača skupa i neprekidnosti funkcije. Zadovoljavajući rezultati, analogni onima za normirane prostore, dobivaju se tek pomoću hipernizova. Nizovi su dostatni samo ako topološki prostori koje promatramo zadovoljavaju tzv. prvi aksiom prebrojivosti (spomenimo u prolazu da normirani prostori spadaju u tu klasu). Detaljnije ćemo se ovim pitanjem baviti u proučavanju slabih topologija. U ovom poglavlju ograničit ćemo se samo na osnovna svojstva hipernizova.

Definicija 3.1.1 *Usmjeren skup je uređen par $(A, \leq)$ koji se sastoji iz nepraznog skupa A i binarne relacije $\leq$ definirane na A za koju vrijedi:*

(i) $\alpha \leq \alpha, \forall \alpha \in A$;

(ii) $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$;

(iii) *Za sve $\alpha, \beta \in A$ postoji $\gamma \in A$ sa svojstvom $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$.*

Primjer 3.1.2 **(a)** Skup $\mathbb{N}$ sa svojim prirodnim uređajem je usmjeren skup.

(b) Neka je S neprazan skup. Partitivni skup $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ je usmjeren relacijom $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(c) Neka je X normiran prostor, $x \in X$, i $\mathcal{O}(x)$ skup svih otvorenih okolina točke x (dakle, svih otvorenih skupova u X koji sadrže točku x). Skup $\mathcal{O}(x)$ je usmjeren relacijom $A \leq B \Leftrightarrow A \supseteq B$. Nije greška to što je inkluzija navedena u "pogrešnom" smjeru; pokazat će se da je ovo zapravo jedan od važnijih primjera usmjerenog skupa.

Uočimo da u definiciji relacije usmjerenja nismo zahtijevali antisimetričnost. Iako u najvažnijim primjerima relacija usmjerenja ima i to dodatno svojstvo, ono nije nužno: postoje usmjereni skupovi $(A, \leq)$ u kojima je moguće da za elemente a i b vrijedi $a \leq b$ i $b \leq a$, a pritom je $a \neq b$ (vidite zadatak 3.1.14).

Definicija 3.1.3 *Neka je $(A, \leq)$ usmjeren skup. Svako preslikavanje $x : A \to X$ se naziva hiperniz u X. Običaj je, kao i kod nizova, da umjesto $x(\alpha)$ pišemo x_α i da hiperniz označavamo s $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Ako je X normiran prostor kažemo da hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u X konvergira ako postoji $x_0 \in X$ takav da*

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha \Rightarrow \|x_0 - x_\alpha\| < \epsilon.$$

U tom slučaju pišemo $x_0 = lim_{\alpha\in A} x_\alpha$.

Hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u normiranom prostoru X je Cauchyjev ako vrijedi

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| < \epsilon.$$

Napomena 3.1.4 **(a)** Kako je skup prirodnih brojeva sa svojim prirodnim uređajem primjer usmjerenog skupa, očito je da pojam hiperniza poopćuje pojam niza. U tom smislu su i gornje definicije konvergentnog i Cauchyjevog hperniza direktne generalizacije odgovarajućih pojmova za nizove.

(b) Analogno se definira pojam konvergentnog hiperniza u topološkim prostorima (čime ćemo se baviti kasnije). U ovom poglavlju ograničavamo se na razmatranje hipernizova u normiranim prostorima.

(c) Hiperniz u normiranom prostoru može imati samo jedan limes. Da to pokažemo, pretpostavimo da je $x_1 = \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$, $x_2 = \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$ i $x_1 \neq x_2$. Neka je $\epsilon = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$. Sad možemo naći $\alpha_1 \in A$ tako da $\alpha_1 \leq \alpha \Rightarrow \|x_1 - x_\alpha\| < \epsilon$, također i $\alpha_2 \in A$ tako da $\alpha_2 \leq \alpha \Rightarrow \|x_2 - x_\alpha\| < \epsilon$. Za $\alpha \in A$ takav da je $\alpha_1 \leq \alpha$ i $\alpha_2 \leq \alpha$ (takav α postoji zbog svojstva (iii) iz definicije 3.1.1) imamo $\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x_2\| < \epsilon + \epsilon = \|x_1 - x_2\|$, što je kontradikcija.

(d) Ako u normiranom prostoru vrijedi $x = \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$ i $y = \lim_{\alpha\in A} y_\alpha$ onda za svaki izbor skalara λ i μ vrijedi $\lambda x + \mu y = \lim_{\alpha\in A}(\lambda x_\alpha + \mu y_\alpha)$. Provjerite!

(e) Svaki konvergentan hiperniz u normiranom prostoru je Cauchyjev. Provjerite!

(f) Neka su X i Y normirani prostori i $f : X \to Y$. Funkcija f je neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u X koji konvergira k x_0 vrijedi $f(x_0) = \lim_{\alpha\in A} f(x_\alpha)$.

Da to dokažemo, pretpostavimo najprije da je f neprekidna u x_0 i uzmimo da vrijedi $x_0 = \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$. Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $\delta > 0$ takav da $\|x - x_0\| < \delta$ povlači $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$. Sad nađimo $\alpha_0 \in A$ sa svojstvom $\alpha_0 \leq \alpha \Rightarrow \|x_\alpha - x_0\| < \delta$. Očito za sve takve indekse α sad vrijedi i $\|f(x_\alpha) - f(x_0)\| < \epsilon$.

Obrat slijedi iz (a) i analogne tvrdnje za nizove navedene u napomeni 1.1.19 (f).

(g) Uočimo da konvergentan hiperniz, za razliku od konvergentnog niza, ne mora biti ograničen. Zaista, promotrimo skup $\mathbb{Z}$ usmjeren prirodnim uređajem i definirajmo hiperniz $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ s $x_n = |n|$ za $n \leq 0$ i $x_n = 0$ za $n > 0$. Očito, taj hiperniz konvergira u 0, a nije ograničen.

Međutim, svaki konvergentan hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u normiranom prostoru je eventualno ograničen, tj. vrijedi: $\exists M > 0$ i $\exists \alpha_0 \in A$ tako da $\alpha_0 \leq \alpha \Rightarrow \|x_\alpha\| \leq M$. U stvari, ako je $x = \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$, može se uzeti $M = \|x\| + \epsilon$, za bilo koji $\epsilon > 0$.

Propozicija 3.1.5 *U Banachovom prostoru svaki Cauchyjev hiperniz konvergira.*

Dokaz: Uzmimo Cauchyjev hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u Banachovom prostoru X. Za $k \in \mathbb{N}$ nađimo $\alpha_k \in A$ sa svojstvom $\alpha_k \leq \alpha, \alpha' \Rightarrow \|x_\alpha - x_{\alpha'}\| < \frac{1}{k}$.

Koristeći svojstvo (iii) iz definicije 3.1.1 induktivno možemo konstruirati niz $(\beta_k)_k$ u A takav da je $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 \geq \beta_1, \alpha_2$, ... , $\beta_k \geq \beta_{k-1}, \alpha_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Uočimo da smo tako zbog tranzitivnosti relacije usmjerenja postigli da vrijedi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \leq \beta_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Promotrimo niz $(x_k)_k$, gdje je $x_k = x_{\beta_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Za $\epsilon > 0$ najprije nađimo k_0 takav da je $\frac{1}{k_0} < \epsilon$. Sada za sve k, k' takve da je $k_0 \leq k, k'$ imamo $\alpha_{k_0} \leq \beta_k, \beta_{k'}$ i zato je

$\|x_{\beta_k} - x_{\beta_{k'}}\| < \frac{1}{k_0} < \epsilon$, to jest $\|x_k - x_{k'}\| < \epsilon$. Dakle, niz $(x_k)_k$ je Cauchyjev pa ima limes $x \in X$. Pokazat ćemo da za taj x vrijedi i $x = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha$.

Opet uzmimo $\epsilon > 0$ i sada nađimo k_0 takav da vrijedi $\frac{1}{k_0} < \frac{\epsilon}{2}$. Neka je k_1 odabran tako da je $k_0 < k_1$ i da $k_1 \leq k$ povlači $\|x - x_k\| < \frac{\epsilon}{2}$. Tvrdimo da je upravo β_{k_1} onaj kritični indeks koji pripada odabranom broju ϵ. Zaista, ako je $\beta_{k_1} \leq \alpha$ tada imamo

$$\|x_\alpha - x\| \leq \|x_\alpha - x_{\beta_{k_1}}\| + \|x_{\beta_{k_1}} - x\| = \|x_\alpha - x_{\beta_{k_1}}\| + \|x_{k_1} - x\| < \frac{1}{k_1} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(Za ocjenu izraza $\|x_\alpha - x_{\beta_{k_1}}\|$ bilo je potrebno uočiti da vrijedi $\alpha \geq \beta_{k_1} \geq \alpha_{k_1}$.) □

Sad se okrećemo uvođenju i razmatranju pojma sume familije vektora indeksirane po proizvoljnom beskonačnom indeksnom skupu J. U razmatranjima koja slijede, za svaku danu familiju vektora x_j, $j \in J$, u normiranom prostoru X promatrat ćemo familiju $\mathcal{F}$ svih konačnih podskupova od J usmjerenu inkluzijom: za $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ pisat ćemo $F_1 \leq F_2$ ako vrijedi $F_1 \subseteq F_2$. Za tako usmjeren skup $(\mathcal{F}, \leq)$ prirodno je sada gledati hiperniz $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$, gdje je $s_F = \sum_{j \in F} x_j$.

Definicija 3.1.6 *Neka je dana funkcija $x : J \to X$ pri čemu je J proizvoljan beskonačan skup, a X normiran prostor. Kažemo da je familija $\{x(j) = x_j : j \in J\}$ sumabilna te da je njezina suma vektor $x_0 \in X$ ako je x_0 limes hiperniza $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$. U tom slučaju pišemo $x_0 = \sum_{j \in J} x_j$.*

I u ovom kontekstu, kao i kod razmatranja konvergencije redova, standardno ćemo pisati x_j umjesto $x(j)$. Ako je J prebrojiv skup, očito se odmah nameće pitanje usporedbe uvedenog pojma sumabilnosti s konceptom konvergencije redova. O tome ćemo provesti detaljnu diskusiju u idućoj točki. Najprije su na redu opći uvodni rezultati, a prije svega Cauchyjev kriterij sumabilnosti u *Banachovim* prostorima.

Propozicija 3.1.7 *Neka je X Banachov prostor. Familija $\{x_j : j \in J\}$ u X je sumabilna ako i samo ako zadovoljava sljedeći Cauchyjev kriterij:*

$$\forall \epsilon > 0\, \exists G(\epsilon) \in \mathcal{F} \text{ tako da } F \in \mathcal{F}, F \subseteq J \setminus G(\epsilon) \Rightarrow \|\sum_{j \in F} x_j\| < \epsilon. \qquad (1)$$

Dokaz: Neka je familija $\{x_j : j \in J\}$ sumabilna. To znači da hiperniz $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$ konvergira k nekom vektoru $x_0 \in X$. Za $\epsilon > 0$ zato možemo naći $F_0 \in \mathcal{F}$ tako da $F_0 \leq F \Rightarrow \|x_0 - \sum_{j \in F} x_j\| < \frac{\epsilon}{2}$. Sad tvrdimo da je gornji uvjet (1) ispunjen s $G(\epsilon) = F_0$. Zaista, neka je $F \in \mathcal{F}$ disjunktan s F_0. Tada je $\| \sum_{j \in F} x_j\| = \| \sum_{j \in F \cup F_0} x_j - x_0 + x_0 - \sum_{j \in F_0} x_j\| \leq \| \sum_{j \in F \cup F_0} x_j - x_0\| + \|x_0 - \sum_{j \in F_0} x_j\| < \epsilon$. Istaknimo da u dokazu ovog smjera nismo koristili potpunost ambijentnog prostora.

Obratno, neka vrijedi (1). Za $\epsilon > 0$ nađimo $G(\frac{\epsilon}{2})$. Sada za sve $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ takve da vrijedi $G(\frac{\epsilon}{2}) \leq F_1, F_2$ imamo $\| \sum_{j \in F_1} x_j - \sum_{j \in F_2} x_j\| \leq \| \sum_{j \in F_1 \setminus G(\frac{\epsilon}{2})} x_j\| + \| \sum_{j \in F_2 \setminus G(\frac{\epsilon}{2})} x_j\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Dakle, $(x_F)_{F \in \mathcal{F}}$ je Cauchyjev hiperniz u X. Jer je X po pretpostavci Banachov, prema propoziciji 3.1.5 taj hiperniz i konvergira u X. □

Definicija 3.1.8 *Kažemo da funkcija $x : J \to X$ s vrijednostima u normiranom prostoru X iščezava u beskonačnosti ako je za svaki $\epsilon > 0$ skup $\{j \in J : \|x_j\| \geq \epsilon\}$ konačan.*

Napomena 3.1.9 Ako $x : J \to X$ iščezava u beskonačnosti, skup $\{j \in J : x_j \neq 0\}$ je najviše prebrojiv. Naime, uočimo da je $\{j \in J : x_j \neq 0\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{j \in J : \|x_j\| \geq \frac{1}{n}\}$. To pokazuje da je $\{j \in J : x_j \neq 0\}$ prebrojiva unija konačnih skupova.

Propozicija 3.1.10 *Neka je X normiran prostor i $x : J \to X$. Ako je familija $\{x_j : j \in J\}$ sumabilna onda x iščezava u beskonačnosti.*

Dokaz: Uzmimo $\epsilon > 0$ i skup $G(\epsilon)$ iz uvjeta (1). (Potrebno je prisjetiti se da u dokazu nužnosti uvjeta (1) u propoziciji 3.1.7 nismo koristili potpunost.) Neka je $j \in J$ takav da vrijedi $\|x_j\| \geq \epsilon$. Stavimo $F = \{j\}$. Skup F je konačan i *ne* zadovoljava uvjet $\|\sum_{k\in F} x_k\| < \epsilon$. Zbog uvjeta (1) to znači da F nije disjunktan s $G(\epsilon)$. Drugim riječima, $j \in G(\epsilon)$. Dakle, vrijedi $\{j \in J : \|x_j\| \geq \epsilon\} \subseteq G(\epsilon)$ i zato je skup $\{j \in J : \|x_j\| \geq \epsilon\}$ konačan. □

Propozicija 3.1.11 *Neka je X Banachov prostor i $x : J \to X$. Ako je familija $\{\|x_j\| : j \in J\}$ sumabilna u $\mathbb{R}$, onda je sumabilna i familija $\{x_j : j \in J\}$ u X i tada vrijedi $\|\sum_{j\in J} x_j\| \leq \sum_{j\in J} \|x_j\|$.*

Dokaz: Uzmimo $\epsilon > 0$ i skup $G(\epsilon)$ za koji vrijedi $\sum_{j\in F} \|x_j\| < \epsilon$, $\forall F \in \mathcal{F}, F \subseteq J \setminus G(\epsilon)$. Posebno, za svaki takav skup F vrijedi i $\|\sum_{j\in F} x_j\| \leq \sum_{j\in F} \|x_j\| < \epsilon$ pa je prema propoziciji 3.1.7 familija $\{x_j : j \in J\}$ sumabilna u X. Stavimo $x_0 = \sum_{j\in J} x_j = \lim_{F\in\mathcal{F}} s_F$. Jer je norma neprekidna funkcija, prema napomeni 3.1.4 (f) imamo $\|x_0\| = \lim_{F\in\mathcal{F}}\|s_F\| = \lim_{F\in\mathcal{F}}\|\sum_{j\in F} x_j\| \leq \lim_{F\in\mathcal{F}} \sum_{j\in F} \|x_j\| = \sum_{j\in J} \|x_j\|$. □

U svakom Banachovom prostoru svaki apsolutno konvergentan red konvergira i obično. Obratna tvrdnje ne vrijedi čak niti u polju: obična konvergencija reda općenito ne povlači apsolutnu.

Prethodna propozicija kaže da je analogna situacija i s konceptom sumabilnosti: apsolutna sumabilnost u Banachovom prostoru povlači običnu sumabilnost. Međutim, iznenađujuće, pokazuje se da kod sumabilnosti u polju vrijedi i obrat. Važno je odmah napomenuti da takva, obratna tvrdnja za sumabilne familije ne vrijedi općenito u Banachovim prostorima. U idućoj točki ćemo vidjeti primjer sumabilne familije u Banachovom prostoru koja nije i apsolutno sumabilna.

Za potrebe dokaza ekvivalencije sumabilnosti i apsolutne sumabilnosti familija skalara uvodimo sljedeću notaciju.

Pretpostavimo da je za funkciju $x : J \to X$ familija $\{x_j : j \in J\}$ sumabilna. Prema propoziciji 3.1.10 i napomeni 3.1.9 smijemo pretpostaviti da je skup J prebrojiv. Ako je sad $(F_n)_n$ niz konačnih podskupova od J takav da vrijedi $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \ldots$ i $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = J$ pisat ćemo $F_n \nearrow J$. Uočimo da u ovoj situaciji možemo promatrati i niz $(s_{F_n})_n$, gdje je $s_{F_n} = \sum_{j\in F_n} x_j$.

Lema 3.1.12 *Neka je J prebrojiv skup, X normiran prostor i $x : J \to X$. Tada je familija $\{x_j : j \in J\}$ sumabilna i vrijedi $x_0 = \sum_{j\in J} x_j$ ako i samo ako je $x_0 = lim_{n\to\infty} s_{F_n}$ za svaki niz $(F_n)_n$ u $\mathcal{F}$ sa svojstvom $F_n \nearrow J$.*

Dokaz: Uzmimo prvo da vrijedi $x_0 = \sum_{j\in J} x_j$ i odaberimo proizvoljan niz $(F_n)_n$ u $\mathcal{F}$ takav da je $F_n \nearrow J$. Zadajmo $\epsilon > 0$ i nađimo $F_0 \in \mathcal{F}$ za koji vrijedi

$$F \in \mathcal{F},\, F_0 \le F \Rightarrow \|x_0 - \sum_{j\in F} x_j\| < \epsilon. \tag{2}$$

Odaberimo proizvoljan element $j \in F_0$. Zbog $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = J$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $j \in F_n$. Neka je $n(j)$ najmanji prirodan broj za koji vrijedi $j \in F_{n(j)}$. Jer je F_0 konačan skup, možemo pisati $F_0 = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$. Pogledamo brojeve $n(j_1), n(j_2), \dots, n(j_k)$ i stavimo $n_0 = \max\{n(j_1), n(j_2), \dots, n(j_k)\}$. Jer je niz $(F_n)_n$ rastuć, skup F_{n_0} sadrži sve skupove $F_{n(j_i)}$, $i = 1, \dots, k$, te zato sadrži i skup F_0. Sada za $n_0 \le n$ imamo $F_{n_0} \subseteq F_n$, odakle je i $F_0 \subseteq F_n$ pa (2) pokazuje da vrijedi $\|x_0 - \sum_{j\in F_n} x_j\| < \epsilon$, tj. $\|x - s_{F_n}\| < \epsilon$. Dakle, niz $(s_{F_n})_n$ konvergira prema x_0.

Obratno, pretpostavimo sada da vrijedi $x_0 = \lim_{n\to\infty} s_{F_n}$ za svaki niz $(F_n)_n$ u $\mathcal{F}$ sa svojstvom $F_n \nearrow J$. Trebamo dokazati da je $x_0 = \sum_{j\in J} x_j$. Pretpostavimo suprotno; to znači da postoji $\epsilon > 0$ takav da za svaki konačan skup $G \in \mathcal{F}$ ima bar jedan konačan skup $F \in \mathcal{F}$ za koji je $G \subseteq F$ i $\|x_0 - s_F\| \ge \epsilon$.

Odaberimo bilo koji niz $(G_n)_n$ u $\mathcal{F}$ sa svojstvom $G_n \nearrow J$. Prvo nađimo $F_1 \in \mathcal{F}$ takav da je $G_1 \subseteq F_1$ i $\|x_0 - s_{F_1}\| \ge \epsilon$. Dalje, sad možemo pronaći $F_2 \in \mathcal{F}$ takav da je $F_1 \cup G_2 \subseteq F_2$ i $\|x_0 - s_{F_2}\| \ge \epsilon$. Nastavimo induktivno. Tako dobivamo niz skupova $(F_n)_n$ u $\mathcal{F}$ koji zadovoljavaju $\|x_0 - s_{F_n}\| \ge \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Očito je iz konstrukcije da vrijedi $F_{n-1} \subseteq F_n$, $\forall n$, a također i $G_n \subseteq F_n$, $\forall n$. Zato vrijedi $F_n \nearrow J$, a to je kontradikcija s pretpostavkom. □

Teorem 3.1.13 *Neka je J prebrojiv skup i $x : J \to \mathbb{F}$. Tada je familija $\{x_j : j \in J\}$ sumabilna ako i samo ako je sumabilna familija $\{|x_j| : j \in J\}$.*

Dokaz: Jedan smjer je već dokazan u propoziciji 3.1.11 (i ta je implikacija istinita i u svakom Banachovom prostoru pri čemu norma igra ulogu apsolutne vrijednosti).

Pretpostavimo sada da je familija skalara $\{x_j : j \in J\}$ sumabilna te da joj je suma broj x_0. Uzmimo prvo da je x realna funkcija. Tada možemo pisati $J = J_+ \cup J_-$ gdje je $J_+ = \{j \in J : x_j \ge 0\}$ i $J_- = \{j \in J : x_j < 0\}$. Tvrdimo da $\sum_{j\in J_+} x_j$ postoji.

Prema tvrdnji zadatka 3.1.15 dovoljno je vidjeti da je skup $\{s_G = \sum_{j\in G} x_j : G \in \mathcal{F}_+\}$ odozgo ograničen, pri čemu smo s $\mathcal{F}_+$ označili familiju svih konačnih podskupova skupa J_+.

Prije svega, prema pretpostavci postoji $F_0 \in \mathcal{F}$ sa svojstvom $F \in \mathcal{F}, F_0 \subseteq F \Rightarrow |x_0 - \sum_{j\in F} x_j| < 1$. Uzmimo sad $G \subseteq J_+ \setminus F_0$. Tada očito vrijedi $F_0 \subseteq F_0 \cup G$ i zato je $|x_0 - \sum_{j\in F_0\cup G} x_j| < 1$. Kako su F_0 i G disjunktni, odavde zaključujemo

$$\sum_{j\in G} x_j = |\sum_{j\in G} x_j| = |\sum_{j\in F_0\cup G} x_j - \sum_{j\in F_0} x_j| \le |\sum_{j\in F_0\cup G} x_j - x_0| + |x_0 - \sum_{j\in F_0} x_j| \le 1 + 1 = 2. \tag{3}$$

Uzmimo sada proizvoljan $G \subseteq J_+$. Neka je $F_0 \cap J_+ = \{j_1, \dots j_k\}$. Uočimo da je tada $G \subseteq (G \setminus \{j_1, \dots j_k\}) \cup \{j_1, \dots j_k\}$ i pritom je $(G \setminus \{j_1, \dots j_k\}) \subseteq J_+ \setminus F_0$. Zato je

$$\sum_{j\in G} x_j \le \sum_{j\in G\setminus\{j_1,\dots j_k\}} x_j + \sum_{i=1}^{k} x_{j_i} \overset{(3)}{\le} 2 + \sum_{i=1}^{k} x_{j_i}.$$

Time je dokazano da je skup $\{s_G = \sum_{j\in G} x_j : G \in \mathcal{F}_+\}$ zaista odozgo ograničen i sada tvrdnja zadatka 3.1.15 jamči da $\sum_{j\in J_+} x_j$ postoji.

Na isti način dokaže se da postoji i $\sum_{j\in J_-} x_j$ (alternativno, može se promatrati funkcija $-x$). Prema tvrdnji zadatka 3.1.16 (s $\alpha = 1$ i $\beta = -1$) zaključujemo da je i familija $\{|x_j| : j \in J\}$ sumabilna.

Uzmimo sada da je $x : J \to \mathbb{C}$ te da vrijedi $\sum_{j\in J} x_j = a + ib$. Najprije tvrdimo da je tada $\sum_{j\in J} \operatorname{Re} x_j = a$ i $\sum_{j\in J} \operatorname{Im} x_j = b$. Najjednostavnije je to vidjeti tako da iskoristimo analognu tvrdnju za redove kompleksnih brojeva i prethodnu lemu (primijenjenu na sve nizove (F_n) sa svojstvom $F_n \nearrow J$). Sad prema prvom dijelu dokaza znamo da postoje $\sum_{j\in J} |\operatorname{Re} x_j|$ i $\sum_{j\in J} |\operatorname{Im} x_j|$. Zato postoji i $\sum_{j\in J}(|\operatorname{Re} x_j| + |\operatorname{Im} x_j|)$. Međutim, $|x_j| \le |\operatorname{Re} x_j| + |\operatorname{Im} x_j|$ za sve $j \in J$ i opet preostaje samo primijeniti tvrdnju zadatka 3.1.15 □

Domaća zadaća 8

Zadatak 3.1.14 Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ definirajmo relaciju $\preceq$ formulom

$$a \preceq b \iff |a - x_0| \ge |b - x_0|.$$

Provjerite da je $(\mathbb{R} \setminus \{x_0\}, \preceq)$ usmjeren skup. Uočite da u tom usmjerenom skupu za svaki realan broj c imamo $x_0 - c \preceq x_0 + c$ i $x_0 + c \preceq x_0 - c$ iako je $x_0 - c \ne x_0 + c$ za sve $c \ne 0$.

Zadatak 3.1.15 Neka je $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ hiperniz realnih brojeva takav da vrijedi $\alpha_1 \le \alpha_2 \Rightarrow x_{\alpha_1} \le x_{\alpha_2}$. Dokažite da je hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ konvergentan ako i samo ako je skup $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ odozgo ograničen te da je u tom slučaju $\lim_{\alpha\in A} x_\alpha = \sup\{x_\alpha : \alpha \in A\}$.

Posebno, ako je $x : J \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija, familija $\{x_j : j \in J\}$ je sumabilna ako i samo ako je skup $S = \{\sum_{j\in F} x_j : F \in \mathcal{F}\}$ odozgo ograničen i tada je $\sum_{j\in J} x_j = \sup S$.

Zadatak 3.1.16 Neka su dane funkcije $x : J \to X$ i $y : K \to X$ pri čemu je X normiran prostor, a J i K su disjunktni skupovi. Neka je $L = J \cup K$ i $z : L \to X$ funkcija definirana sa $z|_J = \alpha x$ i $z|_K = \beta y$, pri čemu su α i β proizvoljni skalari. Pretpostavimo da su familije $\{x_j : j \in J\}$ i $\{y_k : k \in K\}$ sumabilne te da su njihove sume x_0 i y_0, respektivno. Dokažite da je tada sumabilna i familija $\{z_l : l \in L\}$, te da je njezina suma $\alpha x_0 + \beta y_0$.

3.2 Bezuvjetna konvergencija

Definicija 3.2.1 *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira bezuvjetno u X ako red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ konvergira (obično) u X za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$.*

Uočimo da se u definiciji ne zahtijeva da suma permutiranog reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ bude neovisna o permutaciji σ. Pokazat će se kasnije da je to ipak tako. Prvo ćemo razmotriti bezuvjetnu konvergenciju u polju. Očito je bezuvjetna konvergencija - barem gledajući sam definicioni uvjet - jača od obične. Koliko jača, pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 3.2.2 *Neka je $(c_n)_n$ niz u polju $\mathbb{F}$. Tada red $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergira apsolutno ako i samo ako konvergira bezuvjetno.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo apsolutnu konvergenciju. Uzmimo proizvoljnu permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$. Jer je niz parcijalnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ Cauchyjev, za $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} |c_k| < \epsilon. \tag{4}$$

Neka je $n_1 = \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(n_0)\}$. Uzmimo $m > n \geq n_1$ i promotrimo proizvoljan indeks k sa svojstvom $n+1 \leq k \leq m$. Kako je $k > n_1$, zaključujemo da $k \notin \{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(n_0)\}$. Drugim riječima, $\sigma(k) \notin \{1, 2, \ldots, n_0\}$. Dakle je $\sigma(k) > n_0$. Odavde zaključujemo da su brojevi $r = \min\{\sigma(n+1), \ldots, \sigma(m)\}$ i $s = \max\{\sigma(n+1), \ldots, \sigma(m)\}$ veći od od n_0. Zato za $m > n \geq n_1$ imamo

$$|\sum_{k=1}^{m} c_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)}| = |\sum_{k=n+1}^{m} c_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |c_{\sigma(k)}| \leq \sum_{j=r}^{s} |c_j| \overset{(4)}{<} \epsilon.$$

Obrat dokazujemo najprije u polju realnih brojeva i to kontrapozicijom. Uzmimo realan niz $(r_n)_n$ i pretpostavimo da red $\sum_{k=1}^{\infty} |r_k|$ ne konvergira. Treba dokazati da red $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ ne konvergira niti bezuvjetno. Uočimo da je tvrdnja trivijalna ako je $r_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ili ako je $r_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Naime, u oba ta slučaja se apsolutna konvergencija podudara s običnom pa ako red ne konvergira apsolutno, onda ne konvergira niti obično, pa dakle ne konvergira već ni u identičnoj permutaciji. Uzmimo zato da niz $(r_n)_n$ ima i pozitivnih i negativnih članova. Trebamo konstruirati permutaciju σ za koju red $\sum_{k=1}^{\infty} r_{\sigma(k)}$ neće konvergirati.

Pogledajmo podnizove $(r_{p(n)})_n$ i $(r_{t(n)})_n$ koji se sastoje od svih članova niza $(r_n)_n$ koji su veći ili jednaki nuli, odnosno manji od nule. Označimo jednostavnosti radi te nizove s $(a_k)_k$ i $(b_l)_l$. Dakle, $a_1, a_2, \ldots$ i $b_1, b_2, \ldots$ su svi nenegativni i svi negativni članovi niza $(r_n)_n$ poredani u svom prirodnom redoslijedu pojavljivanja. Smijemo uzeti da su oba ta niza beskonačna, jer u protivnom bismo opet mogli primijeniti argument s početka ovog dijela dokaza.

Neka je r_{n_0} prvi negativni član niza $(r_n)_n$. To znači da se $b_1 = r_{n_0}$ pojavljuje u nizu $(r_n)_n$ na mjestu n_0.

Pretpostavimo sada da redovi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ oba konvergiraju. Konvergirat će i ako ih dopunimo s nulama do zajedničkog "formata" niza $(r_n)_n$. Međutim, tada je $r_n = a_n + b_n$, $|r_n| = a_n - b_n$ i kad uočimo da je razlika konvergentnih redova opet konvergentan red, slijedilo bi, suprotno pretpostavci, da red $\sum_{n=1}^{\infty} |r_n|$ konvergira.

Dakle, bar jedan od redova $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ divergira. Pretpostavimo, opet radi konkretnosti, da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira. Jer mu je niz parcijalnih suma uzlazan, zbog pretpostavljene divergencije mora taj niz parcijalnih suma biti neograničen. Dakle,

$\exists k_1 > n_0$ tako da $a_1 + a_2 + \ldots a_{k_1} > 1$.
Dalje,
$\exists k_2 > k_1$ tako da $a_1 + \ldots + a_{k_1} + a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2} > 2 - b_1$.
Slično,
$\exists k_3 > k_2$ tako da $a_1 + \ldots + a_{k_1} + a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2} + a_{k_2+1} + \ldots + a_{k_3} > 3 - b_1 - b_2$.

Analogno nastavimo dalje. Rezultat prva tri koraka provedene konstrukcije možemo zapisati i ovako:

$$\begin{array}{lll} \exists k_1 > n_0 & \text{tako da} & a_1 + a_2 + \ldots a_{k_1} > 1, \\ \exists k_2 > k_1 & \text{tako da} & a_1 + \ldots + a_{k_1} + b_1 + a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2} > 2, \\ \exists k_3 > k_2 & \text{tako da} & a_1 + \ldots + a_{k_1} + b_1 + a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2} + b_2 + a_{k_2+1} + \ldots + a_{k_3} > 3. \end{array}$$

Induktivnim postupkom dobivamo jednu permutaciju skupa $\mathbb{N}$. Permutirani niz $(r_{\sigma(n)})_n$ izgleda ovako: $a_1, \ldots, a_{k_1}, b_1, a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_2}, b_2, a_{k_2+1}, \ldots, a_{k_3}, b_3, \ldots$ Sada je jasno da red $\sum_{n=1}^{\infty} r_{\sigma(n)}$ divergira jer pripadajući niz parcijalnih suma ima neograničen podniz.

Uočimo još da je konstruirana permutacija σ različita od identične. Naime, u originalnom poretku b_1 se pojavljuje na mjestu n_0, dok se u permutiranom nizu b_1 pojavljuje na mjestu $k_1 + 1 > k_1 > n_0$.

Uzmimo sada kompleksan niz $(c_n)_n$ i pretpostavimo da red $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergira bezuvjetno. Neka je $c_n = a_n + ib_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Uzmimo proizvoljnu permutaciju σ i stavimo $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\sigma(k)} = c = a + ib$. (Primijetimo da c možda ovisi o σ, no to neće utjecati na nastavak dokaza.) Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ imamo $|a - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}| = |\mathrm{Re}(c - \sum_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)})| \le |c - \sum_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)}|$. Analogno vidimo da je i $|b - \sum_{k=1}^{n} b_{\sigma(k)}| \le |c - \sum_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)}|$. Dakle, redovi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiraju bezuvjetno. Prema prethodnom dijelu dokaza onda konvergiraju i apsolutno. No tada, zbog $\sum_{k=1}^{n} |a_k + ib_k| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} |b_k|$ i red $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ konvergira. □

Korolar 3.2.3 *Ako u Banachovom prostoru red konvergira apsolutno, onda konvergira i bezuvjetno.*

Dokaz: Uzmimo da je $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, pogledajmo proizvoljnu permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$ i provjerimo je li niz parcijalnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ Cauchyjev. Za $m > n$ imamo $\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} \| = \| \sum_{k=n+1}^{m} x_{\sigma(k)} \| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|x_{\sigma(k)}\|$. Kako je $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, taj red prema prethodnom teoremu konvergira i bezuvjetno. Dakle, red $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{\sigma(k)}\|$ konvergira te mu je zato niz parcijalnih suma Cauchyjev. Zato za zadani $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da za sve $m > n \ge n_0$ vrijedi $\sum_{k=n+1}^{m} \|x_{\sigma(k)}\| < \epsilon$. □

Napomena 3.2.4 Prema dokazanom, za svaki niz $(x_n)_n$ u Banachovom prostoru X vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \text{ kvg. apsolutno } \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \text{ kvg. bezuvjetno } \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \text{ kvg. obično}$$

Pritom, naravno, druga implikacija vrijedi i u svakom normiranom prostoru. Što se tiče prve impliacije, za nju je nužno pretpostaviti potpunost prostora.

Promotrimo sada kakva je situacija s eventualnim obratima navedenih implikacija. Obrat druge implikacije ne vrijedi čak niti u polju. Naime, uočimo da je red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergentan. Kad bi bio i bezuvjetno konvergentan, prema prethodnom teoremu konvergirao bi i apsolutno, a znamo da nije tako.

Kako smo vidjeli, obrat prve implikacije istinit je za redove realnih i kompleksnih brojeva. Može se pokazati da je ista tvrdnja (tj. da bezuvjetna konvergencija povlači apsolutnu) točna i u svakom konačnodimenzionalnom prostoru.

Međutim, čim je prostor beskonačnodimenzionalan, neki red u njemu može konvergirati bezuvjetno, a da pritom ne konvergira apsolutno, čak i ako je prostor potpun. Da se u to uvjerimo uzmimo ortonormiran niz $(e_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H. Sjetimo se tvrdnje propozicije 2.1.11: ako je $(\alpha_n)_n$ niz skalara, tada red $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ konvergira u H ako i samo ako vrijedi $(\alpha_n)_n \in \ell^2$. Sad, ako je $(\alpha_n)_n$ niz u ℓ^2, onda red $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ konvergira, pa konvergira i bezuvjetno. Dakle, za svaku permutaciju σ i red $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{\sigma(k)}|^2$ konvergira. S druge strane, i $(e_{\sigma(n)})_n$ je ortonormiran niz, pa opet iz propozicije 2.1.11 slijedi da i red $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(k)} e_{\sigma(k)}$ konvergira. Tako zaključujemo: $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ konvergira ako i samo ako konvergira bezuvjetno ako i samo ako je $(\alpha_n)_n \in \ell^2$.

U drugu ruku, očito je: $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ konvergira apsolutno ako i samo ako je $(\alpha_n)_n \in \ell^1$. Kako je ℓ^1 striktno sadržan u ℓ^2, možemo naći nizove $(\alpha_n)_n \in \ell^2 \setminus \ell^1$. Za svaki takav niz red $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ konvergira bezuvjetno, ali ne i apsolutno. Takav je npr. red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$.

Tvrdnja sljedećeg korolara za Hilbertove prostore slijedi iz prethodnih razmatranja. Međutim, korisno je uočiti da je tvrdnja točna i kad prostor nije potpun.

Korolar 3.2.5 *Neka je $(e_n)_n$ ONB separabilnog unitarnog prostora H. Tada za svaki $x \in H$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ pri čemu ovaj red konvergira bezuvjetno.*

Dokaz: Ako je prostor Hilbertov, primjenjuje se prethodna diskusija. Međutim, ako prostor i nije potpun, zaključak slijedi iz ekvivalencije (a) $\Leftrightarrow$ (b) u Teoremu 2.1.7 jer je i niz $(e_{\sigma(n)})_n$ fundamentalan za svaku permutaciju σ. $\square$

Na kraju ovih razmatranja preostaje još ustanoviti u kojem je odnosu eventualna konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ prema mogućoj sumabilnosti prebrojive familije $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Sa $\sum_{k \in \mathbb{N}} x_k$ ćemo označavati sumu familije $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, ako je ta familija sumabilna u smislu razmatranja iz prethodne točke. Dakle, i ovdje formiramo hiperniz $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$ gdje je $\mathcal{F}$ familija svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$, a s_F konačna suma $s_F = \sum_{k \in F} x_k$. U tim oznakama imamo $\sum_{k \in \mathbb{N}} x_k = \lim_{F \in \mathcal{F}} s_F$.

Odmah uočimo da sumabilnost povlači običnu konvergenciju. Da to pokažemo, stavimo $\sum_{k \in \mathbb{N}} x_k = x$. Za proizvoljni $\epsilon > 0$ tada postoji $F_0 \in \mathcal{F}$ takav da $F_0 \subseteq F \in \mathcal{F} \Rightarrow \|x - \sum_{k \in F} x_k\| < \epsilon$. Označimo $n_0 = \max F_0$. Sad za proizvoljan $n \geq n_0$ i skup $F_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi $F_0 \subseteq F_n$ i zato je $\|x - \sum_{k \in F_n} x_k\| < \epsilon$, tj. $\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| < \epsilon$.

U stvari, sumabilnost je puno jači uvjet od obične konvergencije reda. Koliko točno jači, govori nam sljedeći teorem.

Teorem 3.2.6 *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Tada je familija $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sumabilna ako i samo ako red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira bezuvjetno. Štoviše, ako red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira bezuvjetno onda za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{F \in \mathcal{F}} \sum_{k \in F} x_k.$$

Dokaz: Neka red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira bezuvjetno, stavimo $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Pokazat ćemo da vrijedi i $x = \lim_{F \in \mathcal{F}} s_F$, tj. $x = \lim_{F \in \mathcal{F}} \sum_{k \in F} x_k$.

Pretpostavimo suprotno. To znači da postoji $\epsilon > 0$ sa sljedećim svojstvom:

$$\forall F_0 \in \mathcal{F} \ \exists F \in \mathcal{F} \text{ tako da } F_0 \subseteq F \text{ i } \|x - \sum_{k \in F} x_k\| \geq \epsilon. \tag{5}$$

S druge strane, za isti ϵ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_1$ povlači $\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Sad ćemo pokazati da ovo vodi na kontradikciju tako što ćemo konstruirati permutaciju u kojoj polazni red neće konvergirati.

Stavimo $F_1 = \{1, 2, \ldots, n_1\} \in \mathcal{F}$. Koristeći (5) nađimo $G_1 \in \mathcal{F}$ za koji vrijedi $F_1 \subseteq G_1$ i $\|x - \sum_{k \in G_1} x_k\| \geq \epsilon$. Neka je sad $n_2 = \max G_1$ i $F_2 = \{1, 2, \ldots, n_2\}$. Sad opet prema (5) postoji $G_2 \in \mathcal{F}$ tako da vrijedi $F_2 \subseteq G_2$ i $\|x - \sum_{k \in G_2} x_k\| \geq \epsilon$. Nastavimo induktivno. Na taj način dobivamo niz skupova u $\mathcal{F}$ za koji vrijedi $F_1 \subseteq G_1 \subseteq F_2 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$, te $\|x - \sum_{k \in F_n} x_k\| < \frac{\epsilon}{2}$ i $\|x - \sum_{k \in G_n} x_k\| \geq \epsilon$. Odavde je

$$\|\sum_{k \in G_n \setminus F_n} x_k\| = \|\sum_{k \in G_n} x_k - \sum_{k \in F_n} x_k\| \geq \|x - \sum_{k \in G_n} x_k\| - \|x - \sum_{k \in F_n} x_k\| \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Uočimo sada permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$ koju dobijemo tako da, slijedeći niz inkluzija $F_1 \subseteq G_1 \subseteq F_2 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$, redom ispišemo skupove $F_1, G_1 \setminus F_1, F_2 \setminus G_1, G_2 \setminus F_2, \ldots$. Ako s $|F_n|$ i $|G_n|$ označimo kardinalne brojeve skupova F_n i G_n, onda imamo

$$\|\sum_{k=|F_n|+1}^{|G_n|} x_{\sigma(k)}\| = \|\sum_{k \in G_n \setminus F_n} x_k\| \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ovo pokazuje da niz parcijalnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ nije Cauchyjev.

Pretpostavimo sada da je familija $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sumabilna i stavimo $x = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k = \lim_{F \in \mathcal{F}} \sum_{k \in F} x_k$. Uzmimo proizvoljnu permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$ i fiksirajmo $\epsilon > 0$. Po definiciji sumabilnosti možemo naći $F_0 \in \mathcal{F}$ sa svojstvom

$$F \in \mathcal{F}, \ \ F_0 \subseteq F \Longrightarrow \|x - \sum_{k \in F} x_k\| < \epsilon. \tag{6}$$

Odaberimo n_0 dovoljno velik da bude $F_0 \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots \sigma(n_0)\}$. Sada za svaki $n \geq n_0$ i skup $F = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots \sigma(n_0) \ldots \sigma(n)\}$ imamo $F_0 \subseteq F$ pa (6) povlači

$$\|x - \sum_{k \in F} x_k\| < \epsilon, \quad \text{tj.} \quad \|x - \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}\| < \epsilon.$$

$\square$

Napomena 3.2.7 Sada možemo izvesti i alternativni dokaz teorema 3.1.13[1].

Pretpostavimo, dakle, da je za prebrojivi indeksni skup J familija skalara $\{x_j : j \in J\}$ sumabilna.

Uočimo najprije da je za proizvoljnu bijekciju $\varphi : J \to \mathbb{N}$ familija $\{x_j : j \in J\}$ sumabilna ako i samo ako je familija $\{x_n : n = \varphi(j),\, j \in J\}$ sumabilna. To se lako vidi: ako je F_1 kritičan skup za zadani ε u ocjeni prve sume, onda je $F_2 = \{x_n : n = \varphi(j),\, j \in F_1\}$ dobar za isti ε u ocjeni duge sume. Argument za obrat je isti uz primjenu funkcije φ^{-1}.

Preslikavanje φ inducira niz $(x_n)_n$. Kako je familija $\{x_n : n = \varphi(j),\, j \in J\}$ sumabilna, prethodni teorem nam kaže da red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno. Kako se ovdje radi o redu skalara, teorem 3.2.2 povlači da taj red konvergira i apsolutno. Isti teorem sada daje i bezuvjetnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Koristeći ponovno teorem 3.2.6 zaključujemo da je familija $\{|x_n| : n = \varphi(j),\, j \in J\}$ sumabilna, pa argument iz prethodnog odlomka daje željeni zaključak.

Napomena 3.2.8 Može se pokazati da su za niz $(x_n)_n$ u Banachovom prostoru sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:

(a) Red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno.

(b) Familija $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je sumabilna.

(c) Za svaki podniz $(x_{p(n)})_n$ niza $(x_n)_n$ red $\sum_{n=1}^{\infty} x_{p(n)}$ konvergira.

(d) Red $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ konvergira za svaki izbor predznaka $\varepsilon_n = \pm 1$.

Primijetimo da je ekvivalencija (a) $\Leftrightarrow$ (b) istinita i za normirane prostore - to je sadržaj teorema 3.2.6. Dokaz preostalih ekvivalencija potražite unutar dokaza Teorema 2.8 u `http://people.math.gatech.edu/~heil/papers/bases.pdf`.

Napomena 3.2.9 (a) U Hilbertovim prostorima vrijedi sljedeći Orliczev teorem: ako $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno, onda je $(\|x_n\|)_n$ ℓ^2-niz, tj. vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^2 < \infty$.

(b) Specijalan slučaj tvrdnje Orliczevog teorema već smo konstatirali u napomeni 3.2.4: ako je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru H i ako za niz skalara $(\alpha_n)_n$ red $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ konvergira onda je ta konvergencija bezuvjetna, a već iz Propozicije 2.1.11 znamo da je tada $(\alpha_n)_n \in \ell^2$ pa je $\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$. Štoviše, vidjeli smo da u ovom primjeru vrijedi i obrat: uvjet $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ povlači bezuvjetnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

(c) Ipak, obrat Orliczevog teorema općenito ne vrijedi, tj. uvjet $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$ nije dovoljan za bezuvjetnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Da to pokažemo, uzmimo jedinični vektor $x \in H$ i niz skalara $(\alpha_n)_n$. Tada je $\| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k x\| = |\sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k| \|x\| = |\sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k|$. Odavde je jasno da $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x$ konvergira ako i samo ako $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ konvergira, kao i da $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x$ konvergira bezuvjetno ako i samo ako $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ konvergira bezuvjetno.

[1] Ovaj argument je predložio student Miran Janković.

Sad pogledajmo niz $(\frac{(-1)^n}{n})_n$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira obično, ali ne i bezuvjetno. Zato prema prethodnoj opservaciji red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x$ konvergira samo obično i ne konvergira bezuvjetno, premda vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{(-1)^n}{n} x\|^2 < \infty$.

U stvari, uvjet $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$ nije dovoljan čak niti za običnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Naime, ako ponovo odaberemo $x \in H$ takav da je $\|x\| = 1$, vidimo da je $\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{1}{n} x\|^2 < \infty$, a pritom red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x$ ne samo da ne konvergira bezuvjetno, nego ne konvergira nikako.

Napomena 3.2.10 Prethodna razmatranja o konvergenciji redova u Hilbertovim prostorima možemo rekapitulirati na sljedeći način. Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru. Uz do sada formulirane načine konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ reći ćemo da taj red konvergira kvadratno ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$. Tada vrijedi

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \text{ kvg. apsolutno} & \Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \text{ kvg. bezuvjetno} & \Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \text{ kvg. obično} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \text{ kvg. kvadratno} & & \end{array}$$

Već smo konstatirali u napomeni 3.2.4 da obrati horizontalnih implikacija u gornjem dijagramu ne vrijede. U prethodnoj napomeni smo vidjeli da ne vrijedi niti obrat vertikalne implikacije. Ta činjenica također pokazuje da kvadratna konvergencija ne povlači apsolutnu. (Da apsolutna konvergencija povlači kvadratnu vidljivo je iz dijagrama, no to se sasvim lako vidi i direktnim argumentom, bez pozivanja na međuodnose s bezuvjetnom konvergencijom). Konačno, još primijetimo da su kvadratna i obična konvergencija logički nezavisne. U prethodnoj napomeni smo naveli primjer divergentnog reda koji konvergira kvadratno. S druge strane, ako je x jedinični vektor, i ako stavimo $x_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} x$, $n \in \mathbb{N}$, jasno je da red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira, a pritom je $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = \infty$.

Napomena 3.2.11 Neka je S proizvoljan prebrojiv skup, te neka je $\{e_k : k \in S\}$ fundamentalan ortonormiran skup u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Neka je $f : \mathbb{N} \to S$ proizvoljna bijekcija. Promotrimo niz $(e_{f(n)})_n$. Prema teoremu 2.1.7 taj je niz ONB za H. Dakle, svaki $x \in H$ dopušta prikaz u obliku $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{f(n)} \rangle e_{f(n)}$. Prema korolaru 3.2.5 ova je konvergencija bezuvjetna, pa ćemo isti rezultat dobiti i za bilo koju permutaciju niza $(e_{f(n)})_n$. Dakle, ako je $g : \mathbb{N} \to S$ bilo koja druga bijekcija, također vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{g(n)} \rangle e_{g(n)}$, $\forall x \in H$.

Posebno, pretpostavimo da u Hilbertovom prostoru H imamo fundamentalan (ili, što je ekvivalentno, maksimalan) ortonormiran skup $\{e_z : z \in \mathbb{Z}\}$. Tada je ovaj sistem ONB za H i zato svaki $x \in H$ možemo prikazati u obliku $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ u smislu $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. Naime, ovdje smo skup $\mathbb{Z}$ poredali u niz $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3 \ldots$ i pritom umjesto limesa niza pripadajućih parcijalnih suma uzimamo limes (konvergentnog) podniza neparnih parcijalnih suma. Usporedite primjer 2.1.14

Domaća zadaća 9

Zadatak 3.2.12 Dokažite ekvivalenciju (c) $\Leftrightarrow$ (d) iz napomene 3.2.8.

3.3 Ortonormirana baza i ortogonalna dimenzija Hilbertovog prostora

Propozicija 3.3.1 *Neka je $(e_j)_{j\in J}$ proizvoljna familija ortonormiranih vektora u unitarnom prostoru H. Tada je, za svaki x u H, familija $\{|\langle x, e_j\rangle|^2 : j \in J\}$ sumabilna i vrijedi $\sum_{j\in J} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Posebno, za svaki x postoji najviše prebrojivo mnogo indeksa j za koje vrijedi $\langle x, e_j\rangle \neq 0$.*

Dokaz: Za svaku prebrojivu familiju ortonormiranih vektora $(e_i)_i$ imamo prema Besselovoj nejednakosti $\sum_i |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Pogotovo je to točno za svaku konačnu familiju ortonormiranih vektora. Sad prve dvije tvrdnje slijede iz tvrdnje zadatka 3.1.15. Posljednja tvrdnja propozicije dobiva se iz napomene 3.1.9 i propozicije 3.1.10. □

Definicija 3.3.2 *Ortonormirana familija $(e_j)_{j\in J}$ je ortonormirana baza (ONB) unitarnog prostora X ako je za svaki x u H familija $\{\langle x, e_j\rangle e_j : j \in J\}$ sumabilna i ima sumu x. Izraz $x = \sum_{j\in J}\langle x, e_j\rangle e_j$ se zove Fourierov razvoj vektora x.*

Napomena 3.3.3 Na netrivijalan način gornja definicija uključuje u sebi (tj. proširuje) definiciju ONB za separabilne prostore. Prisjetimo se da je, po definiciji, ortonormiran niz $(e_n)_n$ u separabilnom prostoru H ONB za H ako vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$, $\forall x \in H$. Korolar 3.2.5 nam kaže da je za svaki x ovaj red bezuvjetno konvergentan. Konačno, sad teorem 3.2.6 pokazuje da je za svaki x familija $\{\langle x, e_n\rangle e_n : n \in \mathbb{N}\}$ sumabilna i da ovdje zapravo imamo $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle e_n$, $\forall x \in H$.

U ovoj točki naša pažnja je usmjerena na neseparabilne prostore. Uočimo da postojanje prebrojive ONB za unitaran prostor X automatski povlači da je prostor X separabilan (sve konačne linearne kombinacije vektora iz ONB s racionalnim koeficijentima očito čine prebrojiv gust skup u X).

Teorem 3.3.4 *Za svaku ortonormiranu familiju $(e_j)_{j\in J}$ u Hilbertovom prostoru H sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) *$(e_j)_{j\in J}$ je ONB za H;*

(b) *$(e_j)_{j\in J}$ je fundamentalna familija u H;*

(c) *$(e_j)_{j\in J}$ je maksimalna familija u H;*

(d) *$\forall x \in H$ familija $\{|\langle x, e_j\rangle|^2 : j \in J\}$ je sumabilna i $\sum_{j\in J} |\langle x, e_j\rangle|^2 = \|x\|^2$;*

(e) *$\forall x, y \in H$ familija $\{\langle x, e_j\rangle\langle e_j, y\rangle : j \in J\}$ je sumabilna i $\sum_{j\in J}\langle x, e_j\rangle\langle e_j, y\rangle = \langle x, y\rangle$.*

Dokaz: (a) $\Rightarrow$ (c) : Ako vrijedi $x \perp e_j$, $\forall j \in J$ i ako pretpostavimo (a), očito je $x = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Prema propoziciji 3.3.1 $\sum_{j\in J} |\langle x, e_j\rangle|^2$ postoji. Dakle, ispunjen je uvjet (1) iz propozicije 3.1.7: $\forall \epsilon > 0\, \exists G(\epsilon) \in \mathcal{F}$ tako da vrijedi $\sum_{j\in F} |\langle x, e_j\rangle|^2 < \epsilon$, za sve $F \in \mathcal{F}$, $F \subseteq J \setminus G(\epsilon)$. Sad uočimo da je $\| \sum_{j\in F}\langle x, e_j\rangle e_j\|^2 = \sum_{j\in F} |\langle x, e_j\rangle|^2$. To odmah pokazuje da imamo uvjet (1) i za familiju $\{\langle x, e_j\rangle e_j : j \in J\}$, te je zato i ta familija sumabilna. Neka je $x_0 = \sum_{j\in J}\langle x, e_j\rangle e_j$. Zbog ortonormiranosti familije $(e_j)_{j\in J}$ i neprekidnosti skalarnog produkta slijedi $\langle x_0, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle$, $\forall j \in J$. Zbog maksimalnosti familije $(e_j)_{j\in J}$ sad mora biti $x_0 = x$; drugim riječima vrijedi $x = \sum_{j\in J}\langle x, e_j\rangle e_j$.

Implikacije (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c), (a) $\Rightarrow$ (d), (a) $\Rightarrow$ (e) i (e) $\Rightarrow$ (d) su očite.

(d) $\Rightarrow$ (a) : Kao i u dokazu implikacije (c) $\Rightarrow$ (a) vidimo da je $\{\langle x, e_j\rangle e_j : j \in J\}$ sumabilna familija. Da suma iznosi upravo x, slijedi iz $\|x - \sum_{j\in F}\langle x, e_j\rangle e_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j\in F}|\langle x, e_j\rangle|^2$, $\forall F \in \mathcal{F}$.

Inspekcija dokaza pokazuje da je samo u dokazu implikacije (c) $\Rightarrow$ (a) korištena potpunost prostora. Sve ostale implikacije, kao što smo već vidjeli u separabilnom slučaju, vrijede i kad je prostor samo unitaran i tu separabilnost ne igra nikakvu ulogu. $\square$

Prethodni teorem zapravo proširuje teoreme 2.1.7 i 2.1.13 na sve Hilbertove prostore, bez ograničenja na njihovu "veličinu". Ovdje je prikladno primijetiti da smo u točki 2.2 dokazali još dva važna teorema za Hilbertove prostore; naime, teoreme 2.2.7 i 2.2.4 pri čemu njihovi dokazi nisu podrazumijevali pretpostavku o separabilnosti. Sad smo u mogućnosti pokazati da svi navedeni rezultati zapravo karakteriziraju Hilbertove prostore unutar klase unitarnih prostora.

Teorem 3.3.5 *Neka je X unitaran prostor. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) *X je Hilbertov prostor.*

(b) *Za svaki $f \in X'$ postoji jedinstven $a \in X$ takav da vrijedi $f(x) = \langle x, a\rangle$, $\forall x \in X$.*

(c) *Za svaki zatvoren potprostor $M \leq X$ vrijedi $X = M \oplus M^\perp$.*

(d) *Svaka maksimalna ortonormirana familija $(e_j)_{j\in J}$ u X je ONB za X.*

Dokaz: Tvrdnje (a) $\Rightarrow$ (b) i (a) $\Rightarrow$ (c) su dokazane u teoremima 2.2.7 i 2.2.4. Da vrijedi (a) $\Rightarrow$ (d) dokazano je u teoremu 2.1.13 za separabilne Hilbertove prostore, te u teoremu 3.3.4 bez pretpostavke o separabilnosti.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Kad imamo svojstvo (b), imamo i korolar 2.2.9. Kako je dual bilo kojeg normiranog prostora potpun, vidimo da je onda potpun i X (primijetimo da antilinearnost izometričkog izomorfizma ovdje nije problem; kad su prostori izometrički izomorfni - linearno ili antilinearno - oba su potpuna, ili nije ni jedan).

(c) $\Rightarrow$ (a) : Na temelju svojstva (c) smo dokazali teorem 2.2.7, tj. svojstvo (b) (niti jednu drugu prethodnu tvrdnju nismo pritom koristili), a u prethodnom dijelu dokaza smo upravo dokazali da (b) $\Rightarrow$ (a).

(d) $\Rightarrow$ (a) : I ovdje ćemo zapravo pokazati da iz (d) slijedi (b). Neka je $f \in X'$, $f \neq 0$. Uzmimo prvo da je prostor separabilan. Neka je $(e_n)_n$ ONB za $\operatorname{Ker} f$. Uočimo da $(e_n)_n$ nije maksimalan niz u X. Naime, u suprotnom bi zbog pretpostavke (d) niz $(e_n)_n$ bio ONB za X i sada bi zbog $x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$, $\forall x \in X$, neprekidnosti od f i činjenice da je $f(e_k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, imali $f = 0$. Zato možemo naći $v \in X$ takav da je $\|v\| = 1$ i $\langle v, e_k\rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Primijetimo da $v \notin \operatorname{Ker} f$ jer, kad ne bilo tako, imali bismo $v = \sum_{k=1}^{\infty}\langle v, e_k\rangle e_k = 0$. Dakle, $f(v) \neq 0$. Ostatak argumenta je točno isti kao u dokazu teorema 2.2.7. Ako prostor nije separabilan, argument je zapravo identičan, a jedina razlika je u tome što treba uzeti ONB $(e_j)_{j\in J}$ za $\operatorname{Ker} f$ indeksiranu po prikladnom indeksnom skupu J. Međutim, važno je uočiti da ovdje prejudiciramo prvu tvrdnju sljedećeg teorema: *svaki* Hilbertov prostor ima ONB. Nije problem samo u poretku, nego i u činjenici da prostor koji nije potpun i ne mora imati ONB (vidite Napomenu 3.3.7). Zbog toga je u neseparabilnom slučaju potrebno malo modificirati argument.

Uzmimo maksimalnu ortonormiranu familiju $(e_j)_{j\in J}$ u $\operatorname{Ker} f$ (postojanje takve familije je dokazano u prvom dijelu dokaza idućeg teorema; uočimo da samo po sebi postojanje takve familije proizlazi bez pozivanja na ovaj teorem pa, dakle, argument nije cirkularan). Ova familija nije maksimalna u X. Naime, kad bi bila maksimalna u X, zbog pretpostavke (d) bila bi ujedno i ONB za X i onda bi, točno kao u prethodnom odjeljku slijedilo da je $f=0$. Zato možemo naći $v\in X$ takav da je $\|v\|=1$ i $\langle v,e_j\rangle=0$, $\forall j\in J$. Primijetimo da $v\notin \operatorname{Ker} f$ jer je familija $(e_j)_{j\in J}$ maksimalna u $\operatorname{Ker} f$. Ostatak argumenta je opet isti kao u dokazu teorema 2.2.7. Da bismo i ovdje mogli primijeniti isti argument nužno nam je još znati da je $v\perp \operatorname{Ker} f$, a za to je dovoljno pokazati da je $(e_j)_{j\in J}$ zapravo ONB za $\operatorname{Ker} f$.

To se vidi ovako. Prvo, uočimo da vrijedi $X=\operatorname{Ker} f \dot{+} \operatorname{span}\{v\}$ (direktna suma). Naime, suma jest direktna zbog toga što $v\notin \operatorname{Ker} f$, a za svaki x iz X imamo $x-\frac{f(x)}{f(v)}v\in \operatorname{Ker} f$. Sad lako slijedi da je familija $(e_j)_{j\in J}\cup\{v\}$ maksimalna u X. Zaista: pretpostavimo da je $y\perp v, e_j$ za sve j i pišimo $y=z+\lambda v$ gdje je $z\in \operatorname{Ker} f$. Sad zbog $\langle y,v\rangle=0$ slijedi $\lambda=0$ što onda znači da je $y=z$, a kako je $(e_j)_{j\in J}$ maksimalna familija u $\operatorname{Ker} f$, to povlači $z=0$.

Zato je prema pretpostavljenom svojstvu (d) ta familija i ONB za X. Posebno, to znači da za svaki $x\in \operatorname{Ker} f$ imamo $x=\sum_j\langle x,e_j\rangle e_j+\langle x,v\rangle v$ iz čega slijedi $\langle x,v\rangle v\in \operatorname{Ker} f$.

Kraj dokaza je već viđen: za proizvoljan $x\in X$ sada imamo $\langle x-\frac{f(x)}{f(v)}\rangle=0$, to jest, $f(x)=\langle x,\overline{f(x)}v\rangle$. $\square$

Teorem 3.3.6 **(a)** *Svaki Hilbertov prostor $H\neq\{0\}$ ima ONB. Svaki ortonormiran skup u H je podskup neke ONB za H.*

(b) *Sve ONB Hilbertovog prostora H su ekvipotentne. Taj zajednički kardinalitet svih ONB za H se naziva ortogonalna dimenzija prostora H.*

(c) *Dva Hilbertova prostora nad istim poljem su izometrički izomorfna ako i samo ako imaju istu ortogonalnu dimenziju.*

Dokaz: **(a)** Neka je $\dim H=\infty$. Uzmimo ortonormiran skup E_1 u H i promotrimo množinu $\mathcal{M}$ svih ortonormiranih podskupova od H koji sadrže E_1. Tu množinu uredimo inkluzijom. Ako je $\mathcal{L}$ lanac u toj množini, onda je $\cup_{E\in\mathcal{L}}E$ gornja međa tog lanca. Dakle, po Zornovoj lemi imamo maksimalan element E_m u $\mathcal{M}$. Pretpostavimo da je $e\in H$, $e\perp E_m$. Kad bi bilo $e\neq 0$ onda bi skup $E_m\cup\{\frac{e}{\|e\|}\}$ bio ortonormiran, sadržao bi E_1 i bio bi veći od E_m - to je nemoguće. Dakle, $e=0$, što znači da je E_m maksimalna familija u H. Sad prethodni teorem osigurava da je E_m ONB za H.

(b) Neka su $(e_j)_{j\in J}$ i $(f_i)_{i\in I}$ dvije ONB za H. Ako su obje baze konačne, tvrdnju već poznajemo iz linearne algebre. Također, jednostavan argument pokazuje da je nemoguće da jedna baza bude konačna, a druga beskonačna. Pretpostavimo zato da su obje baze beskonačne. Za $j \in J$ definiramo $I_j = \{i \in I : \langle e_j, f_i \rangle \neq 0\}$. Uočimo da je zbog sumabilnosti familije $\{\langle e_j, f_i \rangle : i \in I\}$ skup I_j najviše prebrojiv. Primijetimo da je za svaki pojedini $i_0 \in I$ nemoguće da vrijedi $\langle e_j, f_{i_0} \rangle = 0$, $\forall j \in J$ jer bi to povlačilo $f_{i_0} = 0$ zato što je $(e_j)_{j\in J}$ ONB. Dakle, $I \subseteq \cup_{j\in J} I_j$, a ovo povlači $\operatorname{card} I \leq \aleph_0 \cdot \operatorname{card} J = \operatorname{card} J$. Po simetriji imamo i $\operatorname{card} J \leq \operatorname{card} I$.

(c) Uzmimo da prostori H i K imaju istu ortogonalnu dimenziju i odaberimo ONB $(e_j)_{j\in J}$ i $(f_j)_{j\in J}$ za H i K, respektivno. Lako se vidi da je s $U : H \to K$, $U(\sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle e_j) = \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle f_j$ definiran jedan unitaran operator između prostora H i K.

Obratno, ako imamo unitaran operator $U : H \to K$ i ONB $(e_j)_{j\in J}$ za H, jasno je da je $(Ue_j)_{j\in J}$ ONB za K. □

Napomena 3.3.7 *Do sada smo pokazali da svaki separabilan unitaran prostor i svaki Hilbertov prostor ima ONB. Općenito, neseparabilan unitaran prostor ne mora imati ONB. Primjer se može naći ovdje:*

https://math.stackexchange.com/questions/875465

http://math.gmu.edu/~tlim/NoOrthonormalBasis.pdf

Evo skice konstrukcije jednog unitarnog prostora bez ONB. Pogledajmo Hilbertove prostore ℓ^2 i $L^2_{cm}[0,1]$ pri čemu na $[0,1]$ promatramo mjeru prebrojavanja. Elementi od $L^2_{cm}[0,1]$ su funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ za koje postoji niz $(t_n)_n$ u $[0,1]$, ovisan o f takav da je $f(t) = 0$ za sve $t \neq t_n$, $n \in \mathbb{N}$, i $\sum_{n=1}^{\infty} |f(t_n)|^2 < \infty$.

Neka je E standardna ONB za ℓ^2, te neka je C standardna ONB za $L^2_{cm}[0,1]$. Uočimo da je $C = \{e_t = \chi_{\{t\}} : t \in [0,1]\}$. Neka je B linearno nezavisan skup u ℓ^2 takav da je $E \cup B$ algebarska (Hamelova) baza za ℓ^2. Primijetimo da su kardinaliteti skupova C i B jednaki i iznose c.

Neka je $T : B \to C$ proizvoljna bijekcija. Stavimo još $Te_n = 0$ za sve članove e_n baze E. Sad proširimo T po linearnosti do linearnog operatora $T : \ell^2 \to L^2_{cm}[0,1]$. Neka je $\Gamma(T) = \{(v, Tv) : v \in \ell^2\} \subseteq \ell^2 \oplus L^2_{cm}[0,1]$.

Uočimo da je $\Gamma(T)$ unitaran prostor u kojem je skup $\{(e_n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormiran i maksimalan. Svaka dva maksimalna ortonormirana skupa u bilo kojem unitarnom prostoru imaju isti kardinalitet (dokaz je identičan onom kojeg smo proveli u drugom dijelu prethodnog teorema) i zato je svaki maksimalan ortonormiran skup u $\Gamma(T)$ prebrojiv.

S druge strane, $\Gamma(T)$ je gust u Hilbertovom prostoru $\ell^2 \oplus L^2_{cm}[0,1]$. Da bismo se u to uvjerili, uzmimo $(y, f) \in \ell^2 \oplus L^2_{cm}[0,1]$. Neka je $\varepsilon > 0$. Nađimo $\sum_{j=1}^{M} \lambda_j e_{t_j} \in L^2_{cm}[0,1]$ tako da je $\|f - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j e_{t_j}\| < \varepsilon$. Neka je $v = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \in \ell^2$ pri čemu su N i α_n privremeno nespecificirani. Uočimo one $b_{t_j} \in B$ za koje vrijedi $Tb_{t_j} = e_{t_j}$ i promotrimo uređen par $(v + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j b_{t_j}, T(v + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j b_{t_j})) \in \Gamma(T)$. Primijetimo da je

$$(v + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j b_{t_j}, T(v + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j b_{t_j})) = (\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j b_{t_j}, \sum_{j=1}^{M} \lambda_j e_{t_j}).$$

Sada je jasno da preostaje naći takve N i α_n da vrijedi

$$\|(y - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j b_{t_j}) - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n\| < \varepsilon,$$

a to je očito moguće.

Sad, ako bi skup D bio ONB za $\Gamma(T)$ bio bi i maksimalan u $\Gamma(T)$ i zato prebrojiv. Međutim, $\operatorname{span} D$ bi tada morao biti gust u $\ell^2 \oplus L^2_{cm}[0,1]$ jer je $\Gamma(T)$ gust u $\ell^2 \oplus L^2_{cm}[0,1]$. Dakle, slijedilo bi da je D fundamentalan u $\ell^2 \oplus L^2_{cm}[0,1]$ i zato bi morao i ONB prostora $\ell^2 \oplus L^2_{cm}[0,1]$. No, to je nemoguće jer je D prebrojiv, a $\ell^2 \oplus L^2_{cm}[0,1]$ neseparabilan.

Napomena 3.3.8 Neka je H_j, $j \in J$, familija Hilbertovih prostora. S $\oplus_{j\in J} H_j$ označava se skup svih funkcija $f : J \to \cup_{j\in J} H_j$ takvih da vrijedi $f(j) \in H_j, \forall j \in J$, te da $\sum_{j\in J} \|f(j)\|^2$ postoji (tj. da je familija $\{\|f(j)\|^2 : j \in J\}$ sumabilna). To je očito vektorski prostor, a u njemu je dobro definiran skalarni produkt formulom $\langle f, g\rangle = \sum_{j\in J}\langle f(j), g(j)\rangle$. Pokazuje se da je $\oplus_{j\in J} H_j$ Hilbertov prostor uz taj skalarni produkt. Vrijedi $H_j \perp H_{j'}$ za sve $j \neq j'$, pri čemu smo prostor H_j identificirali s njegovom prirodnom kopijom u $\oplus_{j\in J} H_j$.

Napomena 3.3.9 Neka je sada dana familija (W_j), $j \in J$, međusobno ortogonalnih zatvorenih potprostora Hilbertovog prostora H. Promotrimo Hilbertov prostor $\oplus_{j\in J} W_j$ uveden u prethodnoj napomeni i definirajmo preslikavanje $U : \oplus_{j\in J} W_j \to H$ formulom $Uf = \sum_{j\in J} f(j)$. S obzirom da su vektori $f(j)$ međusobno okomiti, znamo da $\sum_{j\in J} f(j)$ postoji ako i samo ako $\sum_{j\in J} \|f(j)\|^2$ postoji. Dakle, U je dobro definirano preslikavanje. Sad se lako vidi da je U linearna izometrija. Zbog izometričnosti operatora U, njegova slika $\operatorname{Im} U$ je zatvoren potprostor od H i taj potprostor se identificira s $\oplus_{j\in J} W_j$. Nadalje, jednako lako se pokazuje da je $\operatorname{Im} U$ najmanji zatvoren potprostor od H koji sadrži sve potprostore W_j.

Domaća zadaća 10

Zadatak 3.3.10 Upotpunite detalje iz napomene 3.3.8. Posebno, dokažite da je s $\langle f, g\rangle = \sum_{j\in J}\langle f(j), g(j)\rangle$ dobro definiran skalarni produkt u $\oplus_{j\in J} H_j$, te da je tako dobiven unitaran prostor potpun. *Uputa:* kopirajte argumente iz dokaza teorema 1.4.6 koristeći uvjet (1) iz propozicije 3.1.7.

Zadatak 3.3.11 Dokažite tvrdnju navedenu u napomeni 3.3.9: ako je $(f_j)_{j\in J}$ familija međusobno ortogonalnih vektora u Hilbertovom prostoru, onda $\sum_{j\in J} f_j$ postoji ako i samo ako $\sum_{j\in J} \|f_j\|^2$ postoji.

4 Hahn - Banachov teorem

4.1 Hahn - Banachov teorem za polunorme

Definicija 4.1.1 *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $p : X \to \mathbb{R}$ se zove polunorma na X ako vrijedi $p(x) \geq 0, p(\alpha x) = |\alpha| p(x), p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{F}$.*

Uočimo da iz drugog svojstva imamo i $p(0) = 0$. Jedino što još nedostaje od svojstava norme je uvjet $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ako je Y normiran prostor, svaki linearan operator $A : X \to Y$ inducira polunormu p_A na X definiranu s $p_A(x) = \|Ax\|$, $x \in X$.

Teorem 4.1.2 *Neka je p polunorma na vektorskom prostoru X, neka je Y potprostor od X, te neka je f linearan funkcional na Y takav da vrijedi $|f(y)| \leq p(y)$, $\forall y \in Y$. Tada postoji linearan funkcional F na X takav da je $F|_Y = f$ i $|F(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$.*

Teorem ćemo prvo dokazati za realne prostore, ali u nešto jačoj verziji - sa subaditivnim pozitivno homogenim funkcionalima u ulozi polunormi. Subaditivan pozitivno homogen funkcional na realnom vektorskom prostoru X je preslikavanje $p : X \to \mathbb{R}$ koje ima svojstva $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$ i $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in X$.

Teorem 4.1.3 *Neka je p subaditivan pozitivno homogen funkcional na realnom vektorskom prostoru X, neka je Y potprostor od X, te neka je f linearan funkcional na Y takav da vrijedi $f(y) \leq p(y)$, $\forall y \in Y$. Tada postoji linearan funkcional F na X takav da je $F|_Y = f$ i $F(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.*

Ovaj teorem najprije dokazujemo u specijalnoj situaciji u kojoj dani linearni funkcional proširujemo samo u jednoj dimenziji.

Lema 4.1.4 *Neka je p subaditivan pozitivno homogen funkcional na realnom vektorskom prostoru X, neka je M_0 potprostor od X, $M_0 \neq \{0\}, X$, te neka je g_0 linearan funkcional na M_0 takav da vrijedi $g_0(y) \leq p(y)$, $\forall y \in M_0$. Tada za svaki vektor $x_1 \in X \setminus M_0$ postoji linearan funkcional g_1 na potprostoru $M_1 = span\{M_0, x_1\}$ takav da je $g_1|_{M_0} = g_0$ i $g_1(x) \leq p(x)$, $\forall x \in M_1$.*

Dokaz: Svaki vektor $x \in M_1$ ima jedinstven prikaz u obliku $x = \alpha x_1 + y$, $\alpha \in \mathbb{R}, y \in M_0$. Zato možemo definirati $g_1(\alpha x_1 + y) = \alpha\gamma_1 + g_0(y)$ i dobit ćemo, za bilo koji $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, linearan funkcional na M_1 koji proširuje g_0. Pritom želimo da vrijedi $g_1(\alpha x_1 + y) \leq p(\alpha x_1 + y)$, tj.

$$\alpha\gamma_1 + g_0(y) \leq p(\alpha x_1 + y), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall y \in M_0. \tag{1}$$

Ideja je najprije nađemo γ_1 tako da nejednakost (1) bude zadovoljena za $\alpha = 1$ i $\alpha = -1$ i sve $y \in M_0$. Uočimo da po pretpostavci (1) vrijedi za $\alpha = 0$ i sve $y \in M_0$.

Ako ovdje uvrstimo $\alpha = 1$ izlazi $\gamma_1 \leq p(x_1 + y) - g_0(y)$, $\forall y \in M_0$, pa vidimo da je nužan uvjet

$$\gamma_1 \leq \mu_1 := \inf\{p(x_1 + y) - g_0(y) : y \in M_0\}. \tag{2}$$

Ako pak u (1) uvrstimo $\alpha = -1$ izlazi $-\gamma_1 + g_0(y) \leq p(-x_1 + y)$; dakle, $-p(-x_1 + y) + g_0(y) \leq \gamma_1$, $\forall y \in M_0$. Pišući $-y$ umjesto y, dobivamo još jedan nužan uvjet:

$$\gamma_1 \geq \mu_{-1} := \sup \{-p(-x_1 - y) - g_0(y) : y \in M_0\}. \tag{3}$$

Usporedbom (2) i (3) zaključujemo da nam je nužno potrebno da vrijedi $\mu_{-1} \leq \mu_1$. Na sreću, to je zaista istina. Naime, za $y, v \in M_0$ imamo

$$g_0(y) - g_0(v) = g_0(y - v) \leq p(y - v) = p((y + x_1) + (-v - x_1)) \leq p(y + x_1) + p(-v - x_1)$$

što povlači

$$-p(-v - x_1) - g_0(v) \leq p(y + x_1) - g_0(y).$$

Ako sad u posljednjoj nejednakosti s lijeve strane uzmemo supremum po svim $v \in M_0$, a s desne infimum po svim $y \in M_0$, upravo dobivamo potrebnu nejednakost $\mu_{-1} \leq \mu_1$.

Time smo dokazali da možemo odabrati neki γ_1 takav da vrijedi $\mu_{-1} \leq \gamma_1 \leq \mu_1$. S tako odabranim brojem γ_1 definirajmo $g_1(\alpha x_1 + y) = \alpha\gamma_1 + g_0(y)$. Sad trebamo dokazati da (1) vrijedi za sve $\alpha \in \mathbb{R}$. Primijetimo da trenutno znamo da (1) vrijedi samo za $\alpha = 0$ (po pretpostavci na g_0), te za $\alpha = 1$ i $\alpha = -1$ (po izboru broja γ_1).

Međutim, za $\alpha > 0$ i $y \in M_0$ imamo

$$\gamma_1 \leq \mu_1 \leq p(x_1 + \frac{y}{\alpha}) - g_0(\frac{y}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}(p(\alpha x_1 + y) - g_0(y))$$

što je upravo željena nejednakost (1).

Slično, za $\alpha < 0$ i $y \in M_0$ imamo

$$\gamma_1 \geq \mu_{-1} \geq -p(-x_1 - \frac{y}{\alpha}) - g_0(\frac{y}{\alpha}) = -p((-\frac{1}{\alpha})(\alpha x_1 + y)) - \frac{1}{\alpha}g_0(y) =$$

$$-(-\frac{1}{\alpha})p(\alpha x_1 + y) - \frac{1}{\alpha}g_0(y) = \frac{1}{\alpha}(p(\alpha x_1 + y) - g_0(y)).$$

Množenjem s α (ne zaboravimo da je $\alpha < 0$) i u ovom slučaju slijedi (1). □

Dokaz teorema 4.1.3: Neka je S skup svih linearnih funkcionala $h : D(h) \to \mathbb{R}$ koji proširuju f i za koje vrijedi $h(x) \leq p(x)$, $\forall x \in D(h)$ (uočimo da smo zahtjevom da h proširuje f implicitno i zahtijevali da bude Y bude sadržan u potprostoru $D(h)$ koji je domena od h). S je neprazan zbog $f \in S$.

Za $h_1, h_2 \in S$ definiramo $h_1 \leq h_2$ ako je h_2 proširenje od h_1. Očito, to je parcijalni uređaj na S. Uzmimo lanac $\mathcal{L}$ u S. Prvo primijetimo da je $M := \cup_{h\in\mathcal{L}} D(h)$ potprostor od X. Naime, za $x_1, x_2 \in M$ imamo $h_1, h_2 \in \mathcal{L}$ za koje vrijedi $x_1 \in D(h_1)$ i $x_2 \in D(h_2)$. Jer je $\mathcal{L}$ lanac, imamo $D(h_1) \leq D(h_2)$ (ili obratno) i sada je jasno da za sve skalare α_1, α_2 vrijedi $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in D(h_2) \leq M$.

Na M definiramo preslikavanje H tako da za $x \in M$ nađemo $h \in \mathcal{L}$ za koji vrijedi $x \in D(h)$ i onda stavimo $H(x) = h(x)$. Očito, H je dobro definiran linearan funkcional na M. Također je jasno da je $H \in S$, te da vrijedi $h \leq H$, $\forall h \in \mathcal{L}$.

Dakle, prema Zornovoj lemi S ima maksimalan element F. Tvrdimo da je $D(F) = X$. Uočimo: onog trenutka kad to pokažemo, dokaz teorema će biti završen.

Pretpostavimo da je $D(F) \neq X$. Tada možemo naći $x_1 \in X \setminus D(F)$ i primijeniti prethodnu lemu na funkcional F s domenom $D(F)$ i na vektor x_1. Tako dobivamo novi funkcional G s domenom $D(G) = \operatorname{span}\{D(F), x_1\}$ koji proširuje f, za koji vrijedi $G(x) \leq p(x)$, $\forall x \in D(G)$, te $F \leq G$ i $F \neq G$. To je kontradikcija s maksimalnošću funkcionala F u skupu S. □

Dokaz teorema 4.1.2: Uzmimo najprije da je prostor realan. Kako je $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in Y$, posebno vrijedi i $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in Y$. Jer je p polunorma, posebno je i subaditivan pozitivno homogen funkcional. Dakle, prema teoremu 4.1.3 postoji linearan funkcional F na X koji proširuje f i za koji vrijedi $F(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$. Specijalno, za svaki x imamo i $-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x)$. Dakle, zapravo vrijedi $|F(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

Pretpostavimo sad da je prostor X kompleksan. Označimo s Y_r i X_r prostore Y i X shvaćene kao realne vektorske prostore. Jasno je da je $Y_r \leq X_r$. Također, uočimo da su s $f_1(y) = \operatorname{Re} f(y)$ i $f_2(y) = \operatorname{Im} f(y)$ definirani realno linearni funkcionali na prostoru Y_r.

Sad primijetimo ključnu činjenicu: iz $f(iy) = if(y)$ slijedi $f_1(iy) + if_2(iy) = if_1(y) - f_2(y)$. Izjednačavanjem realnih dijelova u ovoj jednakosti dobivamo $f_2(y) = -f_1(iy)$; drugim riječima, f_2 je određen s f_1. Dakle, možemo pisati $f(y) = f_1(y) - if_1(iy)$, $\forall y \in Y$.

Nadalje, uočimo da je $f_1(y) \leq |f_1(y)| \leq |f(y)| \leq p(y)$, $\forall y \in Y_r$. Prema teoremu 4.1.3 sad postoji realno linearan funkcional F_1 na X_r koji proširuje f_1 i zadovoljava $F_1(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X_r$.

Definirajmo $F : X \to \mathbb{C}$ formulom $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$. Očito je F aditivno preslikavanje. Pokažimo da je kompleksno homogeno:

$$F((\sigma + i\tau)x) = F_1(\sigma x + i\tau x) - iF_1(-\tau x + i\sigma x) = F_1(\sigma x) + F_1(i\tau x) + iF_1(\tau x) - iF_1(i\sigma x) =$$

$$\sigma F_1(x) + \tau F_1(ix) + i\tau F_1(x) - i\sigma F_1(ix) = (\sigma + i\tau)F_1(x) - (\sigma + i\tau)iF_1(ix) = (\sigma + i\tau)F(x).$$

Dakle, F je linearan funkcional na originalnom prostoru X. Jasno je iz konstrukcije da F proširuje f. Na kraju, uzmimo proizvoljan $x \in X$ i pišimo $F(x) = \mathrm{e}^{-i\alpha}|F(x)|$. Tada je $|F(x)| = \mathrm{e}^{i\alpha}F(x) = F(\mathrm{e}^{i\alpha}x) =$ (jer je to realan broj, jednak je svom realnom dijelu!) $= F_1(\mathrm{e}^{i\alpha}x) \leq p(\mathrm{e}^{i\alpha}x) = |e^{i\alpha}|p(x) = p(x)$. □

Teorem 4.1.5 *(Hahn - Banachov teorem za normirane prostore) Neka je X normiran prostor i $Y \leq X$ pravi potprostor od X. Za svaki ograničen linearan funkcional $f_0 \in Y'$ postoji ograničen linearan funkcional $f \in X'$ takav da je $f|_Y = f_0$ i $\|f\| = \|f_0\|$.*

Dokaz: Uzmimo $f_0 \in Y'$ i stavimo $p(x) = \|f_0\|\|x\|$, $x \in X$. To je čak norma na X za koju vrijedi $|f_0(y)| \leq \|f_0\|\|y\| = p(y)$, $\forall y \in Y$. Prema teoremu 4.1.2 postoji linearan funkcional f na X koji proširuje f_0 i takav da vrijedi $|f(x)| \leq p(x) = \|f_0\|\|x\|$, $\forall x \in X$. Odavde zaključujemo da je f također ograničen i da vrijedi $\|f\| \leq \|f_0\|$. S druge strane, jer f proširuje f_0, obratna nejednakost $\|f_0\| \leq \|f\|$ je trivijalna. □

Napomena 4.1.6 Prethodni teorem je najčešće citirana verzija Hahn - Banchovog teorema. Verbalna formulacija glasi: svaki ograničen funkcional definiran na potprostoru normiranog prostora može se proširiti do ograničenog funkcionala definiranog na cijelom prostoru, i to bez povećanja norme. Uočimo da je i ova druga činjenica netrivijalna i ne slijedi a priori iz prve.

Korolar 4.1.7 *Dualni prostor svakog normiranog prostora $X \neq \{0\}$ je netrivijalan.*

Dokaz: Uzmimo proizvoljan potprostor M od X takav da je $\dim M < \infty$. Definirajmo proizvoljan linearan funkcional $f_0 \neq 0$ na M (npr. koristeći tehniku zadavanja na bazi i proširenja po linearnosti). Prema propoziciji 1.3.6, f_0 je ograničen. Prema prethodnom teoremu postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = \|f_0\|$. Jasno je da $f \neq 0$ jer $f_0 \neq 0$. $\square$

Netrivijalnost dualnog prostora, iako može izgledati kao nedužna činjenica, zaista se ne da argumentirati direktnije, odnosno jednostavnije. Naravno, drugačije je ako prostor ima neka dodatna svojstva. Npr. na unitarnim prostorima imamo mnoštvo ograničenih funkcionala koje dobivamo izravno iz skalarnog produkta (kao skalarno množenje s nekim fiksnim vektorom).

Domaća zadaća 11

Zadatak 4.1.8 Neka je f linearan funkcional na normiranom prostoru X. Dokažite da je f ograničen ako i samo ako je $\operatorname{Ker} f$ zatvoren potprostor od X.

4.2 Posljedice Hahn - Banachovog teorema

Kao prvu posljedicu navodimo jednostavan korolar koji će se pokazati neobično korisnim.

Korolar 4.2.1 *Neka je X normiran prostor i $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Tada postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f(x) = \|x_0\|$.*

Dokaz: Neka je M potprostor razapet s x_0. Definirajmo f_0 na M formulom $f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$. Očito je $f_0(x_0) = \|x_0\|$ i $|f_0(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\|$ odakle zaključujemo da je $\|f_0\| = 1$. Sad se primijeni teorem 4.1.5. $\square$

Korolar 4.2.2 *Neka je X normiran prostor i $x_0 \in X$. Tada je $\|x_0\| = sup\,\{|f(x_0)| : f \in X', \|f\| = 1\}$.*

Dokaz: Za $x_0 = 0$ tvrdnja je trivijalna. Neka je $x_0 \neq 0$. Jasno je da za svaki ograničen funkcional f norme 1 vrijedi $|f(x_0)| \leq \|f\|\|x_0\| = \|x_0\|$. Preostaje primijeniti prethodni korolar. $\square$

Prethodni korolar nam omogućuje da normu bilo kojeg vektora izrazimo djelovanjem nekog funkcionala iz jedinične sfere dualnog prostora. Idući rezultat nam govori da funkcionalima iz jedinične sfere dualnog prostora možemo i separirati točke bilo kojeg potprostora od točaka koje ne pripadaju zatvaraču tog potprostora. Posebno, kad je potprostor zatvoren, to daje separaciju tog potprostora od svih ostalih točaka prostora.

Teorem 4.2.3 *Neka je X_0 potprostor normiranog prostora X i neka je $x_1 \in X$ takav da je $d = d(x_1, X_0) = inf\{\|x_1 - x\| : x \in X_0\} > 0$. Tada postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i da vrijedi $f(x_1) = d$ i $f(x) = 0, \forall x \in X_0$.*

Dokaz: Najprije uočimo da pretpostavka $d > 0$ povlači $x_1 \notin \overline{X_0}$.

Neka je $M = \text{span}\,\{x_1, X_0\}$. Svaki vektor $v \in M$ ima jedinstven prikaz oblika $v = \alpha x_1 + x$ gdje je $\alpha \in \mathbb{F}$ i $x \in X_0$. Naime, kad bi vrijedilo i $v = \alpha' x_1 + x'$ za neke $\alpha' \in \mathbb{F}$ i $x' \in X_0$ slijedilo bi $\alpha' x_1 + x' = \alpha x_1 + x$ što bi za $\alpha' \neq \alpha$ povlačilo $x_1 = \frac{1}{\alpha' - \alpha}(x - x') \in X_0$.

Sad definirajmo linearan funkcional f_0 na M formulom $f_0(\alpha x_1 + x) = \alpha d$. Dokažimo da je $\|f_0\| = 1$.

Neka je $\alpha \neq 0$. Tada je $\|\alpha x_1 + x\| = |\alpha|\|x_1 + \frac{1}{\alpha}x\| \geq |\alpha|d$. Dakle je $|f_0(\alpha x_1 + x)| = |\alpha d| = |\alpha|d \leq \|\alpha x_1 + x\|$. Ovo pokazuje da je $\|f_0\| \leq 1$. Da dobijemo obratnu nejednakost uzmimo $\epsilon > 0$. Prvo nađimo vektor $x_0 \in X_0$ takav da je $\|x_1 - x_0\| < d + \epsilon$. Promotrimo jedinični vektor $v = \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \in M$; jasno je da je v dobro definiran jer $x_1 \notin X_0$ pa je nemoguće da bude $x_1 = x_0$. Za ovako odabran vektor v vrijedi $|f_0(v)| = \frac{|f(x_1) - f(x_0)|}{\|x_1 - x_0\|} = \frac{d}{\|x_1 - x_0\|} > \frac{d}{d + \epsilon}$. Dakle, $\|f_0\| \geq 1$.

Preostaje primijeniti Hahn - Banachov teorem za normirane prostore. □

Napomena 4.2.4 Pomoću prethodnog teorema možemo elegantno dokazati Rieszovu lemu. Naime, ako je Y pravi zatvoren potprostor normiranog prostora X onda prema prethodnom teoremu postoji ograničen funkcional f na X takav da je $\|f\| = 1$ i $f(y) = 0$ za sve $y \in Y$. Po definiciji operatorske norme to znači da je $1 = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$. Sad za dani $\epsilon > 0$ po definiciji supremuma postoji $x \in X$ sa svojstvima $\|x\| = 1$ i $1 - \epsilon < |f(x)|$. Odavde je $1 - \epsilon < |f(x - y)|$ za sve $y \in Y$ i zbog toga $1 - \epsilon \leq d(x, Y)$.

Korolar 4.2.5 *Podskup E normiranog prostora X je fundamentalan u X ako i samo ako je nul-funkcional jedini ograničeni funkcional na X koji iščezava na E.*

Dokaz: Neka je $\overline{\text{span}}\, E = X$ i neka za $f \in X'$ vrijedi $f|_E = 0$. Zbog linearnosti funkcionala f imamo i $f|_{\text{span}\, E} = 0$, a onda zbog neprekidnosti i $f|_{\overline{\text{span}}\, E} = 0$. Dakle, $f = 0$.

Ako je $\overline{\text{span}}\, E \neq X$ onda primjenom prethodnog teorema možemo naći netrivijalan $f \in X'$ koji iščezava čak na $\overline{\text{span}}\, E$. □

Teorem 4.2.6 *Neka je X normiran prostor čiji dual X' je separabilan. Tada je i X separabilan prostor.*

Dokaz: Neka je $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv gust gust skup u X'. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ nađimo $x_n \in X$ takav da je $\|x_n\| = 1$ i $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$. Neka je $M = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dovoljno je pokazati da je $M = X$. Naime, ako je tako, skup svih konačnih linearnih kombinacija vektora x_n s racionalnim koeficijentima je prebrojiv i gust u X.

Pretpostavimo da je $M \neq X$. Tada prema prethodnom korolaru možemo naći $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f|_M = 0$. Posebno, tada je i $f(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Kako skup $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ siječe svaku kuglu u X^*, to za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $p(n)$ takav da je $\|f - f_{p(n)}\| < \frac{1}{n}$. No, tada je

$$\frac{1}{n} > \|f - f_{p(n)}\| \geq |(f - f_{p(n)})(x_{p(n)})| = |f_{p(n)}(x_{p(n)})| \geq \frac{1}{2}\|f_{p(n)}\|.$$

Ovo pokazuje da je $\lim_{k\to\infty}\|f_{p(n)}\| = 0$. Međutim, po konstrukciji imamo $f_{p(n)} \to f$ za $n \to \infty$. Dakle, $\|f\| = 0$. Kontradikcija. □

Napomena 4.2.7 Primijetimo da su prostori koji su izometrički izomorfni identični u pogledu separabilnosti: ili su oba separabilna, ili nije niti jedan.

Sad prethodni teorem objašnjava zašto ℓ^1 ne može biti izometrički izomorfan dualu prostora ℓ^∞. Naime, znamo da je ℓ^1 separabilan. Kad bi ℓ^1 bio izometrički izomorfan s $(\ell^\infty)'$, prema prethodnom teoremu slijedilo bi da je i ℓ^∞ separabilan, što nije.

Inače, uočimo da obrat prethodnog teorema ne vrijedi. Eksplicitno, to znači da dual separabilnog prostora ne mora biti separabilan. Primjer koji pokazuje da je to zaista tako je činjenica koju smo već dokazali: $(\ell^1)'$ je izometrički izomorfan s ℓ^∞.

Sljedeći rezultat predstavlja obrat druge tvrdnje teorema 1.3.9.

Korolar 4.2.8 *Neka su X i Y normirani prostori takvi da je $X \neq \{0\}$ i da je prostor $\mathbb{B}(X, Y)$ potpun. Tada je i Y Banachov prostor.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbb{B}(X, Y)$ potpun i uzmimo Cauchyjev niz $(y_n)_n$ u Y. Za jedinični vektor $e \in X$ prema korolaru 4.2.1 postoji funkcional $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f(e) = 1$. Za $n \in \mathbb{N}$ operator $A_n : X \to Y$ definiran s $A_n x = f(x)y_n$ je očito linearan i neprekidan. Osim toga, imamo

$$\|A_n - A_m\| \leq \|f\|\|y_n - y_m\| = \|y_n - y_m\| \text{ i } \|(A_n - A_m)e\| = \|y_n - y_m\|.$$

Dakle, $\|A_n - A_m\| = \|y_n - y_m\|$ pa je i niz $(A_n)_n$ Cauchyjev. Neka je $A = \lim_{n\to\infty} A_n$. Jer niz $(A_n)_n$ konvergira prema A u normi, konvergira i po točkama. Zato je $Ae = \lim_{n\to\infty} A_n e = y_n$. □

Na kraju ovih razmatranja uzmimo normiran prostor X, pogledajmo njegov dual X' i dual duala, tzv. bidual (ili drugi dual), X''. Prostor X'' je potpun jer je dual svakog normiranog prostora potpun. Prema propoziciji 1.2.11 (b) svaki zatvoren potprostor od X'' je također potpun.

Za $x \in X$ definirajmo preslikavanje $\hat{x} : X' \to \mathbb{F}$ formulom $\hat{x}(f) = f(x)$. Očito je $\hat{x}$ linearan funkcional na X' i vrijedi $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$. Odavde vidimo da je

$\|\hat{x}\| \le \|x\|$. Time smo dokazali da je $\hat{x} \in X''$. Korolar 4.2.2 pokazuje da je zapravo $\|\hat{x}\| = \|x\|$.

Definirajmo preslikavanje $\varphi : X \to X''$ formulom $\varphi(x) = \hat{x}$. Nije teško vidjeti da je φ linearno preslikavanje (provjerite!), a prethodni račun pokazuje da je φ izometrija. Dakle, prostori X i $\mathrm{Im}\,\varphi$ su izometrički izomorfni. Kako je prostor $\overline{\mathrm{Im}\,\varphi}$ potpun (kao zatvoren potprostor potpunog prostora) i kako je $\mathrm{Im}\,\varphi$ gust u $\overline{\mathrm{Im}\,\varphi}$, slijedi da je, po definiciji, $\overline{\mathrm{Im}\,\varphi}$ upotpunjenje prostora X.

Time smo pokazali da postoji upotpunjenje svakog normiranog prostora, čime je kompletiran dokaz teorema 1.4.2.

Definicija 4.2.9 *Kaže se da je normiran prostor X refleksivan ako je $Im\,\varphi = X''$.*

Očito, svaki refleksivan prostor je potpun.

Iz razmatranja u točki 1.3. znamo da su prostori ℓ^p refleksivni za sve p strogo veće od 1 i manje od ∞. I svaki Hilbertov prostor je refleksivan.

Na kraju ovih razmatranja navodimo jednu zanimljivu posljedicu Hahn-Banachovog teorema: konstrukciju Banachovog generaliziranog limesa. Radi se o konstrukciji jednog ograničenog linearnog funkcionala na realnom prostoru ℓ^∞ čija restrikcija na prostor c je funkcional koji svakom konvergetnom nizu pridružuje njegov limes.

Prije iskaza teorema uvedimo operator lijevog pomaka na prostoru ℓ^∞. To je operator S^* definiran formulom $S^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Očito je S^* linearan i ograničen, te vrijedi $\|S^*\| = 1$.

Teorem 4.2.10 *Promotrimo realan Banachov prostor ℓ^∞. Postoji preslikavanje $\phi : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) $\phi \in (\ell^\infty)'$ *i* $\|\phi\| = 1$.

(b) Za $e = (1, 1, 1, \ldots)$ *vrijedi* $\phi(e) = 1$.

(c) $\phi(S^* x) = \phi(x), \forall x \in \ell^\infty$.

(d) Ako $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$ *konvergira, onda je* $\phi(x) = lim_{n\to\infty} x_n$.

(e) Ako za $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$ *vrijedi* $x_n \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *onda je* $\phi(x) \ge 0$.

(f) $lim\ inf_n x_n \le \phi(x) \le lim\ sup_n x_n$, *za sve* $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$.

Dokaz: Neka je $Y = \mathrm{Im}(S^* - I)$. Najprije tvrdimo da vrijedi

$$\|y + \lambda e\|_\infty \ge |\lambda|,\ \forall y \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Da to dokažemo, uzmimo proizvoljan $x = (x_n)_n \in l^\infty$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ i definirajmo $z = S^*x - x + \lambda e$. Tada je $z_n = x_{n+1} - x_n + \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zato vrijedi

$$\|z\|_\infty \ge \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |z_n| \ge \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} z_n \right| = \left| \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1) + n\lambda \right| \to |\lambda|.$$

(Uočimo da smo pri graničnom prijelazu iskoristili činjenicu $|x_{n+1} - x_1| \leq 2\|x\|_\infty$.)

Posebno, za $\lambda = 1$, (4) pokazuje da je $\mathrm{d}(Y, e) \geq 1$ pa $e \notin \overline{Y}$. Definirajmo linearan funkcional φ na $Y \dot{+} \mathrm{span}\,\{e\}$ formulom $\varphi(y + \lambda e) = \lambda$. Sad (4) pokazuje da je φ ograničen te da vrijedi $\|\varphi\| \leq 1$. Kad još uvažimo da je $\|e\|_\infty = 1$ i $\varphi(e) = 1$, slijedi $\|\varphi\| = 1$. Prema Hahn-Banachovom teoremu sada postoji $\phi \in (\ell^\infty)'$ koji proširuje φ i pritom je $\|\phi\| = \|\varphi\| = 1$. Time smo dobili (a), (b) i (c). Naime, (c) znači da se ϕ poništava na $\mathrm{Im}(S^* - I)$, a to je točno zato što je ϕ proširenje od φ koji se po definiciji poništava na $\mathrm{Im}(S^* - I)$.

Uzmimo sad $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$ takav da je $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Stavimo $\|x\|_\infty = t > 0$ i uvedimo niz $y = (y_n)_n$ formulom $y = \frac{1}{t}x$. Tada za sve y_n vrijedi $y_n \in [0, 1]$. Odavde je $\|e - y\| \leq 1$ i zato $1 - \phi(y) = \phi(e - y) \leq |\phi(e - y)| \leq \|e - y\|_\infty \leq 1$. Time smo dokazali da je $\phi(y) \geq 0$ odakle nalazimo $\phi(x) = t\phi(y) \geq 0$.

Na kraju, dokažimo (f) (što onda kao direktnu posljedicu ima i (d)).

Neka je $\alpha < \liminf_n x_n$ i $\limsup_n x_n < \beta$. Tada postoji n_0 takav da je $\alpha < x_n < \beta$, $\forall n \geq n_0$. Uvedimo nizove $y = (S^*)^{n_0}x - \alpha e$ i $z = \beta e - (S^*)^{n_0}x$. Po izboru broja n_0 to su nizovi s nenegativnim članovima. Prema već dokazanom svojstvu (e) imamo $0 \leq \phi((S^*)^{n_0}x - \alpha e) = \phi((S^*)^{n_0}x) - \alpha$ i $0 \leq \phi(\beta e - (S^*)^{n_0}x) = \beta - \phi((S^*)^{n_0}x)$. Koristeći (c) ovo možemo pisati i kao $0 \leq \phi(x) - \alpha$ i $0 \leq \beta - \phi(x)$. Dakle, vrijedi $\alpha \leq \phi(x) \leq \beta$. Kako su α i β bili proizvoljno odabrani brojevi sa svojstvom $\alpha < \liminf_n x_n$ i $\limsup_n x_n < \beta$, slijedi $\liminf_n x_n \leq \phi(x) \leq \limsup_n x_n$. $\square$

Napomena 4.2.11 Primijetimo da Banachov limes nije jedinstven jer proširenje ograničenog funkcionala s potprostora na čitav prostor općenito nije jedinstveno.

Banachov limes je, inače, primjer ograničenog funkcionala na ℓ^∞ koji nije reprezentiran vektorom iz ℓ^1. Sjetimo se da za svaki $a = (a_n)_n \in \ell^1$ možemo definirati funkcional $f_a \in (\ell^\infty)'$ formulom $f_a(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k x_k$; međutim, konstatirali smo da tim putem ne možemo dobiti sve funkcionale iz $(\ell^\infty)'$, tj. da pridruživanje $a \mapsto f_a$ nije surjekcija.

Pokažimo da Banachov limes ϕ nije oblika f_a niti za jedan $a \in \ell^1$. Zaista; u suprotnom bismo imali $\phi(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k x_k$, $\forall x \in \ell^\infty$, što bi za jedinične vektore e_n, $n \in \mathbb{N}$, povlačilo $0 = \phi(e_n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. $a = 0$ i onda $\phi = 0$.

Napomena 4.2.12 Banachov limes, iako nejedinstven, predstavlja izvjesno proširenje koncepta konvergencije i na nizove koji nisu konvergentni u standardnom smislu. Ako je ϕ (neki) Banachov limes i $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$ neki niz koji ne konvergira u klasičnom smislu, vrijednost $\phi(x)$ možemo smatrati njegovim poopćenim limesom. Pritom samo moramo imati na umu da ćemo za neki drugi Banachov limes ϕ' dobiti općenito neku drugu vrijednost $\phi'(x)$.

Ipak, ima nizova $x \in \ell^\infty$ koji nisu konvergentni, a za koje svi Banachovi limesi poprimaju istu vrijednost $\phi(x)$. Pogledajmo niz $x = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$. Uočimo da je $S^*x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ i $x + S^*x = e$. Neka je ϕ bilo koji Banachov limes. Tada, zbog $\phi(x) = \phi(S^*x)$, imamo $2\phi(x) = \phi(x) + \phi(S^*x) = \phi(x + S^*x) = \phi(e) = 1$ pa je, dakle, $\phi(x) = \frac{1}{2}$.

Nizovi s ovim svojstvom nazivaju se skoro-konvergetnim nizovima.

Domaća zadaća 12

Zadatak 4.2.13 Neka je X normiran prostor, te neka je Y konačnodimenzionalan potprostor od X. Dokažite da postoji zatvoren potprostor Z od X takav da je $Y \dot{+} Z = X$.

Zadatak 4.2.14 Neka je X normiran prostor. Dokažite da je X konačnodimenzionalan ako i samo ako je X' konačnodimenzionalan.

Zadatak 4.2.15 Pokažite da za sve normirane prostore X i Y vrijedi $(X \times_\infty Y)' \simeq X' \times_1 Y'$. Pritom smo znakom $\times_\infty$ i $\times_1$ naznačili da u odgovarajućim produktnim prostorima promatramo norme $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ i $\|(f, g)\|_1 = \|f\| + \|g\|$. Primijetite da tvrdnja posebno vrijedi i ako su X i Y potprostori od l^∞ s trivijalnim presjekom.

Zadatak 4.2.16 Odredite dual c' prostora $c \leq \ell^\infty$ svih konvergentnih nizova. *Uputa:* Uočite da je $c = c_0 \dot{+} \mathbb{C}$, pa iskoristite tvrdnju prethodnog zadatka i zadatka 1.5.15.

Zadatak 4.2.17 Neka su $f_1, \ldots, f_n, f$ linearni funkcionali na vektorskom prostoru X. Dokažite da je tada f linearna kombinacija funkcionala $f_1, \ldots, f_n$ ako i samo ako vrijedi $\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\, f_i \subseteq \mathrm{Ker}\, f$.

4.3 Slaba konvergencija nizova

Definicija 4.3.1 *Neka je X normiran prostor. Kažemo da niz $(x_n)_n$ u X slabo konvergira k vektoru $x \in X$ ako vrijedi $f(x) = lim_{n\to\infty} f(x_n), \forall f \in X'$. Ovu konvergenciju ćemo bilježiti kao $x = w - lim_{n\to\infty} x_n$ ili $x_n \stackrel{w}{\to} x$.*

Uobičajenu konvergenciju u normi prostora X u ovom kontekstu nazivamo jakom. Druga tvrdnje sljedeće propozicije opravdava taj atribut.

Propozicija 4.3.2 *Slabi limes niza je, ako postoji, jedinstven. Jaka konvergencija povlači slabu.*

Dokaz: Pretpostavimo da za niz $(x_n)_n$ u X i $x, y \in X$ vrijedi $x = w - \lim_{n\to\infty} x_n$ i $y = w - \lim_{n\to\infty} x_n$. Po definiciji je tada $f(x) = f(y)$ za svaki ograničen funkcional na X. Dakle, $f(x - y) = 0$, $\forall f \in X'$. Korolar 4.2.2 sad povlači $x = y$.

Za dokaz druge tvrdnje pretpostavimo da je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ s obzirom na normu u X. Kako je svaki $f \in X'$ neprekidan s obzirom na normu, slijedi $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, to jest $x = w - \lim_{n\to\infty} x_n$. □

Očekivano, u konačnodimenzionalnim prostorima ovi se koncepti konvergencije podudaraju.

Propozicija 4.3.3 *Neka je X konačnodimenzionalan normiran prostor. Tada niz $(x_n)_n$ u X konvergira jako k $x \in X$ ako i samo ako konvergira slabo k x.*

Dokaz:

Pretpostavimo da vrijedi $x = w - \lim_{k\to\infty} x_k$. Neka je $b = \{b_1, \dots, b_n\}$ baza u X. Promotrimo normu $\|\cdot\|_b$ u X koja je na proizvoljnom vektoru $v = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$ dana s $\|v\|_b = \max\{|\beta_1|, \dots, |\beta_n|\}$. Kako su sve norme na X ekvivalentne, dovoljno je dokazati da $\|x - x_k\|_b \to 0$ za $k \to \infty$.

Pišimo $x_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(k)} b_i$ i $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$. Promotrimo bazu $\{f_1, \dots, f_n\}$ prostora X' dualnu bazi b. Za $1 \leq j \leq n$ imamo $f_j(x) = \lim_{k\to\infty} f_j(x_k)$, što zapravo znači da je $\lambda_j = \lim_{k\to\infty} \lambda_j^{(k)}$. S obzirom da ovdje imamo konačno mnogo konvergentnih nizova, jasno je da za $\epsilon > 0$ postoji k_0 takav da $k_0 \leq k$ povlači $|\lambda_j - \lambda_j^{(k)}| < \epsilon$, $\forall j = 1, \dots, n$. Odavde je i $\|x - x_k\|_b < \epsilon$, čim je $k \geq k_0$. $\square$

Dakle, primjere nizova koji konvergiraju slabo, ali ne i jako, treba potražiti u beskonačnodimenzionalnim prostorima. Uočimo da se u svakom Hilbertovom prostoru zbog teorema o reprezentaciji ograničenih linearnih funkcionala definicioni uvjet slabe konvergencije parafrazira na sljedeći ekvivalentan način: $x = w - \lim_{n\to\infty} x_n$ ako i samo ako je $\langle x, a\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, a\rangle$, $\forall a \in H$.

Primjer 4.3.4 Neka je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru H. Za svaki vektor $x \in X$ Besselova nejednakost $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pokazuje da vrijedi $\langle x, e_n\rangle \to 0$ za $n \to \infty$. Dakle, $e_n \stackrel{w}{\to} 0$ za $n \to \infty$. S druge strane, znamo da niz $(e_n)_n$ ne konvergira u normi jer je $\|e_n - e_m\|^2 = 2$, $\forall n \neq m$.

I u mnogim drugim prostorima relativno lako se mogu naći slični primjeri.

Primjer 4.3.5 Pogledajmo standardne jedinične vektore e_n, $n \in \mathbb{N}$, u ℓ^∞. Tvrdimo da je $w - \lim_{n\to\infty} e_n = 0$.

Prije same provjere uočimo da je tvrdnja na izvjestan način netrivijalna: tvrdi se nešto o *svim* ograničenim funkcionalima na ℓ^∞, a mi nemamo eksplicitan uvid u čitav prostor $(\ell^\infty)'$ (za razliku od, na primjer, prostora $(\ell^1)'$).

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $f \in (\ell^\infty)'$ takav da $f(e_n) \not\to 0$. Posebno, to znači da postoji $\epsilon > 0$ takav da vrijedi $|f(e_n)| \geq \epsilon$ za beskonačno mnogo indeksa $n \in \mathbb{N}$. Zato možemo konstruirati podniz $(e_{p(n)})_n$ takav da vrijedi $|f(e_{p(n)})| \geq \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nađimo unimodularne brojeve λ_n za koje vrijedi $\lambda_n f(e_{p(n)}) = |f(e_{p(n)})|$.

Pogledajmo sada, za svaki $n \in \mathbb{N}$, vektor $x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{p(k)}$. Očito je $\|x_n\|_\infty = 1$ i $|f(x_n)| = \left|\sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_{p(k)})\right| = \sum_{k=1}^n |f(e_{p(k)})| \geq n\epsilon$. Kako je n proizvoljan, ovo proturječi ograničenosti funkcionala f.

S druge strane, nije teško naći ni primjere nizova koji ne konvergiraju slabo.

Primjer 4.3.6 Uzmimo ponovo vektore e_n, $n \in \mathbb{N}$, i $e = (1, 1, 1, \dots)$ u prostoru ℓ^∞. Neka je, za $n \in \mathbb{N}$, vektor $x_n \in \ell^\infty$ dan s $x_n = e - \sum_{k=1}^n e_k$ (dakle, x_n ima nule na prvih n mjesta, a svi daljnji članovi iznose 1). Tvrdimo da niz $(x_n)_n$ ne konvergira slabo u prostoru ℓ^∞.

Da to dokažemo, pretpostavimo suprotno: neka za $x \in \ell^\infty$ vrijedi $x = w - \lim_{k\to\infty} x_k$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ pogledajmo funkcional f_n koji svakom nizu iz ℓ^∞ izdvaja n-ti član. Očito je f_n ograničen. Sad iz $f_n(x) = \lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je $x =$

0. Uzmimo sada Banachov limes $\phi \in (\ell^\infty)'$ iz teorema 4.2.10. Iz $0 = w - \lim_{k\to\infty} x_k$ imamo i $0 = \phi(0) = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k)$. Međutim, to je kontradikcija jer je za svaki k niz x_k konvergentan, limes mu je 1 i zato je $\phi(x_k) = 1$.

Navedeni primjeri motiviraju detaljnije razmatranje svojstava slabo konvergentnih nizova vektora. Za početak, prisjetimo se da je svaki jako konvergentan niz ograničen. Zato ima smisla pitati mora li i slabo konvergentan niz biti ograničen. Taj odgovor nije sasvim jednostavan; u najmanju ruku bit će nam potrebni još neki alati da ga doznamo. Za sada na ovo pitanje možemo odgovoriti afirmativno u Hilbertovim prostorima. Bit argumenta sadržana je u sljedećem teoremu koji nam kaže da iz lokalne ograničenosti nekog skupa vektora u Hilbertovom prostoru možemo zaključiti da je on ograničen u standardnom smislu (u normi).

Teorem 4.3.7 *Neka je T podskup Hilbertovog prostora H koji ima sljedeće svojstvo:*

$$\forall a \in H \ \ \exists C(a) > 0 \text{ tako da vrijedi } |\langle x, a\rangle| \le C(a), \, \forall x \in T.$$

Tada je T ograničen; tj. postoji $C > 0$ takav da je $\|x\| \le C$, $\forall x \in T$.

Dokaz: Ako je $\dim H = n < \infty$, pa ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ONB za H, onda za sve $x \in T$ i svaki $a \in H$ imamo $|\langle x, a\rangle| = |\sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle\langle e_j, a\rangle| \le (\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j\rangle|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^n |\langle a, e_j\rangle|^2)^{\frac{1}{2}} \le \|a\| \cdot \sqrt{n} \cdot \max\{C(e_1), \ldots, C(e_n)\}$. Posebno, ako za proizvoljan $x \in T$ uzmemo $a = x$, alijedi lijedi $\|x\| \le \sqrt{n} \cdot \max\{C(e_1), \ldots, C(e_n)\}$, $\forall x \in T$.

Uzmimo sad da je $\dim H = \infty$ i pretpostavimo suprotno, da skup T nije ograničen. Sad postoji $x_1 \in T$ i postoji $e_1 \in H$ takav da je $\|e_1\| = 1$ i $|\langle x_1, e_1\rangle| \ge 1$. Ovo zahtijeva malo objašnjenje. Pretpostavivši suprotno, uzeli smo, posebno, da postoji vektor $x_1 \in T$ takav da je $\|x_1\| \ge 1$. Tada smo iskoristili jednakost $\|x_1\| = \|f_{x_1}\|$ gdje je f_{x_1} linearan funkcional na H induciran vektorom x_1. Sad gornji zaključak proizlazi iz činjenice da je $\|f_{x_1}\| \ge 1$.

Slično nastavljamo dalje. Pogledajmo sve funkcionale f_x, $x \in T$. Jesu li njihove norme na zatvorenom potprostoru $(\text{span}\{x_1, e_1\})^\perp$ ograničene nekom konstantom neovisnom o x? Ako da, s obzirom na to da je prostor $\text{span}\{x_1, e_1\}$ konačnodimenzionalan, slijedilo bi da imamo zajedničku ogradu za sve $\|f_x\|$, $x \in T$, suprotno pretpostavci. Zato možemo naći $x_2 \in T$ takav da je norma funkcionala f_{x_2} na potprostoru $(\text{span}\{x_1, e_1\})^\perp$ veća od unaprijed zadanog broja. Dakle, postoji $x_2 \in T$ i postoji $e_2 \in H$ tako da je $\|e_2\| = 1$, $e_2 \perp \text{span}\{x_1, e_1\}$ i $|\langle x_2, e_2\rangle| \ge 2(C(e_1) + 2)$.
Induktivno nalazimo x_{n+1} i e_{n+1} takve da je $\|e_{n+1}\| = 1$, $e_{n+1} \perp \text{span}\{x_1, \ldots x_n, e_1, \ldots e_n\}$ i

$$|\langle x_{n+1}, e_{n+1}\rangle| \ge (n+1) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} C(e_j) + n + 1 \right). \tag{5}$$

Uvedimo vektor $e = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} e_n$. Ova definicija je dobra jer koeficijenti $\frac{1}{n}$ čine ?ll^2-niz. Sada zbog $e_j \perp x_{n+1}$, $\forall j > n+1$, imamo

$$|\langle x_{n+1}, e\rangle| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \langle x_{n+1}, e_j\rangle + \frac{1}{n+1} \langle x_{n+1}, e_{n+1}\rangle \right|. \tag{6}$$

Osim toga, vrijedi

$$\frac{1}{n+1}(n+1)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}C(e_j)+n+1\right)\overset{(5)}{\leq}\left|\frac{1}{n+1}\langle x_{n+1},e_{n+1}\rangle\right|=$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\langle x_{n+1},e_j\rangle+\frac{1}{n+1}\langle x_{n+1},e_{n+1}\rangle-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\langle x_{n+1},e_j\rangle\right|\leq$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\langle x_{n+1},e_j\rangle+\frac{1}{n+1}\langle x_{n+1},e_{n+1}\rangle\right|+\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\langle x_{n+1},e_j\rangle\right|\leq$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\langle x_{n+1},e_j\rangle+\frac{1}{n+1}\langle x_{n+1},e_{n+1}\rangle\right|+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}C(e_j).$$

Odavde dobivamo

$$|\langle x_{n+1},e\rangle|\overset{(6)}{=}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\langle x_{n+1},e_j\rangle+\frac{1}{n+1}\langle x_{n+1},e_{n+1}\rangle\right|\geq$$

$$\frac{1}{n+1}(n+1)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}C(e_j)+n+1\right)-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}C(e_j)=n+1.$$

Dobiveni rezultat pokazuje da skup $\{|\langle x,e\rangle|:x\in T\}$ nije ograničen, što je kontradikcija s pretpostavkom teorema. $\square$

Korolar 4.3.8 *Svaki slabo konvergentan niz u Hilbertovom prostoru je ograničen.*

Dokaz: Neka u Hilbertovom prostoru H vrijedi $x_n \xrightarrow{w} x$. Za svaki $a\in H$ tada je niz $(\langle x_n,a\rangle)_n$ konvergentan, pa zato i ograničen. Prema prethodnom teoremu sada znamo da je skup $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ ograničen. $\square$

U nastavku ćemo dokazati da je slabo konvergentan niz nužno ograničen u svakom normiranom prostoru. To će biti posljedica jednog od klasičnih rezultata funkcionalne analize - teorema uniformne ograničenosti. Pritom ćemo dokazati i mnoge druge opće rezultate vezane uz slabu konvergenciju i slabe topologije. S druge strane, na konkretnoj razini slabo konvergentni nizovi u velikoj mjeri odražavaju specifičnost svakog pojedinog prostora. Na primjer, pokazuje se da je u svakom Hilbertovom prostoru klasa slabo konvergentnih nizova znatno šira od klase jako konvergentnih nizova. Potpuno suprotan primjer u tom pogledu predstavlja prostor ℓ^1: niz vektora u ℓ^1 konvergira slabo ako i samo ako konvergira jako (vidite zadatak 5.2.21).

Ovo uvodno proučavanje slabe konvergencije završit ćemo jednom općom opaskom koja će motivirati početna razmatranja u sljedećem poglavlju. Slabu konvergenciju nizova uveli smo direktno, bez prethodnog uvođenja neke norme, odnosno metrike ili topologije. Postavlja se pitanje je li i ova konvergencija, poput jake, zapravo konvergencija u odnosu na neku novu (drugu) normu.

Primijetimo da je odgovor potvrdan u konačno dimenzionalnim prostorima: tamo je slaba konvergencija podudarna s jakom pa se, dakle, radi o konvergenciji u normiranom prostoru. Što je u tom pogledu s beskonačnodimenzionalnim prostorima?

Ovdje ćemo odgovoriti na ovo pitanje za Hilbertove prostore.

Pretpostavimo da je H Hilbertov prostor na kojem, osim norme $\|\cdot\|$ inducirane skalarnim produktom postoji i norma $\|\cdot\|_w$ u kojoj je konvergencija nizova vektora iz H ekvivalentna slaboj konvergenciji. Drugim riječima, pretpostavljamo da za nizove $(x_n)_n$ u H vrijedi

$$\|x_n - x\|_w \to 0 \Longleftrightarrow x_n \overset{w}{\to} x.$$

Tvrdimo da je tada nužno $\dim H < \infty$.

Da to dokažemo, najprije ćemo pokazati:

$$\exists M > 0 \text{ tako da } \|x\|_w = 1 \Longrightarrow \|x\| \leq M. \tag{7}$$

Pretpostavimo suprotno, to jest da takav $M > 0$ ne postoji. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo naći vektor $x_n \in H$ takav da je $\|x_n\|_w = 1$ i $\|x_n\| \geq n^2$. Pogledajmo niz $(\frac{1}{n}x_n)_n$. Kako je $\|\frac{1}{n}x_n\|_w = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, taj niz teži u 0 u normiranom prostoru $(H, \|\cdot\|_w)$. Prema pretpostavci, $\frac{1}{n}x_n \overset{w}{\to} 0$. Korolar 4.3.8 nam sad kaže da je niz $(\frac{1}{n}x_n)_n$ ograničen u originalnoj normi $\|\cdot\|$ prostora H. Međutim, to je nemoguće zbog $\|\frac{1}{n}x_n\| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, po konstrukciji vektora x_n.

Dakle, vrijedi (7). Uzmimo proizvoljan $x \in H$, $x \neq 0$. Tada je $\|\frac{1}{\|x\|_w}x\|_w = 1$, pa prema (7) vrijedi $\|\frac{1}{\|x\|_w}x\| \leq M$, to jest $\|x\| \leq M\|x\|_w$. Uočimo da ovaj zadnji zaključak vrijedi na trivijalan način i za nul-vektor.

Dobivena nejednakost odmah pokazuje: ako niz $(x_n)_n$ konvergira u odnosu na normu $\|\cdot\|_w$, onda taj niz konvergira k istom limesu i s obzirom na normu $\|\cdot\|$. Drugim riječima, slaba konvergencija povlači jaku. Uvažavajući propoziciju 4.3.2 zaključujemo da se u H jaka i slaba konvergencija nizova zapravo podudaraju. Sad iz primjera 4.3.4 odmah vidimo da je nužno $\dim H < \infty$.

U idućem poglavlju ćemo vidjeti da je u pozadini slabe konvergencije nizova tzv. slaba topologija, a pokazat će se da slaba topologija ni u jednom beskonačnodimenzionalnom prostoru X nije metrizabilna (to jest, ne da se izvesti iz neke norme, čak niti metrike na X).

Domaća zadaća 13

Zadatak 4.3.9 Neka u Hilbertovom prostoru H za niz $(x_n)_n$ i vektor x vrijedi $x = w - \lim_{n\to\infty} x_n$ i $\|x\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$. Dokažite da je tada i $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

5 Slabe topologije

5.1 Baza topologije i aksiomi prebrojivosti

U ovoj točki opisujemo neke osnovne topološke pojmove. Cilj nam je izložiti rješenja dvaju problema koji se često javljaju u praksi:

- na zadanom skupu X naći najmanju topologiju koja sadrži zadanu familiju $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$,
- na zadanom skupu X naći najmanju topologiju s obzirom na koju su zadana preslikavanja $f_j : X \to X_j$, $j \in J$, neprekidna, pri čemu su svi X_j topološki prostori.

Općenito, ako su τ_1 i τ_2 topologije na skupu X kažemo da je τ_1 slabija ili manja od τ_2 (odnosno, da je τ_2 jača ili veća od τ_1) ako je $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Dakle, jača topologija je finija; u njoj je više otvorenih, pa onda i više zatvorenih skupova. Očito, ako neki niz ili hiperniz konvergira u jačoj topologiji, onda konvergira k istom limesu i u svakoj slabijoj topologiji.

Definicija 5.1.1 *Neka je τ topologija na X. Baza okolina u točki $x \in X$ je familija $\mathcal{O}(x) \subseteq \tau$ takva da vrijedi:*

(a) *$x \in V$, $\forall V \in \mathcal{O}(x)$;*

(b) *za svaki $U \in \tau$ takav da je $x \in U$ postoji $V \in \mathcal{O}(x)$ takav da je $V \subseteq U$.*

Na primjer, u normiranom prostoru bazu okolina u točki x čine sve kugle $K(x, r)$ s centrom u x. Odmah uviđamo da baza okolina u točki nije jedinstveno određen pojam, jer u ovom primjeru mogli bismo uzeti i sve kugle s centrom u x i s racionalnim radijusima.

Definicija 5.1.2 *Baza topologije τ na X je bilo koja familija $\mathcal{B} \subseteq \tau$ koja za svaku točku $x \in X$ sadrži kao podfamiliju bazu okolina u x.*

U normiranom prostoru jednu moguću bazu topologije čini familija svih otvorenih kugala. Iduća propozicija odgovara na pitanje kako prepoznati je li neka familija baza *zadane* topologije na skupu X.

Propozicija 5.1.3 *Neka je τ topologija na X i $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Tada je $\mathcal{B}$ baza za τ ako i samo ako je svaki neprazan otvoren skup (dakle, $U \in \tau$, $U \neq \emptyset$) unija elemenata iz $\mathcal{B}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza za τ i uzmimo $U \in \tau$, $U \neq \emptyset$. Za $x \in U$ postoji $V_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in V_x \subseteq U$. Očito, $U = \cup_{x \in U} V_x$.

Obratno, neka je svaki neprazan otvoren skup unija elemenata iz $\mathcal{B}$. Neka je $x \in X$. Stavimo $\mathcal{O}(x) = \{V \in \mathcal{B} : x \in V\}$. Sada je dovoljno pokazati da je $\mathcal{O}(x)$ baza okolina u točki x. Svojstvo (a) iz definicije 5.1.1 je jasno. Uzmimo $U \in \tau$ takav da je $x \in U$. Jer je U nekakva unija skupova iz $\mathcal{B}$, postoji $V \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in V \subseteq U$. Po definiciji familije $\mathcal{O}(x)$ imamo $V \in \mathcal{O}(x)$. $\square$

Za razliku od prethodne, iduća propozicija odgovara na pitanje kako prepoznati je li neka familija baza *ikoje* topologije na skupu X.

Propozicija 5.1.4 *Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Tada je $\mathcal{B}$ baza neke topologije τ na X ako i samo ako vrijedi*

(a) *za svaki $x \in X$ postoji $V_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in V_x$;*

(b) *za sve $U, V \in \mathcal{B}$ i sve $x \in U \cap V$ postoji $W \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in W \subseteq U \cap V$.*

U tom slučaju, topologija čija baza je $\mathcal{B}$ je familija svih mogućih unija elemenata iz $\mathcal{B}$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{B}$ baza za τ. Uzmimo proizvoljan $x \in X$. Po definiciji, $\mathcal{B}$ sadrži neku bazu okolina $\mathcal{O}(x)$ točke x. Svaki od skupova $V_x \in \mathcal{O}(x)$ sadrži točku x i leži u familiji $\mathcal{B}$, pa je time svojstvo (a) provjereno. Uzmimo sad $U, V \in \mathcal{B}$. Jer je $\mathcal{B}$ baza za τ, prije svega je $\mathcal{B} \subseteq \tau$, pa je zato $U \cap V \in \tau$. Za $x \in U \cap V$ prema svojstvu (b) iz definicije 5.1.1 postoji $W \in \mathcal{O}(x) \subseteq \mathcal{B}$ takav da je $W \subseteq U \cap V$.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da imamo svojstva (a) i (b) i definirajmo $\tau = \{U \subseteq X : \forall x \in U,\ \exists V \in \mathcal{B} \text{ tako da } x \in V \subseteq U\}$. Trivijalno vrijedi $\emptyset \in \tau$, a zbog (a) imamo i $X \in \tau$. Evidentno je familija τ zatvorena na proizvoljne unije. Odaberimo $U_1, U_2 \in \tau$ i pogledajmo proizvoljan $x \in U_1 \cap U_2$. Zbog $U_1, U_2 \in \tau$ imamo $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ takve da je $x \in V_1 \subseteq U_1$ i $x \in V_2 \subseteq U_2$. Sad prema pretpostavci (b) postoji $W \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in W \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Dakle, familija τ je zatvorena na dvočlane, pa onda i na sve konačne presjeke svojih elemenata.

Jasno je da je $\mathcal{B} \subseteq \tau$ i jasno je da je $\mathcal{B}$ baza za τ; za točku $x \in X$ odaberemo $\mathcal{O}(x)$ kao familiju svih skupova iz $\mathcal{B}$ koji sadrže x. Zadnja tvrdnja sad slijedi direktnom primjenom prethodne propozicije. □

Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Označimo s $\tau(\mathcal{E})$ najmanju topologiju na X koja sadrži familiju $\mathcal{E}$. Uočimo prije svega da na X postoji bar jedna topologija koja sadrži $\mathcal{E}$ - to je svakako diskretna topologija $\mathcal{P}(X)$. Sada je jasno da je $\tau(\mathcal{E})$ zapravo presjek svih topologija na X koje sadrže zadanu familiju $\mathcal{E}$. Iduća propozicija opisuje $\tau(\mathcal{E})$ eksplicitno.

Propozicija 5.1.5 *Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Tada se $\tau(\mathcal{E})$ sastoji od skupa X, te svih unija svih konačnih presjeka elemenata familije $\mathcal{E}$.*

Dokaz: Označimo s τ_0 familiju koja se sastoji od X i svih unija konačnih presjeka elemenata od $\mathcal{E}$. Po definiciji, svaka topologija na X koja sadrži $\mathcal{E}$, sadrži i τ_0. Zato i $\tau(\mathcal{E})$ sadrži τ_0.

Da dokažemo obrat, označimo s $\mathcal{B}$ familiju koja se sastoji od X i svih konačnih presjeka elemenata od $\mathcal{E}$. Očito, $\mathcal{B}$ zadovoljava (a) i (b) iz prethodne propozicije, pa je $\mathcal{B}$ baza neke topologije na X koju možemo označiti s τ. Prema propoziciji 5.1.3, τ je familija svih mogućih unija elemenata od $\mathcal{B}$; dakle, $\tau = \tau_0$. Kako τ sadrži $\mathcal{E}$, to je i $\tau \supseteq \tau(\mathcal{E})$. Kako je $\tau = \tau_0$, to zapravo znači $\tau_0 \supseteq \tau(\mathcal{E})$. □

Definicija 5.1.6 *Familija $\mathcal{E}$ se naziva podbaza topologije $\tau(\mathcal{E})$.*

Definicija 5.1.7 *Kažemo da topološki prostor X (odnosno topologija na X) zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti ako za svaku točku $x \in X$ postoji prebrojiva baza okolina u x. Kaže se da topološki prostor X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti ako topologija na X ima prebrojivu bazu.*

Napomena 5.1.8 **(a)** Ako τ zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti onda za svaku točku $x \in X$ možemo naći bazu okolina $(U_n)_n$ u x za koju vrijedi $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \ldots$.

Zaista, ako niz $(V_n)_n$ čini bazu okolina u x, stavimo $U_1 = V_1$, $U_2 = V_1 \cap V_2$ i, općenito, $U_n = V_1 \cap \ldots \cap V_n$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Svaki metrički prostor, pa posebno i svaki normiran prostor zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Prebrojivu bazu okolina u svakoj točki čine kugle s centrom u toj točki i radijusima $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) Metrički prostor zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti ako i samo ako je separabilan. I općenito, drugi aksiom prebrojivosti povlači separabilnost.

Podsjetimo se definicije konvergentnog (hiper)niza u topološkom prostoru.

Definicija 5.1.9 *Kaže se da hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ u topološkom prostoru X konvergira k $x \in X$ ako za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ koji sadrži x postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ sa svojstvom $\lambda_0 \leq \lambda \Rightarrow x_\lambda \in U$.*

Napomena koja slijedi poopćuje tvrdnju leme 1.1.21.

Napomena 5.1.10 Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Tada za svaku točku $x \in \overline{A}$ i svaki otvoren skup U koji sadrži x vrijedi $U \cap A \neq \emptyset$.

Zaista, uzmimo $x \in \overline{A}$ i otvoren skup U koji sadrži x takav da je $U \cap A = \emptyset$. Tada je $A \subseteq X \setminus U$ i zato, jer je skup $X \setminus U$ zatvoren, i $\overline{A} \subseteq X \setminus U$. Dakle, $\overline{A} \cap U = \emptyset$ - no, to je kontradikcija jer je $x \in \overline{A} \cap U$. $\square$

Sljedeće dvije propozicije nadopunjuju, odnosno poopćuju tvrdnju propozicije 1.1.22.

Propozicija 5.1.11 *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$.*

Ako je $x = lim_{n\to\infty} x_n$ za neki niz $(x_n)_n$ točaka iz A onda je $x \in \overline{A}$.

Ako X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti i ako je $x \in \overline{A}$ onda postoji niz $(x_n)_n$ u A takav da je $x = lim_{n\to\infty} x_n$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno: neka je $x \in X \setminus \overline{A}$. Jer je taj skup otvoren i sadrži točku x, po definiciji konvergencije postoji n_0 takav da $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in X \setminus \overline{A}$ što je kontradikcija s $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Uzmimo $x \in \overline{A}$ i, u skladu s napomenom 5.1.8 (a), padajući niz $(U_n)_n$ koji tvori bazu okolina u x. Jer su svi skupovi U_n otvoreni i sadrže točku $x \in \overline{A}$, prema prethodnoj napomeni svaki od tih skupova ima neprazan presjek s A. Odaberimo $x_n \in U_n \cap A$, $n \in \mathbb{N}$. Da dokažemo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ odaberimo proizvoljan otvoren skup U koji sadrži x. Jer niz $(U_n)_n$ čini bazu okolina u x, postoji n_0 takav da je $U_{n_0} \subseteq U$. Sad za $n \geq n_0$ imamo $x_n \in U_n \cap A \subseteq U_{n_0} \cap A \subseteq U_{n_0} \subseteq U$. $\square$

Propozicija 5.1.12 *Neka je X topološki prostor, $A \subseteq X$ i $x \in X$. Tada je $x \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ elemenata iz A za koji vrijedi $x = lim_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$.*

Dokaz: Neka je $x = \lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ za neki hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u A. Da vrijedi $x \in \overline{A}$, pokazuje se točno kao u prvom dijelu dokaza prethodne propozicije.

Obratno, neka je $x \in \overline{A}$. Pogledajmo familiju $\mathcal{O}(x)$ svih otvorenih skupova koji sadrže x i usmjerimo je obratnom inkluzijom: $U \le V \Leftrightarrow U \supseteq V$. Za svaki $U \in \mathcal{O}(x)$ znamo prema napomeni 5.1.10 da je $U \cap A \neq \emptyset$, pa za svaki $U \in \mathcal{O}(x)$ možemo odabrati $x_U \in U \cap A$. Tako smo dobili hiperniz $(x_U)_{U\in\mathcal{O}(x)}$ u A. Da dokažemo da vrijedi $x = \lim_{U\in\mathcal{O}(x)} x_U$, odaberimo proizvoljan otvoren skup V koji sadrži x. Primijetimo da je $V \in \mathcal{O}(x)$; taj V ovdje sam za sebe igra ulogu kritičnog indeksa iz definicije konvergencije hiperniza. Zaista, za svaki $U \in \mathcal{O}(x)$ takav da je $V \le U$ imamo $U \subseteq V$ i stoga je $x_U \in V$. $\square$

Iz prethodnih dviju propozicija vidimo da nizovi nisu dovoljni za karakterizaciju zatvarača u proizvoljnom topološkom prostoru. Ako niz točaka nekog skupa konvergira, limes je svakako u zatvaraču toga skupa (i u tom dijelu nema razlike u odnosu na situaciju u normiranim i metričkim prostorima). Međutim, obrat ne vrijedi: točka koja leži u zatvaraču skupa nije nužno limes nekog niza elemenata tog skupa. Prethodna propozicija tek jamči da postoji hiperniz koji k njoj konvergira. Ubrzo ćemo vidjeti primjere konkretnih topoloških prostora gdje nizovi zaista nisu dovoljni za opis točaka zatvarača. Prema drugoj tvrdnja propozicije 5.1.11 ti prostori neće zadovoljavati prvi aksiom prebrojivosti.

Slična situacija je i s opisom neprekidnih funkcija.

Definicija 5.1.13 *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$. Kaže se da je funkcija f neprekidna u točki $x \in X$ ako za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$ koji sadrži točku $f(x)$ postoji otvoren skup $U \subseteq X$ koji sadrži x i za koji vrijedi $f(U) \subseteq V$.*

Kaže se da je f neprekidna na X ako je f neprekidna u svakoj točki $x \in X$.

Propozicija 5.1.14 *Neka su X i Y topološki prostori, $f : X \to Y$ i $x \in X$.*

Ako je f neprekidna u x i ako za neki niz $(x_n)_n$ u X vrijedi $x = lim_{n\to\infty} x_n$ onda je i $f(x) = lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Ako X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti i ako za svaki niz $(x_n)_n$ u X takav da je $x = lim_{n\to\infty} x_n$ vrijedi $f(x) = lim_{n\to\infty} f(x_n)$ onda je f neprekidna u x.

Dokaz: Neka je f neprekidna i neka je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Odaberimo proizvoljan otvoren skup $V \subseteq Y$ koji sadrži $f(x)$. Jer je f neprekidna u x, postoji otvoren $U \subseteq X$ takav da je $x \in U$ i $f(U) \subseteq V$. Jer je U otvoren, po definiciji konvergencije postoji n_0 takav da $n \ge n_0 \Rightarrow x_n \in U$. Jer je $f(U) \subseteq V$, za sve takve indekse n vrijedi $f(x_n) \in V$; dakle, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Obratno, pretpostavimo da X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti i da da f čuva konvergenciju nizova u točki x. Pretpostavimo suprotno tvrdnji; neka f ima prekid u x. To znači da postoji otvoren skup $V \subseteq Y$ koji sadrži točku $f(x)$ sa svojstvom: za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ koji sadrži točku x vrijedi $f(U) \not\subseteq V$. Uzmimo bazu okolina $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \ldots$ u točki x kao u napomeni 5.1.8 (a) i za svaki $n \in \mathbb{N}$ nađimo točku $x_n \in U_n$ takvu da $f(x_n) \notin V$. Jasno je da vrijedi $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (to se vidi identičnom argumentacijom kao na kraju dokaza propozicije 5.1.11). Sad bi zbog pretpostavke niz $(f(x_n))_n$ morao konvergirati k $f(x)$; međutim, to je nemoguće jer svi članovi toga niza su izvan skupa V. $\square$

Propozicija 5.1.15 *Neka su X i Y topološki prostori, $f : X \to Y$ i $x \in X$. Funkcija f je neprekidna u x ako i samo ako za svaki hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u X takav da je $x = lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ vrijedi $f(x) = lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)$.*

Dokaz: U jednom smjeru tvrdnja se dokazuje točno kao prva tvrdnja prethodne propozicije.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da za svaki hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u X takav da je $x = \lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ vrijedi $f(x) = \lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji; neka f ima prekid u x. Tada postoji otvoren skup V u Y koji sadrži točku $f(x)$ i ima svojstvo: za svaki otvoren skup U u X koji sadrži točku točku x vrijedi $f(U) \not\subseteq V$. Označimo opet s $\mathcal{O}(x)$ familiju svih otvorenih skupova u X koji sadrže točku x i ponovo je usmjerimo obratnom inkluzijom. Za svaki $U \in \mathcal{O}(x)$ nađimo $x_U \in U$ takav da $f(x_U) \notin V$. Tako smo dobili hiperniz $(x_U)_{U\in\mathcal{O}(x)}$ koji konvergira k x. Zaista; neka je U_0 proizvoljan otvoren skup u X koji sadrži x. Uočimo da je $U_0 \in \mathcal{O}(x)$. Sad za $U_0 \le U$ imamo $U \subseteq U_0$ pa je $x_U \in U_0$. S druge strane, hiperniz $(f(x_U))_{U\in\mathcal{O}(x)}$ očito ne može konvergirati prema $f(x)$ jer su svi njegovi članovi izvan skupa V. $\square$

Prethodne dvije propozicije pokazuju: dobro ponašanje prema konvergentnim nizovima je nužno, ali ne i dovoljno za neprekidnost. Ubrzo ćemo vidjeti i konkretne primjere diskontinuiranih funkcija definiranih na topološkim prostorima koje će konvergentne nizove prevoditi u konvergentne nizove.

Napomena 5.1.16 Ako su X i Y topološki prostori, lako se pokazuje: funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna na X ako i samo ako je za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ njegova praslika $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X.

Kako je $\cup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}(\cup_{i\in I} V_i)$, vidimo da je ekvivalentan i sljedeći zahtjev: za svaki $V \in \mathcal{B}$, gdje je $\mathcal{B}$ neka baza topologije na Y i skup $f^{-1}(V)$ je otvoren u X.

Definicija 5.1.17 *Neka je X neprazan skup i $(f_j)_{j\in J}$ familija preslikavanja $f_j : X \to Y_j$, pri čemu su Y_j, $j \in J$, topološki prostori. Slaba topologija na X inducirana familijom $(f_j)_{j\in J}$ je najmanja topologija na X u odnosu na koju su sva preslikavanja f_j, $j \in J$, neprekidna. Tu topologiju označavamo sa $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$.*

Napomena 5.1.18 Očito, ako želimo da je svako od preslikavanja f_j neprekidno na X, svaki skup oblika $f_j^{-1}(V)$, gdje je V otvoren u Y_j i $j \in J$, mora biti otvoren u X. Dakle, ako s τ_j označimo topologiju na Y_j, $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ je najmanja topologija na X koja sadrži familiju $\mathcal{E} = \{f_j^{-1}(V) : V \in \tau_j, j \in J\}$. Prema propoziciji 5.1.5, $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ je familija svih unija konačnih presjeka elemenata iz $\mathcal{E}$.

Ako uvažimo napomenu 5.1.16, isti zaključak slijedi ako $\mathcal{E}$ zamijenimo familijom $\mathcal{E}_\mathcal{B} = \{f_j^{-1}(V) : V \in \mathcal{B}_j, j \in J\}$, gdje je $\mathcal{B}_j$ baza topologije τ_j na Y_j.

Propozicija 5.1.19 *Neka je dana slaba topologija $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ na skupu X. Hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ u X konvergira s obzirom na $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ k $x \in X$ ako i samo ako vrijedi $f_j(x) = lim_{\lambda\in\Lambda} f_j(x_\lambda)$, $\forall j \in J$.*

Dokaz: Jer su sva preslikavanja f_j neprekidna s obzirom na $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$, jedan smjer slijedi direktno iz propozicije 5.1.15.

Obratno, pretpostavimo da za hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ vrijedi $f_j(x) = \lim_{\lambda\in\lambda} f_j(x_\lambda)$, $\forall j \in J$. Odaberimo proizvoljan otvoren skup $U \subseteq X$ koji sadrži točku x. Prema prethodnoj napomeni, postoje $j_1, \ldots, j_n \in J$, $n \in \mathbb{N}$, i skupovi $V_{j_1}, \ldots, V_{j_n}$ otvoreni u $Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_n}$, respektivno, takvi da je $x \in \cap_{i=1}^n f_{j_i}^{-1}(V_{j_i}) \subseteq U$. Odavde zaključujemo da je $f_{j_i}(x) \in V_{j_i}$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$. Zbog pretpostavke, za svaki indeks $i = 1, 2, \ldots, n$, možemo naći $\lambda_i \in \Lambda$ sa svojstvom $\lambda_i \leq \lambda \Rightarrow f_{j_i}(x_\lambda) \in V_{j_i}$. Odaberimo $\lambda_0 \in A$ sa svojstvom $\lambda_i \leq \lambda_0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Sada za $\lambda_0 \leq \lambda$ imamo $f_{j_i}(x_\lambda) \in V_{j_i}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, odakle zaključujemo da za $\lambda_0 \leq \lambda$ vrijedi $x_\lambda \in \cap_{i=1}^n f_{j_i}^{-1}(V_{j_i}) \subseteq U$. $\square$

Definicija 5.1.20 *Kaže se da je topološki prostor X Hausdorffov (ili da je topologija na X Hausdorffova) ako za svake dvije različite točke $x_1, x_2 \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $U_1, U_2 \subseteq X$ takvi da je $x_1 \in U_1$ i $x_2 \in U_2$.*

Definicija 5.1.21 *Neka je $(f_j)_{j\in J}$ familija preslikavanja definiranih na skupu X. Kažemo da familija $(f_j)_{j\in J}$ razlikuje točke od X ako za svake dvije različite točke $x_1, x_2 \in X$ postoji $j_0 \in J$ takav da vrijedi $f_{j_0}(x_1) \neq f_{j_0}(x_2)$.*

Propozicija 5.1.22 *Slaba topologija $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ na X je Hausdorffova ako su svi prostori Y_j, $j \in J$, Hausdorffovi i ako familija $(f_j)_{j\in J}$ razlikuje točke od X.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno. Prema tvrdnji zadatka 5.1.25 postoji hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ koji u topologiji $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ ima dva različita limesa: x_1 i x_2. Jer familija $(f_j)_{j\in J}$ razlikuje točke od X, postoji $j_0 \in J$ za koji vrijedi $f_{j_0}(x_1) \neq f_{j_0}(x_2)$. S druge strane, prema prethodnoj propoziciji, za sve indekse j vrijedi $f_j(x_1) = \lim_{\lambda\in\Lambda} f_j(x_\lambda)$ i $f_j(x_2) = \lim_{\lambda\in\Lambda} f_j(x_\lambda)$. Kako je prostor Y_j Hausdorffov, to je nemoguće. $\square$

Domaća zadaća 14

Zadatak 5.1.23 Pokažite da je niz $(U_n)_n$ konstruiran u napomeni 5.1.8(a) zaista baza okolina u točki x.

Zadatak 5.1.24 Pokažite da je definicija 5.1.13 u slučaju kad su X i Y normirani prostori ekvivalentna s definicijom 1.1.12.

Zadatak 5.1.25 Dokažite: topološki prostor X je Hausdorffov ako i samo ako je limes svakog konvergentnog hiperniza u X jedinstven.

Uputa. Neka X nije Hausdorffov; neka točke $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, nemaju disjunktne otvorene okoline. Označimo s $\mathcal{O}(x_i)$ familiju svih otvorenih skupova u X koji sadrže točku x_i, $i = 1, 2$. Familiju $\mathcal{O}(x_1) \times \mathcal{O}(x_2)$ usmjerimo relacijom $(U_1, U_2) \leq (V_1, V_2) \Rightarrow U_1 \supseteq V_1 \,\&\, U_2 \supseteq V_2$. Sad za $(U_1, U_2) \in \mathcal{O}(x_1) \times \mathcal{O}(x_2)$ uzmimo točku $x_{(U_1,U_2)} \in U_1 \cap U_2$. Pokažite se da tako konstruiran hiperniz konvergira i prema x_1 i prema x_2.

5.2 Slabe topologije na normiranim prostorima

Definicija 5.2.1 *Slaba topologija na normiranom prostoru X je slaba topologija na X inducirana svim ograničenim funkcionalima $f \in X'$. Ovu topologiju označavamo sa $\sigma(X, X')$.*

Dometnimo odmah da oznake topoloških pojmova vezanih uz slabu topologiju na normiranom prostoru obično dopunjujemo simbolom w. Tako npr. pišemo $x = w - \lim_\alpha x_\alpha$ i $\overline{S}^w$ kad označavamo limes hiperniza ili zatvarač skupa s obzirom na slabu topologiju $\sigma(X, X')$.

Inače u ovom kontekstu se topologija norme ponekad zove jakom topologijom na X. Posebno, često se kaže, kad neki (hiper)niz konvergira u normi, da konvergira jako, i tu konvergenciju onda ponekad naznačavamo simbolom s uz oznaku limesa.

Napomena 5.2.2 Dakle, $\sigma(X, X')$ je najmanja (najslabija) topologija na X u kojoj su svi funkcionali $f \in X'$ neprekidni. Kako je ograničenost operatora ekvivalentna neprekidnosti s obzirom na normu, znamo da su svi $f \in X'$ neprekidni u topologiji norme. Zato je slaba topologija $\sigma(X, X')$ slabija od topologije norme.

Posebno, slijedi da svaki hiperniz koji konvergira u normi, konvergira i slabo i to k istom limesu. To je opća činjenica; međutim, u ovoj situaciji to možemo lagano vidjeti i direktno. Naime, svaki funkcional $f \in X'$ je neprekidan u odnosu na normu. Stoga, ako je $x = \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$ u normi, onda imamo i $f(x) = \lim_{\alpha\in A} f(x_\alpha)$ za sve $f \in X'$ što je, prema propoziciji 5.1.19, ekvivalentno s $x = w - \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$.

Napomena 5.2.3 Istaknimo eksplicitno i smisao konvergencije nizova u slaboj topologiji: prema propoziciji 5.1.19 niz $(x_n)_n$ u normiranom prostoru X konvergira k $x \in X$ u slaboj topologiji $\sigma(X, X')$ ako i samo ako vrijedi $f(x) = \lim_n f(x_n)$ za sve $f \in X'$. Dakle, slaba konvergencija nizova koju smo uveli u definiciji 4.3.1 zapravo je konvergencija u smislu upravo uvedene topologije $\sigma(X, X')$.

Napomena 5.2.4 Slaba topologija $\sigma(X, X')$ na normiranom prostoru X je Hausdorffova; to slijedi direktnom primjenom propozicije 5.1.22. Naime, $\mathbb{F}$ je Hausdorffov prostor, a korolar 4.2.1 nam pokazuje da dualni prostor X' razlikuje točke od X. Posebno, limes slabo konvergentnog hiperniza je (ako uopće postoji) jedinstven.

Napomena 5.2.5 Bazu slabe topologije na normiranom prostoru X čine skupovi oblika

$$B_{x_0,f_1,\ldots,f_n,\epsilon} = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \epsilon,\ 1 \le i \le n\},\ x_0 \in X, f_1, \ldots, f_n \in X', n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0.$$

Jednakost $B_{x_0,f_1,\ldots,f_n,\epsilon} = \cap_{i=1}^n f_i^{-1}(K(f_i(x_0), \epsilon))$ pokazuje da su skupovi $B_{x_0,f_1,\ldots,f_n,\epsilon}$ slabo otvoreni. Da utvrdimo da oni čine bazu za $\sigma(X, X')$, dovoljno je vidjeti da je svaki w-otvoren skup unija skupova oblika $B_{x_0,f_1,\ldots,f_n,\epsilon}$. Međutim, od prije znamo da je svaki w-otvoren skup unija skupova oblika $\cap_{i=1}^n f_i^{-1}(V_i)$, gdje su V_i otvoreni u $\mathbb{F}$, i sad, u osnovi, tvrdnja slijedi iz činjenice da je u polju svaki otvoreni skup unija neke familije otvorenih kugli (v. napomenu 5.1.18).

Napomena 5.2.6 S obzirom na oblik ograničenih funkcionala na Hilbertovom prostoru, iz prethodne napomene slijedi da bazu slabe topologije Hilbertovog prostora H čine skupovi oblika

$$B_{x_0,a_1,\ldots,a_n,\epsilon} = \{x \in H : |\langle x - x_0, a_i\rangle| < \epsilon,\ 1 \le i \le n\},\ x_0 \in H, a_1, \ldots, a_n \in H, n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0.$$

Iz istog razloga ovdje je $x = w - \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$ ako i samo ako vrijedi $\langle x, a\rangle = \lim_{\alpha\in A}\langle x_\alpha, a\rangle$, $\forall a \in H$.

U napomeni 5.2.2 smo konstatirali da je slaba topologija na normiranom prostoru općenito slabija od topologije norme. Ipak, razlike nema ako je ambijentni prostor konačnodimenzionalan.

Propozicija 5.2.7 *Na konačnodimenzionalnom normiranom prostoru slaba topologija se podudara s jakom.*

Dokaz: Neka je $\dim X = n < \infty$. Pretpostavimo da u X vrijedi $x_\alpha \xrightarrow{w} x$. Neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za X. Promotrimo normu na X definiranu s $\|\sum_{j=1}^n \lambda_i b_i\| = \max\{|\lambda_i| : 1 \le i \le n\}$. Sad se lagano pokaže da $\|x - x_\alpha\| \to 0$. Dakle, hiperniz $(x_\alpha)_\alpha$ i jako konvergira k x s obzirom na svaku normu na X (jer sve norme na X su ekvivalentne).

Da pokažemo jednakost topologija, dovoljno je utvrditi da je svaki jako otvoren skup i slabo otvoren. Ekvivalentno, analognu tvrdnju možemo provjeriti i za zatvorene skupove. Uzmimo jako zatvoren skup S u X i pretpostavimo suprotno željenom zaključku: neka S nije slabo zatvoren. Tada je S strogo sadržan u svom slabom zatvaraču $\overline{S}^w$. Neka je $x \in \overline{S}^w \setminus S$. Prema propoziciji 5.1.12, postoji hiperniz $(x_\alpha)_\alpha$ u S koji slabo konvergira k x. Prema prvom dijelu dokaza, sada imamo i $x_\alpha \xrightarrow{s} x$, a zbog toga je, opet prema propoziciji 5.1.12, x sadržan u zatvaraču s obzirom na jaku topologiju skupa S. Kako je po pretpostavci S zatvoren u jakoj topologiji, slijedi $x \in S$. Kontradikcija. $\square$

Već znamo da u beskonačnodimenzionalnom slučaju tvrdnja prethodne propozicije općenito ne vrijedi. Za primjer, promotrimo separabilan Hilbertov prostor H i njegovu ortonormiranu bazu $(e_n)_n$. Sad Parsevalova jednakost $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2$, $\forall x \in H$, odmah pokazuje da vrijedi $\langle e_n, x\rangle \to 0$, $\forall x \in H$; dakle $e_n \xrightarrow{w} 0$. S druge strane, jasno je da niz $(e_n)_n$ uopće ne konvergira jako. Uočimo da isti zaključak dobivamo uz pomoć Besselove nejednakosti za svaki ortonormiran niz u proizvoljnom beskonačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru.

U stvari, imamo sljedeći teorem:

Teorem 5.2.8 *Neka je X normiran prostor. Slaba topologija na X se podudara s jakom ako i samo ako je $\dim X < \infty$.*

Dokaz: S obzirom na prethodnu propoziciju treba samo dokazati da je u slučaju $\dim X = \infty$ jaka topologija strogo jača od slabe topologije. Pretpostavimo zato da je $\dim X = \infty$.

Najprije tvrdimo da 0 pripada slabom zatvaraču jedinične sfere $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Da to pokažemo, uzmimo proizvoljan slabo otvoren skup W koji sadrži 0. Prema napomeni 5.2.5 postoje $\epsilon > 0$ i $f_1, \ldots f_n \in X'$, $n \in \mathbb{N}$, takvi da je

$$B_{0,f_1,\ldots,f_n,\epsilon} = \{x \in X : |f_i(x)| < \epsilon,\ 1 \le i \le n\} \subseteq W.$$

Sad promotrimo preslikavanje $\Phi : X \to \mathbb{F}^n$ definirano s $\Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Očito je Φ linearan operator i vrijedi $\operatorname{Ker}\Phi = \cap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$. Kako je $\dim X = \infty$, ne može Φ biti injekcija. Zato postoji netrivijalan vektor $x \in \operatorname{Ker}\Phi$. Dakle, $x \in \operatorname{Ker} f_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, tj. $f_i(x) = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. Odavde je i $f_i(\lambda x) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall i = 1, \dots, n$, iz čega zaključujemo da je $\lambda x \in B_{0,f_1,\dots,f_n,\epsilon}$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$. Posebno, uzmemo li $\lambda = \frac{1}{\|x\|}$, vidimo da jedinični vektor $\frac{x}{\|x\|}$ leži u skupu $B_{0,f_1,\dots,f_n,\epsilon}$. To pokazuje da je $W \cap S \neq \emptyset$, te je zato $0 \in \overline{S}^w$.

Kako je jedinična sfera S očito jako zatvoren skup, a $0 \notin S$, ovime smo pokazali da se jaki i slabi zatvarač skupa S razlikuju. To je dovoljno da se zaključi kako ove dvije topologije nisu iste. $\square$

Napomena 5.2.9 Uočite kako su u slučaju $\dim X = \infty$ bazične okoline nule čudesno velike: pokazali smo u prethodnom dokazu kako skup $B_{0,f_1,\dots,f_n,\epsilon}$ sadrži cijeli jedan potprostor, naime $\operatorname{span}\{x\} \subseteq B_{0,f_1,\dots,f_n,\epsilon}$.

Napomena 5.2.10 Već smo u diskusiji nakon korolara 4.3.8 spomenuli da u prostoru ℓ^1 niz $(x_n)_n$ konvergira jako prema $x \in \ell^1$ ako i samo ako $(x_n)_n$ konvergira k x i slabo (v. zadatak 5.2.21). Zajedno s prethodnim teoremom to pokazuje da slaba topologija u ℓ^1 ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Naime, u suprotnom bi ta topologija bila opisiva pomoću nizova, a kako jaka i slaba topologija na ℓ^1 proizvode iste konvergentne nizove, to bi značilo da se podudaraju. Međutim, prema teoremu 5.2.8, to je nemoguće.

Uočimo također: jedinična sfera $S \subset \ell^1$ sadrži limese svih slabo konvergentnih nizova čiji su članovi elementi iz S. Naime, ti nizovi su prema tvrdnji zadatka 5.2.21 i jako konvergentni i, kako je S zatvoren skup u topologiji norme, limesi tih nizova leže u S. S druge strane, dokaz teorema 5.2.8 je pokazao da 0 pripada slabom zatvaraču skupa S. Jer $0 \notin S$, nema niti jednog niza iz S koji bi slabo konvergirao u 0. Ovo je, dakle, konkretan primjer točke iz zatvarača nekog skupa koja nije limes niti jednog niza točaka tog skupa.

Napomena 5.2.11 Iako neprekidnost linearnog operatora (kao, uostalom i bilo koje druge funkcije) u slaboj topologiji ne možemo utvrditi samo pomoću konvergentnih nizova, zanimljivo je ipak vidjeti što možemo zaključiti o operatoru iz "dobrog" ponašanja prema konvergentnim nizovima. Ovdje ćemo to učiniti za operatore na Hilbertovom prostoru. Neka je, dakle, H Hilbertov prostor, $\dim H = \infty$, i $A : H \to H$ linearan operator. Promotrimo sljedeće uvjete:

(a) $(x_n)_n$ niz u H, $x_n \xrightarrow{s} x \Longrightarrow Ax_n \xrightarrow{s} Ax$;

(b) $(x_n)_n$ niz u H, $x_n \xrightarrow{w} x \Longrightarrow Ax_n \xrightarrow{w} Ax$;

(c) $(x_n)_n$ niz u H, $x_n \xrightarrow{s} x \Longrightarrow Ax_n \xrightarrow{w} Ax$;

(d) $(x_n)_n$ niz u H, $x_n \xrightarrow{w} x \Longrightarrow Ax_n \xrightarrow{s} Ax$.

Tada vrijedi $(a) \Longleftrightarrow (b) \Longleftrightarrow (c) \Longleftarrow (d)$. (Jasno, ako je $\dim H < \infty$, navedeni uvjeti su na trivijalan način ekvivalentni.)

Prije svega treba uočiti da uvjet (a) znači da je operator A ograničen, tj. $A \in \mathbb{B}(H)$.

Nadalje, uvjet (d) je zaista jači od preostala tri; na primjer, očito je da jedinični operator zadovoljava prvi tri, ali ne i četvrti uvjet (najjednostavniji protuprimjer dobivamo ako uzmemo ortonormiran niz $(x_n)_n$ i $x = 0$). Pokazat ćemo kasnije da uvjet (d) zadovoljava uža klasa ograničenih operatora koju čine tzv. kompaktni operatori.

Dokažimo sada navedene implikacije.

$(a) \Rightarrow (b)$: Ako vrijedi (a), operator A je zapravo ograničen, pa postoji $A^* \in \mathbb{B}(H)$. Sad lagano slijedi da A zadovoljava uvjet (b) čak i za hipernizove. Zaista: $x_\alpha \stackrel{w}{\to} x \Rightarrow \langle Ax_\alpha, y\rangle = \langle x_\alpha, A^*y\rangle \to \langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle$, $\forall y \in H \Rightarrow Ax_\alpha \stackrel{w}{\to} Ax$.

$(b) \Rightarrow (c)$ je trivijalno.

$(c) \Rightarrow (a)$: Pretpostavimo (c) i uzmimo da (a) ne vrijedi. To znači da A nije ograničen operator pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in H$ takav da vrijedi $\|x_n\| = 1$ i $\|Ax_n\| \geq n^2$. Sad očito $\frac{x_n}{n} \stackrel{s}{\to} 0$ pa bi zbog pretpostavke trebalo vrijediti i $A(\frac{x_n}{n}) \stackrel{w}{\to} 0$, no to je nemoguće jer niz $(A(\frac{x_n}{n}))_n$ nije ograničen, a prema korolaru 4.3.8 morao bi biti.

$(d) \Rightarrow (a)$ je trivijalno.

Na kraju, primijetimo da su svi navedeni dokazi osim dokaza tvrdnje $(a) \Rightarrow (b)$ primjenjivi bez izmjena i za operatore na normiranim prostorima (s tim da ćemo tek u idućoj točki dokazati da je svaki slabo konvergentan niz u normiranom prostoru ograničen - a to je bio završni argument u dokazu implikacije $(c) \Rightarrow (a)$).

Za kraj ovih razmatranja promotrit ćemo slabu topologiju i na dualnom prostoru X' normiranog prostora X. Međutim, pokazuje se da je u praksi puno važnija slaba topologija na X' generirana ne svim ograničenim funkcionalima na X', nego samo onima oblika $\hat{x}$, $x \in X$. Sjetimo se da je za svaki $x \in X$ preslikavanje $\hat{x} : X' \to \mathbb{F}$ definirano formulom $\hat{x}(f) = f(x)$, $f \in X'$, neprekidan linearan funkcional na X'; dakle, $\hat{x} \in X''$.

Definicija 5.2.12 *Neka je X normiran prostor. Slaba-zvjezdica (w^*) topologija na X' je slaba topologija na X' generirana svim funkcionalima $\hat{x} \in X''$, $x \in X$. Ovu topologiju označavamo sa $\sigma(X', \hat{X})$, a oznaka $f_\alpha \stackrel{w^*}{\to} f$ će značiti pripadajuću konvergenciju hiperniza $(f_\alpha)_\alpha$ k funkcionalu f.*

Napomena 5.2.13 Funkcionali $\hat{x}$, $x \in X$, razlikuju točke od X' (provjerite!) pa je zato i w^*-topologija Hausdorffova.

Ako je prostor X refleksivan ($X = \hat{X}$), w^*-topologija na X' se podudara (po definiciji) sa slabom topologijom na normiranom prostoru X'.

Ako je prostor X konačnodimenzionalan, w^*-topologija na X' se podudara s topologijom norme.

Napomena 5.2.14 Prema propoziciji 5.1.19, $f_\alpha \stackrel{w^*}{\to} f$ ako i samo ako vrijedi $\hat{x}(f_\alpha) \to \hat{x}(f)$, $\forall x \in X$, to jest, ako i samo ako je $f_\alpha(x) \to f(x)$, $\forall x \in X$.

Primijetimo također: ako hiperniz f_α u X' konvergira k $f \in X'$ u normi prostora $f \in X'$, onda vrijedi i $f_\alpha \stackrel{w^*}{\to} f$ jer svi funkcionali $\hat{x}$, $x \in X$, su neprekidni s obzirom na topologiju norme u X'.

Primjer 5.2.15 Neka je X normiran prostor, $\dim X = \infty$. Kao u napomeni 5.2.5 vidi se da bazu okolina u 0 u w^*-topologiji prostora X' čine skupovi oblika

$$B_{0,x_1,\ldots,x_n,\epsilon} = \{f \in X' : |\hat{x}_i(f)| < \epsilon,\, i = 1, \ldots, n\} = \{f \in X' : |f(x_i)| < \epsilon,\, i = 1, \ldots, n\},$$

pri čemu su $x_1, \ldots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ i $\epsilon > 0$ proizvoljno odabrani. Za danu baznu okolinu $B_{0,x_1,\ldots,x_n,\epsilon}$ označimo $M = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Jer je $\dim X = \infty$, imamo $M \neq X$. Prema tvrdnji zadatka 4.2.13 postoji zatvoren potprostor L od X takav da vrijedi $X = M \dot{+} L$. Jasno je da svaki $f \in L'$ možemo trivijalno proširiti do ograničenog funkcionala $f \in X'$ tako da stavimo $f|_M = 0$. Na ovaj način možemo dualni prostor L' shvaćati uloženim u X'. Sad, uz takvu identifkaciju prostora L', možemo uočiti da vrijedi $L' \subseteq B_{0,x_1,\ldots,x_n,\epsilon}$. (Dakle, i ovdje su bazične okoline neobično "prostrane". Još je neobičnije to što je $\dim L = \dim L' = \infty$.)

Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti: ako $\mathcal{U}$ označava familiju svih otvorenih skupova oko 0 u w^*-topologiji prostora X', onda za svaki $U \in \mathcal{U}$ postoji $f_U \in U$ sa svojstvom $\mathbb{N}f_U = \{nf_u : n \in \mathbb{N}\} \subseteq U$.

Promotrimo sada $\mathcal{U} \times \mathbb{N}$ i za $(U, n), (V, m) \in \mathcal{U} \times \mathbb{N}$ definirajmo $(U, n) \leq (V, m) \Leftrightarrow V \subseteq U$; lako se vidi da na ovaj način $\mathcal{U} \times \mathbb{N}$ postaje usmjeren skup.

Definirajmo sada hiperniz $(f_{(U,n)})_{(U,n)}$ u prostoru X' tako da stavimo $f_{(U,n)} = nf_U$. Lako je ustanoviti da taj hiperniz konvergira u 0 w^*-topologiji; naime, ako je V proizvoljan otvoren skup oko 0 onda imamo $(V, 1) \leq (U, n) \Rightarrow f_{(U,n)} = nf_U \in U \subseteq V$.

Podsjetimo se da smo u napomeni 3.1.4 (g) vidjeli da je svaki konvergentan hiperniz u normiranom prostoru eventualno ograničen. Na upravo demonstriranom primjeru možemo uočiti da hiperniz koji konvergira u nekoj topologiji slabijoj od topologije norme ne mora biti eventualno ograničen. Naime, kad za proizvoljan $(V, m) \in \mathcal{U} \times \mathbb{N}$ gledamo skup $F_{(V,m)} = \{f_{(U,n)} : (V, m) \leq (U, n)\}$, on evidentno sadrži sve $f_{(V,k)} = kf_V$, $k \in \mathbb{N}$, i zato je $F_{(V,m)}$ neograničen skup.

Ako je prostor X beskonačnodimenzionalan onda je i X' beskonačnodimenzionalan (vidite zadatak 4.2.14). Tada, prema teoremu 1.2.13 (vidite i zadatak 1.2.19), zatvorena jedinična kugla u X' nije kompaktan skup. U tom svjetlu tvrdnja sljedećeg teorema je naročito zanimljiva. Teorem navodimo bez dokaza, a ovdje spomenimo samo da se standardni dokaz temelji na Aleksandrovljevom teoremu po kojemu je produktni prostor kompaktnih topoloških prostora također kompaktan.

Teorem 5.2.16 *(Banach - Alaoglu) Neka je X normiran prostor. Zatvorena jedinična kugla $\{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ je kompaktan skup u w^*-topologiji prostora X'.*

Korolar 5.2.17 *Zatvorena jedinična kugla $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ refleksivnog normiranog prostora X je slabo kompaktan skup.*

Dokaz: Prema pretpostavci možemo identificirati prostore X i X''. Dakle, slaba topologija na X se podudara sa slabom topologijom na X''. Ova potonja je, međutim, slaba topologija na X'' inducirana prostorom X'; dakle, ništa drugo nego w^*-topologija na X''. Prema prethodnom teoremu zatvorena jedinična kugla prostora X'' je kompaktan skup u w^*-topologiji. □

Napomena 5.2.18 Prethodni korolar je lakši dio sljedećeg teorema kojeg je dokazao S. Kakutani: Banachov prostor X je refleksivan ako i samo ako je zatvorena jedinična kugla $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ u X slabo kompaktan skup.

Domaća zadaća 15

Zadatak 5.2.19 Dokažite da norma na beskonačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru H nije slabo neprekidna funkcija. (Tvrdnja zapravo znači: $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ nije neprekidna funkcija ako na H promatramo slabu topologiju.) *Uputa:* promotrite bilo koji ortonormiran niz.

Zadatak 5.2.20 Upotpunite detalje iz prvog dijela dokaza propozicije 5.2.7, tj. precizno argumentirajte da uz pretpostavku $\dim X < \infty$ iz $x_\alpha \stackrel{w}{\to} x$ slijedi $x_\alpha \stackrel{s}{\to} x$.

Zadatak 5.2.21 Neka je $(x_n)_n$ niz u ℓ^1. Dokažite: $x_n \stackrel{w}{\to} x \Rightarrow x_n \stackrel{s}{\to} x$. *Uputa:* uzmite niz $(x_n)_n$ koji slabo konvergira u 0 i pretpostavite da ne konvergira u 0 jako. To znači da postoji $\epsilon > 0$ i podniz $(x_{p(n)})_n$ za koji vrijedi $\|x_{p(n)}\| \geq \epsilon$. Sad koristeći taj podniz nađite ograničen funkcional f na ℓ^1 za koji neće vrijediti $f(x_{p(n)}) \to 0$. Pritom imajte na umu da su ograničeni funkcionali na ℓ^1 reprezentirani nizovima iz ℓ^∞.

5.3 Princip uniformne ograničenosti

Teorem 4.3.7 predstavlja važan kriterij ograničenosti skupova u Hilbertovom prostoru: da bi skup bio ograničen, dovoljno je da je slabo ograničen u smislu da je njegova slika pri svakom neprekidnom linearnom funkcionalu ograničen skup u polju skalara. U ovoj točki pokazujemo da isti rezultat vrijedi i za sve normirane prostore. Pokazat će se da je to jednostavna posljedica čuvenog principa uniformne ograničenosti za linearne operatore. Dokažimo najprije sljedeću jednostavnu lemu.

Lema 5.3.1 *Neka su X iY normirani prostor i $T \in \mathbb{B}(X)$. Tada za svaki $x \in X$ i svaki $r > 0$ vrijedi sup $\{\|Ty\| : y \in \overline{K}(x,r)\} \geq r\|T\|$.*

Dokaz: Fiksirajmo x i r. Za svaki $v \in X$ vrijedi

$$\max\{\|T(x+v)\|, \|T(x-v)\|\} \geq \frac{1}{2}(\|T(x+v)\| + \|T(x-v)\|) \geq \|Tv\|$$

pri čemu je druga nejednakost dobivena iz $\|a\| + \|b\| \geq \|a-b\|$. Sad u gornjoj nejednakosti uzmimo supremum po $v \in \overline{K}(0,r)$. Na lijevoj strani ćemo dobiti $\sup\{\|Ty\| : y \in \overline{K}(x,r)\}$. S desne strane dobivamo

$$\sup\{\|Tv\| : v \in \overline{K}(0,r)\} = \sup\left\{r\left\|T\left(\frac{v}{r}\right)\right\| : v \in \overline{K}(0,r)\right\} =$$

$$\sup\{r\|Tw\| : w \in \overline{K}(0,1)\} = r\|T\|.$$

$\square$

Teorem 5.3.2 *(Banach - Steinhaus, princip uniformne ograničenosti) Neka je X Banachov, a Y normiran prostor, te neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}(X,Y)$ proizvoljna familija operatora s X u Y. Pretpostavimo da za svaki $x \in X$ vrijedi $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$. Tada je i $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno: neka je $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} = \infty$. Odaberimo niz $(T_n)_n$ u $\mathcal{F}$ za koji vrijedi $\|T_n\| \geq 4^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Uzmimo $x_0 = 0$. Pomoću prethodne leme induktivno nađimo niz $(x_n)_n$ u X takav da je $\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{1}{3^n}$ i $\|T_n x_n\| \geq \frac{2}{3}\frac{1}{3^n}\|T_n\|$ (u koraku indukcije gledamo kuglu oko x_{n-1} radijusa $\frac{1}{3^n}$ i operator T_n)).

Kao Cauchyjev niz u X, $(x_n)_n$ konvergira prema nekom $x \in X$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ sad vrijedi

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{3^{n+k}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}} =$$

$$\frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots \left(\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

Kad pustimo $k \to \infty$ dobivamo

$$\|x - x_n\| \leq \frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}.$$

Zato je

$$\|T_n x\| = \|T_n x_n + T_n x - T_n x_n\| \geq \|T_n x_n\| - \|T_n(x - x_n)\| \geq$$

$$\frac{2}{3}\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}\|T_n\| = \frac{1}{6}\frac{1}{3^n}\|T_n\| \geq \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

To pokazuje da je $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} = \infty$, suprotno pretpostavci teorema. □

Sljedeća tri teorema podjednako su važna, spadaju u istu grupu s prethodnim (svi se u širem smislu nazivaju teoremima uniformne ograničenosti), a sva tri sad lagano slijede iz upravo dokazanog Banach - Steinhausovog teorema.

Teorem 5.3.3 *Neka je X Banachov prostor i $S \subseteq X'$. Tada je $\sup\{\|f\| : f \in S\} < \infty$ ako i samo ako za svaki $x \in X$ vrijedi $\sup\{|f(x)| : f \in S\} < \infty$*

Dokaz: U jednom smjeru tvrdnja je trivijalna, a obrat dobivamo kao specijalni slučaj tvrdnje prethodnog teorema ako odaberemo $\mathcal{F} = S$ i $Y = \mathbb{F}$. □

Sljedeći rezultat je direktno poopćenje teorema 4.3.7.

Teorem 5.3.4 *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$. Tada je $\sup\{\|x\| : x \in S\} < \infty$ ako i samo ako za svaki $f \in X'$ vrijedi $\sup\{|f(x)| : x \in S\} < \infty$.*

Dokaz: Jedan smjer je i ovdje trivijalan.

Obratno, ako za svaki $f \in X'$ vrijedi $\sup\{|f(x)| : x \in S\} < \infty$, to možemo izreći tako da kažemo da za svaki $f \in X'$ vrijedi $\sup\{|\hat{x}(f)| : x \in S\} < \infty$. No, sad možemo primijeniti teorem 5.3.2 na skup $\hat{S} \subseteq X''$ - uočimo da je domena ovdje prostor X' koji jest Banachov. Dakle, prema prethodnom teoremu imamo $\sup\{\|\hat{x}\| : \hat{x} \in \hat{S}\} < \infty$, tj. $\sup\{\|x\| : x \in S\} < \infty$. $\square$

Teorem 5.3.5 *Neka je X Banachov, a Y normiran prostor, te neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}(X, Y)$ proizvoljna familija operatora s X u Y. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) *$\mathcal{F}$ je uniformno ograničena ($\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$);*

(b) *$\mathcal{F}$ je jako ograničena ($\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty, \forall x \in X$);*

(c) *$\mathcal{F}$ je slabo ograničena ($\sup\{|f(Tx)| : T \in \mathcal{F}\} < \infty, \forall x \in X, \forall f \in Y'$).*

Dokaz: $(c) \Rightarrow (b)$ slijedi direktno iz prethodnog teorema kao specijalan slučaj (za svaki pojedini $x \in X$ gledamo skup $S = \{Tx : T \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$), $(b) \Rightarrow (a)$ je tvrdnja teorema 5.3.2, a $(a) \Rightarrow (c)$ je trivijalno. $\square$

Na kraju, istaknimo i rezultat koji je očita posljedica teorema 5.3.4, a koji poopćuje korolar 4.3.8.

Korolar 5.3.6 *Svaki slabo konvergentan niz u normiranom prostoru je ograničen.*

Važno je naglasiti da analogna tvrdnja za hipernizove nije točna. Razlog je u tome što konvergentan hiperniz skalara ne mora biti ograničen.

U nastavku navodimo još nekoliko specifičnih činjenica o slaboj topologiji i slaboj konvergenciji u Hilbertovim prostorima. Započet ćemo s primjerom koji će nam posredno pokazati da slaba topologija u beskonačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Primijetimo da već znamo da u ovom slučaju slaba topologija ne potječe niti od jedne norme (što je jedna vrlo specifična situacija u kojoj izvedena topologija zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti).

Primjer 5.3.7 Pogledajmo beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor H, ortonormiran niz $(e_n)_n$ u H i skup $E = \{\sqrt{n}e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tvrdimo da je $0 \in \overline{E}^w$.

Da to pokažemo, treba vidjeti da svaki w-otvoreni skup oko 0 siječe E. Dovoljno je vidjeti da svaka bazična okolina $B_{0,a_1,\dots,a_k,\epsilon} = \{x \in H : |\langle x, a_j\rangle| < \epsilon, j = 1, \dots, k\}$, siječe E.

Kako za sve $j = 1, \dots, k$, vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle a_j, e_n\rangle|^2 < \infty$ (Besselova nejednakost), to je i $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{k} |\langle a_j, e_n\rangle|^2) < \infty$. Odavde zaključujemo da postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $\sum_{j=1}^{k} |\langle a_j, e_n\rangle|^2 < \frac{\epsilon^2}{n}$ - naime, u protivnom bi red $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{k} |\langle a_j, e_n\rangle|^2)$ bio veći (do na konstantu) od harmonijskog pa bi divergirao. Za taj n imamo $|\langle a_j, e_n\rangle| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}, \forall j = 1, \dots, k$, odnosno $|\langle \sqrt{n}e_n, a_j\rangle| < \epsilon, \forall j = 1, \dots, k$. Dakle, pokazali smo da je $\sqrt{n}e_n \in B_{0,a_1,\dots,a_k,\epsilon}$.

Sad možemo zaključiti da slaba topologija na H ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Naime, u suprotnom bismo prema propoziciji 5.1.11 mogli naći niz $(x_n)_n$ u E koji slabo konvergira u 0. Prema korolaru 4.3.8, odnosno korolaru 5.3.6, niz $(x_n)_n$ bi morao biti ograničen. Međutim, ako za niz $(x_n)_n$ u E vrijedi $x_n \xrightarrow{w} 0$, skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je nužno beskonačan, a svaki beskonačan podskup od E je neograničen.

Iako slaba topologija općenito ne potječe od norme, na prirodan način možemo uvesti pojam slabo Cauchyjevog niza. U tom duhu možemo razmatrati pitanje slabe potpunosti normiranog prostora. Ako je prostor Hilbertov, odgovor je pozitivan: Hilbertov prostor je slabo potpun.

Propozicija 5.3.8 *Svaki slabo Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru je slabo konvergentan.*

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ slabo Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru H. To znači da vrijedi: $\forall a \in H$ niz $(\langle x_n, a\rangle)_n$ je Cauchyjev niz skalara. Kako je svaki Cauchyjev niz u bilo kojem normiranom prostoru (pa tako i u polju) ograničen, vidimo da opet možemo primijeniti teorem 4.3.7: postoji konstanta C za koju vrijedi $\|x_n\| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Osim toga, $\forall a \in H$ niz $(\langle x_n, a\rangle)_n$ je i konvergentan. Zato možemo definirati funkcional $f : H \to \mathbb{F}$ formulom $f(a) = \lim_{n\to\infty}\langle a, x_n\rangle$. Očito je f linearan. Nadalje, Cauchyjeva nejednakost pokazuje da vrijedi $|f(a)| \leq C\|a\|$, $\forall a \in H$. Dakle, f je ograničen, pa po teoremu o reprezentaciji ograničenih linearnih funkcionala na Hilbertovom prostoru postoji vektor $x_0 \in H$ za koji vrijedi $f(a) = \langle a, x_0\rangle$, $\forall a \in H$. Drugim riječima, za sve a u H vrijedi $\lim_{n\to\infty}\langle a, x_n\rangle = \langle a, x_0\rangle$, a to upravo znači da niz $(x_n)_n$ slabo konvergira prema x_0. $\square$

Sljedeći korolar je koristan rezultat. Zanimljivo je tvrdnju korolara usporediti s primjerom u napomeni 1.5.22.

Korolar 5.3.9 *Neka za linearne operatore A, B na Hilbertovom prostoru H vrijedi $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$, $\forall x, y \in H$. Tada su oba operatora ograničena i vrijedi $B = A^*$.*

Dokaz: Pretpostavimo da A nije ograničen: to znači da postoji niz $(x_k)_k$ u H takav da je $\|x_k\| = 1$ i $\|Ax_k\| > k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Pogledajmo skup $\{Ax_k : k \in \mathbb{N}\}$. Za svaki pojedini $y \in H$ imamo $|\langle Ax_k, y\rangle| = |\langle x_k, By\rangle| \leq \|x_k\|\|By\| = \|By\|$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Prema teoremu 4.3.7 sad zaključujemo da je skup $\{Ax_k : k \in \mathbb{N}\}$ ograničen što je kontradikcija. Dakle, A je ograničen operator. No tada A^* postoji, a iz pretpostavke vidimo da je $A^* = B$ te je, a posteriori, i B ograničen. $\square$

Na kraju, vratimo se još jednom pitanju kompaktnosti jedinične kugle u Hilbertovom prostoru. Neka je H beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor. Već znamo da zatvorena jedinična kugla $\{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ nije kompaktan skup u topologiji norme. S druge strane, jer je H refleksivan prostor, iz korolara 5.2.17 slijedi da je $\{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ slabo kompaktan skup. Međutim, ovdje je potrebno uočiti da smo u topologiji norme koristili sljedeći kriterij kompaktnosti: skup S je kompaktan ako i samo ako svaki niz elemenata iz S ima konvergentan podniz čiji limes je u S. Ponekad se ovo svojstvo zove nizovna kompaktnost. Ta karakterizacija kompaktnosti (tj. ekvivalencija kompaktnosti i nizovne kompaktnosti) vrijedi u metričkim prostorima, ali ne i općenito u topološkim prostorima. U tom svjetlu je posebno zanimljiv tzv. Eberlein-Smulianov teorem prema kojem je u Banachovom prostoru X zatvorena jedinična kugla $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ slabo kompaktna ako i samo ako je slabo nizovno kompaktna. Iz navedenih teorema sad možemo zaključiti da svaki niz u zatvorenoj jediničnoj kugli u H ima slabo konvergentan podniz. Međutim, tu činjenicu možemo dokazati i direktno.

Teorem 5.3.10 *Svaki ograničen niz u Hilbertovom prostoru ima slabo konvergentan podniz.*

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H za koji postoji konstanta $C > 0$ takva da je $\|x_n\| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Označimo $M = \overline{\text{span}}\,\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Niz skalara $(\langle x_n, x_1 \rangle)_n$ je ograničen pa ima konvergentan podniz. Odaberimo podniz $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots$ polaznog niza $(x_n)_n$ za koji je niz $(\langle x_{1n}, x_1 \rangle)_n$ konvergentan. Sad pogledajmo niz skalara $(\langle x_{1n}, x_2 \rangle)_n$. I taj je ograničen, pa ima konvergentan podniz. To znači da postoji podniz $x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots$ niza $(x_{1n})_n$ takav da $(\langle x_{2n}, x_2 \rangle)_n$ konvergira. Nastavimo induktivno pa dobivamo niz nizova

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

gdje je svaki niz podniz onoga iznad sebe (tj. prethodnog). Pogledajmo niz $(x_{nn})_n$. Očito, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $\lim_{n\to\infty} \langle x_{nn}, x_k \rangle$. Naravno, tada postoji i $\lim_{n\to\infty} \langle x_{nn}, x \rangle$, $\forall x \in M$, a trivijalno je da postoji i $\lim_{n\to\infty} \langle x_{nn}, y \rangle$, $\forall y \in M^\perp$. Dakle, za svaki $v \in H$ možemo definirati $f(v) = \lim_{n\to\infty} \langle v, x_{nn} \rangle$. Jasno je da smo ovime definirali ograničen linearan funkcional na H pa zato postoji $x_0 \in H$ takav da vrijedi $f(v) = \langle v, x_0 \rangle$, tj. $\lim_{n\to\infty} \langle v, x_{nn} \rangle = \langle v, x_0 \rangle$. To upravo znači da je $x_0 = w - \lim_{n\to\infty} x_{nn}$. □

Domaća zadaća 16

Zadatak 5.3.11 Neka je H separabilan Hilbertov prostor i $x \in H$, $\|x\| \leq 1$. Pokažite da postoji niz $(x_n)_n$ u H takav da je $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i $x_n \overset{w}{\to} x$. *Uputa:* uzmite ONB $(e_n)_n$ za H i ograničen niz skalara $(\lambda_n)_n$ pa promotrite niz $(x + \lambda_n e_n)_n$. (Primijetite da tvrdnja zadatka pokazuje kako je jedinična sfera u H slabo gusta u zatvorenoj jediničnoj kugli prostora H.)

Zadatak 5.3.12 Dokažite da je svaki jako zatvoren potprostor Hilbertovog prostora i slabo zatvoren. *Uputa:* pokažite da za potprostor M vrijedi $x \in \overline{M}^w \Rightarrow x \in (M^\perp)^\perp$.

(Tvrdnja ovog zadatka je vrlo poseban slučaj mnogo općenitijeg teorema. Uz pomoć tzv. geometrijske forme Hahn-Banachovog teorema može se pokazati: konveksan skup u normiranom prostoru je slabo zatvoren ako i samo ako je jako zatvoren.)

Zadatak 5.3.13 Obrazložite završni argument u primjeru 5.3.7: ako za niz $(x_n)_n$ u E vrijedi $x_n \xrightarrow{w} 0$, skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je nužno beskonačan.

Zadatak 5.3.14 Obrazložite sljedeći navod iz dokaza teorema 5.3.10: "Očito, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $\lim_{n\to\infty}\langle x_{nn}, x_k\rangle$. Naravno, tada postoji i $\lim_{n\to\infty}\langle x_{nn}, x\rangle$, $\forall x \in M$..."

5.4 Slabe operatorske topologije

Definicija 5.4.1 *Neka su X i Y normirani prostori. Jaka operatorska topologija na $\mathbb{B}(X,Y)$ je slaba topologija inducirana preslikavanjima $\mathbb{B}(X,Y) \to Y$, $A \mapsto Ax$, za sve $x \in X$.*

Slaba operatorska topologija na $\mathbb{B}(X,Y)$ je slaba topologija inducirana preslikavanjima $\mathbb{B}(X,Y) \to \mathbb{F}$, $A \mapsto f(Ax)$, za sve $f \in Y'$ i $x \in X$.

Napomena 5.4.2 Bazu okolina u točki $A_0 \in \mathbb{B}(X,Y)$ čine skupovi

$$B_{A_0,x_1,\ldots,x_n,\epsilon} = \{A \in \mathbb{B}(X,Y) : \|Ax_i - A_0x_i\| < \epsilon, i = 1,\ldots,n\},$$

odnosno

$$B_{A_0,x_1,\ldots,x_n,f_1,\ldots,f_n,\epsilon} = \{A \in \mathbb{B}(X,Y) : |f_i(Ax_i - A_0x_i)| < \epsilon, i = 1,\ldots,n\},$$

(pri čemu se, u ovom drugom slučaju neki x_i ili f_i mogu i ponoviti; zapravo se radi o konačnim presjecima skupova oblika $\{A \in \mathbb{B}(X,Y) : |f(Ax - A_0x)| < \epsilon\}$).

U ovom kontekstu topologija norme u prostoru $\mathbb{B}(X,Y)$ se naziva uniformna topologija. Jasno je da je ta topologija jača od jake operatorske topologije, te da je jaka operatorska topologija jača od slabe operatorske topologije. To se vidi i iz sljedećih opisa konvergencije hipernizova:

$$A_\alpha \xrightarrow{s} A \Longleftrightarrow A_\alpha x \to Ax, \ \forall x \in X,$$
$$A_\alpha \xrightarrow{w} A \Longleftrightarrow f(A_\alpha x) \to f(Ax), \ \forall f \in Y', \forall x \in X,$$

Napomena 5.4.3 Najčešće ćemo ove topologije promatrati na algebri $\mathbb{B}(X)$. Posebno, ako je H Hilbertov prostor, bazu okolina u točki $A_0 \in \mathbb{B}(H)$ u slaboj operatorskoj topologiji čine konačni presjeci skupova oblika $\{A \in \mathbb{B}(H) : |\langle Ax - A_0x, y\rangle| < \epsilon\}$ za proizvoljne $x, y \in H$ i $\epsilon > 0$. U ovom slučaju vrijedi

$$A_\alpha \xrightarrow{w} A \Longleftrightarrow \langle A_\alpha x, y\rangle \to \langle Ax, y\rangle.$$

Propozicija 5.4.4 *Neka je X Banachov, a Y normiran prostor i $(A_n)_n$ niz u $\mathbb{B}(X,Y)$ koji konvergira jako ili slabo. Tada je niz ograničen.*

Dokaz: Tvrdnja je direktna posljedica teorema 5.3.5 □

U sljedećem primjeru pokazujemo da se tri topologije na prostoru operatora zaista razlikuju.

Primjer 5.4.5 Pogledajmo standardnu ONB $(e_n)_n$ u prostoru ℓ^2 i definirajmo operator $S \in \mathbb{B}(\ell^2)$ formulom $S(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_{n+1}$. Očito je operator S linearan i izometričan. Zbog $Se_n = e_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, operator S se naziva operator jednostranog pomaka ili unilateralan šift. Uočimo da za operator S^* vrijedi $S^*e_1 = 0$ i $S^*e_n = e_{n-1}$ za sve $n > 1$.

Tvrdimo da niz $(S^n)_n$ konvergira u 0 slabo, ali ne i jako, te da $((S^*)^n)_n$ konvergira u 0 jako, ali ne i uniformno.

Naime, ako je $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$, onda je $(S^*)^n x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{n+k}\rangle e_k$ pa je $\|(S^*)^n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$, a ovo očito teži u 0 za $n \to \infty$. S druge strane, $\|(S^*)^n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa niz $((S^*)^n)_n$ ne može težiti u 0 po normi.

Da vrijedi $S^n \xrightarrow{w} 0$, vidljivo je iz $|\langle S^n x, y\rangle| = |\langle x, (S^*)^n y\rangle| \leq \|x\|\|(S^*)^n y\| \to 0$, $\forall x, y \in l^2$. S druge strane, niz $(S^n)_n$ uopće ne konvergira jako što je vidljivo već iz $S^n e_1 = e_{n+1}$, $\forall n$.

Napomena 5.4.6 Norma je neprekidna s obzirom na uniformnu topologiju, a nije neprekidna s obzirom na jaku i s obzirom na slabu topologiju u Hilbertovom prostoru.

Prva tvrdnja je trivijalna jer norma je neprekidna u svakom normiranom prostoru (tj. s obzirom na topologiju koju sama inducira).

Za drugu tvrdnju dovoljno je naći primjer niza operatora koji svi imaju normu jednaku 1, a koji (niz) jako konvergira u 0. To će povlačiti da norma nije neprekidna s obzirom na jaku operatorsku topologiju, a onda, a posteriori, ni s obzirom na slabu operatorsku topologiju. Jedan takav niz je niz $((S^*)^n)_n$ iz prethodnog primjera.

Ovdje ćemo konstruirati još jedan takav niz. Uzmimo ONB $(e_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H i pogledajmo zatvorene potprostore $M_n = \overline{span}\,\{e_k : k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Očito je $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ i $\cap_{n=1}^{\infty} M_n = \{0\}$. Ako s P_n označimo ortogonalan projektor na M_n, onda je $\|P_n\| = 1$ i $P_n \xrightarrow{s} 0$.

Napomena 5.4.7 Hermitsko adjungiranje kao preslikavanje s $\mathbb{B}(H)$ u $\mathbb{B}(H)$, gdje je H Hilbertov prostor, je neprekidno u normi i u slaboj operatorskoj topologiji, a nije neprekidno u jakoj operatorskoj topologiji. (U sve tri tvrdnje podrazumijevamo istu topologiju u domeni i kodomeni.)

Zaista, jednakost $\|A^* - B^*\| = \|A - B\|$ dokazuje uniformnu neprekidnost. Dalje, jednakost $|\langle A^*x, y\rangle - \langle B^*x, y\rangle| = |\langle x, Ay\rangle - \langle x, By\rangle| = |\langle Ay, x\rangle - \langle By, x\rangle|$ pokazuje slabu neprekidnost adjungiranja; naime, očito imamo $A_\alpha \xrightarrow{w} A \Rightarrow A_\alpha^* \xrightarrow{w} A^*$.

Konačno, iz već poznatih tvrdnji $(S^*)^n \xrightarrow{s} 0$ i $S^n \overset{s}{\nrightarrow} 0$ vidimo da adjungiranje nije neprekidno preslikavanje u jakoj operatorskoj topologiji. □

Sljedeća propozicija govori o odnosu množenja operatora i konvergenciji nizova u operatorskim topologijama.

Propozicija 5.4.8 *Neka je H Hilbertov prostor te neka su $A, B, A_n, B_n \in \mathbb{B}(H)$. Tada vrijedi:*

$$A_n \to A \text{ i } B_n \to B \Longrightarrow A_nB_n \to AB,$$
$$A_n \xrightarrow{s} A \text{ i } B_n \xrightarrow{s} B \Longrightarrow A_nB_n \xrightarrow{s} AB,$$
$$A_n \xrightarrow{w} A \text{ i } B_n \xrightarrow{w} B \not\Longrightarrow A_nB_n \xrightarrow{w} AB,$$

Dokaz: $\|A_nB_n - AB\| \leq \|A_nB_n - A_nB\| + \|A_nB - AB\| \leq \|A_n\|\|B_n - B\| + \|A_n - A\|\|B\|$. Kako su nizovi $(A_n)_n$ i $(B_n)_n$ ograničeni, ovo je dovoljno za dokaz prve tvrdnje.

Praktično isti račun dokazuje i drugu tvrdnju; i ovdje je bitno da je svaki jako konvergentan niz ograničen: $\|(A_nB_n - AB)x\| \leq \|A_n\|\|B_nx - Bx\| + \|A_n(Bx) - A(Bx)\|$.

Za dokaz treće tvrdnje dovoljno se sjetiti primjera 5.4.5: $S^n \xrightarrow{w} 0$, $(S^*)^n \xrightarrow{w} 0$, ali $(S^*)^nS^n = I$. □

Napomena 5.4.9 Prva tvrdnja prethodne propozicije kaže da je množenje operatora neprekidno u normi (tj. u uniformnoj topologiji). Treća tvrdnja kaže da množenje nije neprekidno u slaboj operatorskoj topologiji. Pitanje neprekidnosti množenja u jakoj operatorskoj topologiji još uvijek je otvoreno; naime, čuvanje konvergencije nizova je nužan, ali općenito ne i dovoljan uvjet neprekidnosti. Kad bismo znali da jaka operatorska topologija zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, to bi bilo dovoljno.

Sad ćemo pokazati da je množenje operatora zaista diskontinuirano u ovoj topologiji. Time ćemo implicitno dokazati da jaka operatorska topologija ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Osim toga, imat ćemo konkretan primjer funkcije koja poštuje konvergenciju nizova i unatoč tome je diskontinuirana.

Najprije dokažimo sljedeću pomoćnu tvrdnju: skup $N_2 = \{A \in \mathbb{B}(H) : A^2 = 0\}$ svih nilpotentnih operatora indeksa 2 na Hilbertovom prostoru H takvom da je $\dim H = \infty$ je gust u jakoj operatorskoj topologiji. Pogledajmo baz̆ičnu okolinu proizvoljno odabranog operatora A_0: $B_{A_0,x_1,\ldots,x_k,\epsilon} = \{A \in \mathbb{B}(H) : \|A_0x_i - Ax_i\| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, k\}$. Smijemo pretpostaviti da su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nezavisni, čak ortonormirani. Naime, možemo izbaciti zavisne, preostale ortonormirati, smanjiti ϵ i u danu baz̆ičnu okolinu upisati manju baz̆ičnu okolinu s tim novim parametrima.

Označimo $M = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$ i pišimo $A_0x_j = a_j + b_j$, gdje je $a_j \in M$ i $b_j \in M^\perp$, za sve $j = 1, \ldots, k$. Sad za svaki j nađimo $c_j \in M^\perp$ takav da $c_j \neq 0$ i $\|b_j - c_j\| < \epsilon$. Stavimo $y_j = a_j + c_j$, $j = 1, \ldots, k$. Sada je očito $\|A_0x_j - y_j\| < \epsilon$, $j = 1, \ldots, k$ i pritom je $\operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_k\} \cap M = \{0\}$ (sve ovo je bilo moguće zbog $\dim H = \infty$). Zbog ovog zadnjeg podatka sada je dobro definiran operator A na H relacijama $Ax_j = y_j, Ay_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$, i $Az = 0$ za sve $z \perp x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$. Jasno je da je A ograničen i da pripada danoj baz̆ičnoj okolini operatora A_0. Osim toga, očito je i $A^2 = 0$.

Označimo sada s $q : \mathbb{B}(H) \to \mathbb{B}(H)$ kvadriranje: $q(A) = A^2$. Očito vrijedi $N_2 = q^{-1}(\{0\})$. Kad bi ovo preslikavanje bilo neprekidno u jakoj operatorskoj topologiji, onda bi original $q^{-1}(F)$ svakog zatvorenog skupa F bio zatvoren u jakoj operatorskoj topologiji. Uočimo da je jaka operatorska topologija Hausdorffova pa su jednočlani skupovi zatvoreni. Kad bi, dakle, kvadriranje bilo jako neprekidno bio bi onda i skup N_2 jako zatvoren. Budući znamo da je skup N_2 gust u jakoj operatorskoj topologiji, slijedilo bi $N_2 = \mathbb{B}(H)$. Kontradikcija.

Na kraju ovih razmatranja dokazujemo dva važna rezultata o jakoj konvergenciji nizova ograničenih operatora na Banachovim prostorima.

Propozicija 5.4.10 *Neka je X Banachov, a Y normiran prostor i $(A_n)_n$ niz u $\mathbb{B}(X,Y)$ takav da za svaki $x \in X$ postoji $lim_{n\to\infty} A_n x$. Tada je s $Ax := lim_{n\to\infty} A_n x$ definiran ograničen linearan operator $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ takav da je $\|A\| \leq lim\,inf_{n\to\infty} \|A_n\|$.*

Dokaz: Očito, A je linearan operator. Iz teorema 5.3.5 znamo da je niz $(A_n)_n$ ograničen. Sada je $\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \|x\|$. □

Teorem 5.4.11 *Neka su X i Y Banachovi prostori i $(A_n)_n$ niz u $\mathbb{B}(X,Y)$. Niz $(A_n)_n$ je jako konvergentan ako i samo ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

(i) $M := sup\,\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$;

(ii) niz $(A_n x)_n$ je Cauchyjev za sve x iz nekog fundamentalnog skupa $E \subseteq X$.

Dokaz: Uvjeti su očtio nužni. Dokažimo dovoljnost.

Jer je prostor Y Banachov, postoji $\lim_{n\to\infty} A_n x$, $\forall x \in E$. Odavde odmah slijedi da postoji i $\lim_{n\to\infty} A_n x$, $\forall x \in \operatorname{span} E$. Sad za $v \in X$ i $\epsilon > 0$ nađimo $x \in \operatorname{span} E$ sa svojstvom $\|v - x\| < \epsilon$. Kako je niz $(A_n x)_n$ Cauchyjev, postoji n_0 takav da $n, m \geq n_0 \Rightarrow \|A_n x - A_m x\| < \epsilon$. Sada za sve $n, m \geq n_0$ imamo

$$\|A_n v - A_m v\| \leq \|A_n v - A_n x\| + \|A_n x - A_m x\| + \|A_m x - A_m x\| < M\epsilon + \epsilon + M\epsilon = (2M+1)\epsilon.$$

To pokazuje da je i niz $(A_n v)_n$ Cauchyjev i zato i konvergentan jer je prostor Y potpun. Preostaje primijeniti prethodnu propoziciju. □

Domaća zadaća 17

Zadatak 5.4.12 Pokažite da su jaka i slaba operatorska topologija Hausdorffove.

Zadatak 5.4.13 Pokažite da za niz $(P_n)_n$ iz napomene 5.4.6 zaista vrijedi $P_n \xrightarrow{s} 0$.

Zadatak 5.4.14 Pokažite da svaka bazična okolina ograničenog operatora A_0 na Hilbertovom prostoru $B_{A_0,x_1,\ldots,x_n,\epsilon} = \{A \in \mathbb{B}(H) : \|A_0 x_i - A x_i\| < \epsilon, i = 1, \ldots, n\}$ u jakoj operatorskoj topologiji sadrži bazičnu okolinu $B_{A_0,e_1,\ldots,e_l,\delta}$ takvu da su vektori $e_1, \ldots, e_l$ ortonormirani.

Zadatak 5.4.15 Neka je niz $(e_n)_n$ ONB Hilbertovog prostora H, te neka je, za $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathbb{B}(H)$ ortogonalan projektor na jednodimenzionalan potprostor razapet s e_n. Dokažite da niz $(\sum_{n=1}^{k} P_n)_k$ jako konvergira k jediničnom operatoru.

Zadatak 5.4.16 Neka je $(M_n)_n$ niz međusobno ortogonalnih zatvorenih potprostora Hilbertovog prostora H takav da je $H = \oplus_{n=1}^{\infty} M_n$. Neka je $P_n \in \mathbb{B}(H)$ ortogonalan projektor na M_n, $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da niz $(\sum_{n=1}^{k} P_n)_k$ jako konvergira k jediničnom operatoru.

Zadatak 5.4.17 Neka je X separabilan Banachov prostor i $(f_n)_n$ ograničen niz u X'. Dokažite da postoje podniz $(f_{p(n)})_n$ i $f \in X'$ takvi da $f_{p(n)} \stackrel{w^*}{\to} f$.

Zadatak 5.4.18 Neka je $(x_n)_n$ niz u separabilnom Banachovom prostoru X za koji postoji $x \in X$ sa sljedećim svojstvom: za svaki niz funkcionala $(f_n)_n$ iz X' takav da $f_n \stackrel{w^*}{\to} f$ vrijedi $f_n(x_n) \to f(x)$. Dokažite da je tada $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

5.5 Drugi korijen i polarna forma

U ovoj točki ograničit ćemo se na razmatranje operatora na Hilbertovom prostoru. Najprije ćemo primjenom rezultata prethodne točke dokazati egzistenciju drugog korijena iz pozitivno demidefinitnog operatora.

Definicija 5.5.1 *Neka je H Hilbertov prostor. Za operator $A \in \mathbb{B}(H)$ kažemo da je pozitivno semidefinitan i pišemo $A \geq 0$ ako je A hermitski i ako vrijedi $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in H$. Za $A, B \in \mathbb{B}(H)$ definiramo uređaj s $A \leq B \Leftrightarrow B - A \geq 0$.*

Tipičan primjer pozitivno semidefinitnog operatora je operator A^*A gdje je $A \in \mathbb{B}(H)$ proizvoljan. Dalje, uočimo da se u prethodnoj definiciji radi o parcijalnom uređaju. No i ovdje možemo govoriti o monotonim (tj. rastućim ili padajućim) nizovima operatora; npr. reći ćemo da niz $(A_n)_n$ raste ako vrijedi $A_n \leq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorem 5.5.2 *Neka je $(A_n)_n$ monoton i ograničen niz hermitskih operatora na Hilbertovom prostoru H. Tada niz $(A_n)_n$ jako konvergira prema hermitskom operatoru $A \in \mathbb{B}(H)$ i pritom vrijedi $A_n \leq A$ (odnosno $A_n \geq A$) za sve $n \in \mathbb{N}$. Osim toga, ako označimo $M := sup\,\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\}$, vrijedi i $\|A\| \leq M$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $A_n \leq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Uočimo da za sve $x \in H$ vrijedi $\langle A_n x, x\rangle = \langle x, A_n x\rangle = \overline{\langle A_n x, x\rangle}$, što pokazuje da je za sve x niz $(\langle A_n x, x\rangle)_n$ realan. Osim toga, pretpostavka $A_n \leq A_{n+1}$ povlači da taj niz raste. Konačno, iz Cauchy - Schwarzove nejednakosti slijedi $|\langle A_n x, x\rangle| \leq M\|x\|^2$. Zato za sve $x \in H$ postoji $\lim_{n\to\infty}\langle A_n x, x\rangle$.

Uzmimo sad $m > n$ i uočimo da je formulom $[x, y] = \langle (A_m - A_n)x, y\rangle$ zadan jedan pozitivno semidefinitan hermitski funkcional na H. Prema tvrdnji zadatka 1.1.29 i za takve funkcionale vrijedi Cauchy - Schwarzova nejednakost. Zato imamo

$$|\langle (A_m - A_n)x, y\rangle|^2 \leq \langle (A_m - A_n)x, x\rangle\langle (A_m - A_n)y, y\rangle \leq 2M\|y\|^2(\langle A_m x, x\rangle - \langle A_n x, x\rangle).$$

Sad u dobivenu nejednakost uvrstimo $y = (A_m - A_n)x$. Slijedi

$$\|A_m x - A_n x\|^4 \leq 2M\|A_m x - A_n x\|^2(\langle A_m x, x\rangle - \langle A_n x, x\rangle),$$

a odavde imamo

$$\|A_m x - A_n x\|^2 \leq 2M(\langle A_m x, x\rangle - \langle A_n x, x\rangle).$$

Dakle, niz $(A_n x)_n$ je Cauchyjev niz, za sve x iz H. Sad možemo primijeniti teorem 5.4.11: postoji $A \in \mathbb{B}(H)$ takav da vrijedi $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$, $\forall x \in H$. Taj je operator hermitski jer za sve vektore x i y vrijedi: $\langle Ax, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, A_n y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Konačno ako u nejednakosti $\langle A_n x, x\rangle \le \langle A_m x, x\rangle$, $\forall n \le m, \forall x \in H$ pustimo $m \to \infty$ dobit ćemo $\langle A_n x, x\rangle \le \langle Ax, x\rangle$, $\forall x \in H$.

Posljednja tvrdnja slijedi iz propozicije 5.4.10. □

Sad smo u mogućnosti dokazati da svaki pozitivno semidefinitan ograničen operator na Hilbertovom prostoru posjeduje pozitivno semidefinitan drugi korijen. Prije toga uočimo da je zbroj dva pozitivno semidefinitna operatora također pozitivno semidefinitan operator te da za $A \in \mathbb{B}(H)$ vrijedi $A \ge 0 \Rightarrow A^n \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zaista, $\langle A^{2k}x, x\rangle = \langle A^k x, A^k x\rangle \ge 0$ i $\langle A^{2k+1}x, x\rangle = \langle A(A^k x), A^k x\rangle \ge 0$. Posebno, možemo zaključiti: ako je A pozitivno semidefinitan operator, a p polinom s nenegativnim koeficijentima, onda je i $p(A)$ pozitivno semidefinitan operator.

Teorem 5.5.3 *Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathbb{B}(H)$, $A \ge 0$. Tada postoji jedinstven operator $B \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $B \ge 0$ i $B^2 = A$. Ako za operator $C \in \mathbb{B}(H)$ vrijedi $AC = CA$ onda je i $BC = CB$.*

Dokaz: Smijemo uzeti da je $\|A\| \le 1$ i $0 \le A \le I$. Naime, ako tako nije, možemo promatrati operator $\frac{A}{\|A\|}$. Taj očito ima normu 1 i zadovoljava $\frac{A}{\|A\|} \le I$ zbog $\langle \frac{A}{\|A\|}x, x\rangle \le \|\frac{A}{\|A\|}\|\|x\|\|x\| = \langle x, x\rangle$, najprije za svaki x takav da je $\|x\| = 1$, a onda i za svaki x.

Stavimo $D = I - A \ge 0$ i definiramo niz hermitskih operatora $(A_n)_n$ s $A_1 = 0$ i $A_{n+1} = \frac{1}{2}(D + A_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Očito je $A_n = p_n(D)$ pri čemu su p_n polinomi s nenegativnim koeficijentima: $p_{n+1}(t) = \frac{1}{2}(t + p_n(t)^2)$. Stavimo $q_n = p_{n+1} - p_n$. Tada je $A_{n+1} - A_n = q_n(D)$. Uočimo da je $q_1(D) = A_2 - A_1 = \frac{1}{2}D$, dok za $n \ge 2$ imamo

$$q_n(t) = p_{n+1}(t) - p_n(t) = \frac{1}{2}(t + p_n(t)^2) - \frac{1}{2}(t + p_{n-1}(t)^2) =$$

$$\frac{1}{2}(p_n(t)^2 - p_{n-1}(t)^2) = \frac{1}{2}(p_n(t) + p_{n-1}(t))(p_n(t) - p_{n-1}(t)) =$$

$$\frac{1}{2}(p_n(t) + p_{n-1}(t))q_{n-1}(t).$$

Odavde indukcijom slijedi da su i koeficijenti polinoma q_n, $n \in \mathbb{N}$, nenegativni. Prema opasci prije iskaza teorema sad zaključujemo da je $A_n \ge 0$ i $A_{n+1} - A_n \ge 0$, tj. $A_{n+1} \ge A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Zbog $0 \le A \le I$ imamo $0 \le D \le I$, a prema propoziciji 2.2.14 odavde je $\|D\| \le 1$. Sad indukcijom lako zaključujemo da je i $\|A_n\| \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Naime, $\|A_{n+1}\| = \frac{1}{2}\|D + A_n^2\| \le \frac{1}{2}(\|D\| + \|A_n\|^2) \le 1$.

Prema prethodnom teoremu sad postoji hermitski operator $T \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $Tx = \lim_{n\to\infty} A_n x$, $\forall x \in H$, $A_n \le T$, $\forall n \in \mathbb{N}$ i $\|T\| \le 1$. Još uočimo: jer je $\|A_n\| \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, imamo $\langle A_n x, x\rangle \le \|A_n\|\|x\|\|x\| \le \langle x, x\rangle$ odakle slijedi i $\langle Tx, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A_n x, x\rangle \le \langle x, x\rangle$, $\forall x \in H$, tj. $T \le I$.

Uzmimo da operator $C \in \mathbb{B}(H)$ komutira s A. Tada je i $CD = DC$, zato je i $CA_n = A_nC$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a onda za svaki $x \in H$ imamo $CTx = \lim_{n\to\infty} CA_n x = \lim_{n\to\infty} A_n Cx = TCx$. Dakle, vrijedi $CT = TC$. Posebno, odavde je $AT = TA$ i $A_nT = TA_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nadalje, iz propozicije 5.4.8 slijedi i $T^2x = \lim_{n\to\infty} A_n^2 x$, $\forall x \in H$. Zato za svaki $x \in H$ imamo $Tx = \lim_{n\to\infty} A_{n+1}x = \frac{1}{2}(Dx + \lim_{n\to\infty} A_n^2 x) = \frac{1}{2}(Dx + T^2x)$. Odavde je $T^2 - 2T = -D = A - I$, odnosno $(I - T)^2 = A$. Dakle, ako stavimo $B = I - T$, onda je $B^2 = A$, a zbog $T \leq I$ imamo $B \geq 0$.

Preostaje pokazati da je B jedinstveni operator s tim svojstvima. Uzmimo da vrijedi $C \geq 0$ i $C^2 = A$. Sad najprije $CA = AC$ povlači $BC = CB$. Za proizvoljno odabran $x \in H$ stavimo $y = Cx - Bx$. Tada je $\langle Cy, y\rangle + \langle By, y\rangle = \langle (C+B)y, y\rangle = \langle (C+B)(C-B)x, y\rangle = \langle (C^2 - B^2)x, y\rangle = 0$.

Odavde je $\langle Cy, y\rangle = 0$ i $\langle By, y\rangle = 0$. Neka je $K \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $K \geq 0$ i $K^2 = C$. Tada je $0 = \langle K^2y, y\rangle = \|K^2y\|$, odnosno $Ky = 0$. To odmah povlači $Cy = 0$. Sasvim analogno dobivamo i $By = 0$. Konačno, odavde imamo $\langle y, y\rangle = \langle y, Cx - Bx\rangle = \langle Cy, x\rangle - \langle By, x\rangle = 0$. Dakle, vrijedi $y = 0$, tj. $Cx = Bx$. □

Korolar 5.5.4 *Neka je H Hilbertov prostor i neka za operatore $A, B \in \mathbb{B}(H)$ vrijedi $A \geq 0$, $B \geq 0$ i $A^2 = B^2$. Tada je $A = B$.*

Korolar 5.5.5 *Neka je H Hilbertov prostor i neka za operatore $A, B \in \mathbb{B}(H)$ vrijedi $A \geq 0$, $B \geq 0$ i $AB = BA$. Tada je $AB \geq 0$.*

Dokaz: Operator AB je hermitski zbog $(AB)^* = B^*A^* = BA = AB$. Neka je $C \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $C \geq 0$ i $C^2 = B$. Posebno je i $CA = AC$, a odatle je $AB = AC^2 = CAC$ što povlači $\langle ABx, x\rangle = \langle ACx, Cx\rangle \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{H}$. □

Korolar 5.5.6 *Neka je H Hilbertov prostor i neka su $A, B, C \in \mathbb{B}(H)$ hermitski operatori koji međusobno komutiraju. Ako je $C \geq 0$ i $A \leq B$ onda je i $AC \leq BC$.*

Dokaz: Zbog $B - A \geq 0$ i prethodnog korolara vrijedi $C(B - A) \geq 0$. □

Primjer 5.5.7 Prirodno je operator B iz prethodnog teorema označavati s $\sqrt{A}$. Međutim, primijetimo da drugi korijen ne možemo naći za svaki ograničen operator, čak i ako odustanemo od zahtjeva da taj operator bude pozitivno semidefinitan. Na primjer, ako je $S \in \mathbb{B}(\ell^2)$ operator jednostranog pomaka, ne postoji operator $A \in \mathbb{B}(\ell^2)$ za koji bi vrijedilo $A^2 = S$.

Zaista; dokazat ćemo, što je ekvivalentno, da ne postoji operator $A \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $A^2 = S^*$. Pretpostavimo suprotno: neka za $A \in \mathbb{B}(H)$ vrijedi $A^2 = S^*$. Označimo $M = \operatorname{Ker} S^*$. Iz $M = (\operatorname{Im} S)^\perp$ slijedi $M = \operatorname{span}\{e_1\}$. Kako je $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} S^*$, imamo $\dim \operatorname{Ker} A \leq 1$. Kad bi bilo $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, operator A bi bio injektivan, no tada bi i $A^2 = S^*$ bio injektivan. Zato je $\operatorname{Ker} A = M$.

Dalje, jer je S^* surjektivan i $A^2 = S^*$, zaključujemo da je i A surjektivan. Posebno, $M \subseteq \operatorname{Im} A$, pa postoji vektor $x \in H$ takav da je $Ax \in M$ i $Ax \neq 0$. Sad je $A(Ax) = 0$ jer je $M = \operatorname{Ker} A$; dakle, $S^*x = 0$. Odavde slijedi $x \in M$. Mađutim, onda je i $Ax = 0$. Kontradikcija.

Ako je $A \in \mathbb{B}(H)$ hermitski operator na Hilbertovom prostoru H, očito je $A^2 \geq 0$, pa prema prethodnom teoremu možemo naći $\sqrt{A^2}$. Također je očito da za operatore $A_+ := \frac{1}{2}(\sqrt{A^2}+A)$ i $A_- := \frac{1}{2}(\sqrt{A^2}-A)$ vrijedi $A = A_+ - A_-$. Može se pokazati da vrijedi i $A_+ \geq 0$ i $A_- \geq 0$, no taj dokaz izostavljamo. Dodatno, za svaki $T \in \mathbb{B}(H)$ mogu se naći hermitski operatori A i B takvi da je $T = A + iB$ pa iz toga zaključujemo da se svaki ograničen operaptor može zapisati kao linearna kombinacija 4 pozitivno semidefinitna operatora.

U nastavku ćemo se posvetiti još jednoj važnoj konstrukciji koja se temelji na egzistenciji drugog korijena iz pozitivno semidefinitnog operatora: polarnoj formi.

Definicija 5.5.8 *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Kažemo da je operator $V \in \mathbb{B}(H,K)$ parcijalna izometrija ako je $V|_{(KerV)^\perp}$ izometrija.*

Lako se vidi da je adjungirani operator S^* operatora jednostranog pomaka $S \in \mathbb{B}(\ell^2)$ parcijalna izometrija. I svaki ortogonalan projektor je parcijalna izometrija. Jasno, i svaka izometrija, pa onda i svaki unitaran operator su parcijalne izometrije.

Teorem 5.5.9 *(Polarna forma) Neka su H i K Hilbertovi prostori i $A \in \mathbb{B}(H,K)$. Tada postoje parcijalna izometrija $V \in \mathbb{B}(H,K)$ i pozitivno semidefinitan operator $T \in \mathbb{B}(H)$ takvi da je $A = VT$. Posebno, ako je $H = K$ i ako je operator A normalan, onda se V može izabrati kao unitaran operator.*

Dokaz: Uočimo da je $A^*A \geq 0$ i stavimo $T = \sqrt{A^*A}$. Tada imamo

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle T^2x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2$$

odakle slijedi $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} T$.

Definirajmo sad preslikavanje $V_1 : \operatorname{Im} T \to \operatorname{Im} A$ formulom $V_1(Tx) = Ax$. Ako je $Tx = Ty$ onda je $x - y \in \operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} A$ pa je i $Ax = Ay$. Dakle, V_1 je dobro definirano. Očito, V_1 je i linearno preslikavanje i vrijedi $\operatorname{Im} V_1 = \operatorname{Im} A$.

Dalje, za $Tx \in \operatorname{Im} T$ imamo

$$\langle V_1(Tx), V_1(Tx)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle T^2x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle$$

sto pokazuje da je V_1 izometrija. Zato se V_1 može proširiti do izometrije $V_2 : \overline{\operatorname{Im} T} \to \overline{\operatorname{Im} A}$.

Konačno, uočimo da je $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T}$ i označimo s $P \in \mathbb{B}(H)$ ortogonalni projektor na $\overline{\operatorname{Im} T}$. Stavimo $V = V_2P$. Tada je operator V parcijalna izometrija i vrijedi $A = VT$ jer se operatori A i VT očito podudaraju i na $\operatorname{Ker} T$ i na $\operatorname{Im} T$, pa onda, zbog neprekidnosti i na $\overline{\operatorname{Im} T}$.

Ako je $A \in \mathbb{B}(H)$ normalan operator onda $A^*A = AA^*$ povlači $\|Ax\| = \|A^*x\|$, $\forall x \in H$. Zato je $\operatorname{Ker} A^* = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} T$ i $\overline{\operatorname{Im} A} = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp = (\operatorname{Ker} A)^\perp = (\operatorname{Ker} T)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$. Dakle, u ovom slučaju je V_2 unitaran operator na prostoru $\overline{\operatorname{Im} T}$.

Ako sad definiramo U kao operator koji na $\overline{\operatorname{Im} T}$ djeluje kao V_2, a na $\operatorname{Ker} T$ kao identitet, onda je U očito unitaran operator i vrijedi $A = UT$. □

Napomena 5.5.10 Uočimo da je u drugom dijelu dokaza bilo moguće uzeti da V djeluje kao identitet na $\operatorname{Ker} T$ upravo zato što je $\operatorname{Ker} A^* = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} T$. U stvari, mogao bi se uzeti proizvoljan unitaran operator na $\operatorname{Ker} T$. U prvom dijelu dokaza, kad je A bio proizvoljan operator (ne nužno normalan) korespodentni prostori su $\operatorname{Ker} T$ i $\operatorname{Ker} A^*$, a oni nisu nužno jednakih dimenzija, te među njima ne mora postojati unitaran operator.

Napomena 5.5.11 Uočimo da svaki ograničen operator $A \in \mathbb{B}(H, K)$ dopušta i prikaz oblika $A = T_1 V_1$ gdje je V_1 parcijalna izometrija i $T_1 \geq 0$. To je jednostavna posljedica prethodnog teorema primijenjenog na oparator A^*; potrebno je samo hermitski adjungirati jednakost $A^* = VT$, tj. uzeti $T_1 = T$ i $V_1 = V^*$.

Domaća zadaća 18

Zadatak 5.5.12 Neka su H i K Hilbertovi prostori. Dokažite da je slika parcijalne izometrije $V \in \mathbb{B}(H, K)$ zatvoren potprostor od K.

Zadatak 5.5.13 Neka su H i K Hilbertovi prostori. Dokažite: $V \in \mathbb{B}(H, K)$ je parcijalna izometrija ako i samo ako je V^* parcijalna izometrija.

Zadatak 5.5.14 Neka su H i K Hilbertovi prostori. Dokažite: $V \in \mathbb{B}(H, K)$ je parcijalna izometrija ako i samo ako je operator $P = V^*V$ ortogonalni projektor. Tada je $\operatorname{Ker} V = \operatorname{Ker} P$ i $\operatorname{Im} V^* = \operatorname{Im} P$.

Zadatak 5.5.15 Neka je H Hilbertov prostor, te neka su P_1 i P_2 ortogonalni projektori na zatvorene potprostore M_1 i M_2 prostora H. Dokažite da su tada sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:

(a) $M_1 \perp M_2$;

(b) $P_1 P_2 = 0$;

(c) $P_2 P_1 = 0$;

(d) $P_1(M_2) = \{0\}$;

(e) $P_2(M_1) = \{0\}$.

Zadatak 5.5.16 Neka je H Hilbertov prostor, te neka su P_1 i P_2 ortogonalni projektori na zatvorene potprostore M_1 i M_2 prostora H. Dokažite da su tada sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:

(a) $P_1 \leq P_2$;

(b) $\|P_1 x\| \leq \|P_2 x\|$, $\forall x \in H$;

(c) $M_1 \subseteq M_2$;

(d) $P_2 P_1 = P_1$;

(e) $P_1 P_2 = P_1$.

6 Ograničeni operatori na Banachovim prostorima

6.1 Teoremi o otvorenom preslikavanju i zatvorenom grafu

Ako je A linearan, bijektivan i ograničen operator između normiranih prostora, inverzni operator A^{-1} je također linearan i bijektivan. Međutim, općenito se ne može zaključiti da je i taj operator ograničen. To će ipak biti slučaj uz dodatne pretpostavke na prostore i ta je tvrdnja poznata pod imenom Teorem o inverznom preslikavanju. Zajedno s dva teorema iz naslova ove točke taj teorem čini tercet klasičnih rezultata o ograničenim operatorima na Banachovim prostorima koji se najčešće navode i dokazuju u paketu.

Mi ćemo najprije posebno razmotriti operatore na Hilbertovim prostorima. Započinjemo s lemom koja nema direktne veze s navedenim rezultatima (i koja je zapravo posljedica teorema uniformne ograničenosti).

Lema 6.1.1 *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $A \in \mathbb{B}(H,K)$ surjekcija. Tada je A^* odozdo ograničen.*

Dokaz: Promotrimo skup $S = \{y \in K : \|A^*y\| = 1\}$. Uočimo da je skup S slabo ograničen. Zaista, za proizovljan $z \in K$ najprije nađimo $x \in H$ za koji je $Ax = z$, a tada za svaki $y \in S$ imamo

$$|\langle y, z\rangle| = |\langle y, Ax\rangle| = |\langle A^*y, x\rangle| \leq \|A^*y\| \cdot \|x\| = \|x\|.$$

Prema teoremu 4.3.7 (odnosno, teoremu 5.3.4), skup S je ograničen i jako, to jest i u normi. Dakle, postoji konstanta $C > 0$ za koju vrijedi

$$\|A^*y\| = 1 \Longrightarrow \|y\| \leq C.$$

Sad uočimo da je zbog $K = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A^*$ i surjektivnosti operatora A operator A^* injektivan. Zato je $A^*v \neq 0$ za sve $v \neq 0$. Odavde za svaki $v \neq 0$ imamo $\left\|A^*(\frac{v}{\|A^*v\|})\right\| = 1$ a pokazali smo da to povlači $\left\|\frac{v}{\|A^*v\|}\right\| \leq C$, odnosno $\|A^*v\| \geq \frac{1}{C}\|v\|$. □

Teorem 6.1.2 *Neka su H i K Hilbertovi prostori i neka je $A \in \mathbb{B}(H,K)$ bijekcija. Tada je i A^{-1} ograničen operator.*

Dokaz: Pogledajmo operator A^*; iz bijektivnosti operatora A i jednakosti $H = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A^*}$ i $K = \operatorname{Ker} A^* \oplus \overline{\operatorname{Im} A}$ vidimo da je A^* injekcija s gustom slikom. Prema lemi 6.1.1 A^* je odozdo ograničen. Iz tvrdnje zadatka 1.3.21 sada slijedi da A^* ima zatvorenu sliku; dakle, da je A^* zapravo bijekcija. Osim toga, ako s B označimo inverz od A^*, imamo $\|A^*(By)\| \geq m\|By\|$, $\forall y \in K$; tj. $\|By\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$, $\forall y \in K$. Dakle, imamo ograničen operator B za koji vrijedi $A^*B = BA^* = I$. Jer je B ograničen, postoji B^*. Kad adjungiramo prethodnu jednakost, dobivamo $B^*A = AB^* = I$. Jer je inverzno preslikavanje jedinstveno, slijedi $A^{-1} = B^*$. To znači da je A^{-1} ograničen operator. □

Pokazuje se da je prethodni teorem istinit i za Banachove prostore:

Teorem 6.1.3 *(Teorem o inverznom preslikavanju) Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ bijekcija. Tada je i A^{-1} ograničen operator.*

Teorem 6.1.3 dokazat ćemo kao direktnu posljedicu jednako poznatog rezultata - teorema o otvorenom preslikavanju.

Podsjetimo se da se preslikavanje topoloških prostora $f : X \to Y$ naziva otvoreno ako je za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ i skup $f(U)$ otvoren u Y.

Odmah uočimo: ako je f bijekcija onda je f otvoreno ako i samo ako je inverzno preslikavanje f^{-1} neprekidno. Naime, za svaki otvoren skup U vrijedi $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$.

Sljedeća propozicija daje jednostavan kriterij otvorenosti za linearne operatore.

Propozicija 6.1.4 *Neka su X i Y normirani prostori i $A : X \to Y$ linearan operator. Neka za svaki $r > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $K(0,\delta) \subseteq A(K(0,r))$. Tada je A otvoreno preslikavanje.*

Dokaz: Uzmimo $V \subseteq X$ otvoren i $y \in A(V)$. Tada je $y = Ax$ za neki $x \in V$. Jer je V otvoren, postoji $r > 0$ takav da je $K(x,r) \subseteq V$. Uočimo da je $K(x,r) = x + K(0,r)$. Sad prema pretpostavci postoji $\delta > 0$ takav da je $K(0,\delta) \subseteq A(K(0,r))$. Odavde imamo $K(y,\delta) = y + K(0,\delta) = Ax + K(0,\delta) \subseteq Ax + A(K(0,r)) = A(K(x,r)) \subseteq A(V)$. □

Primjer 6.1.5 Pokažimo primjenom prethodne propozicije da je kvocijentno preslikavanje $\pi : X \to X/M$ otvoreno (gdje je X normiran prostor, a M njegov zatvoreni potprostor). Tvrdimo da ovdje vrijedi $K(\pi(0),r) \subseteq \pi(K(0,r))$. Da to provjerimo, uzmimo $\pi(x) \in K(\pi(0),r)$. Dakle, $\|\pi(x)\| < r$. Prvo nađimo $\epsilon > 0$ takav da vrijedi $\|\pi(x)\| + \epsilon < r$. S druge strane, po definiciji infimuma postoji $a \in M$ takav da je $\|x - a\| \leq \|\pi(x)\| + \epsilon < r$. Jasno je da vrijedi $x - a \in K(0,r)$ i $\pi(x-a) = \pi(x)$. Dakle, $\pi(x) \in \pi(K(0,r))$.

Teorem 6.1.6 *(Teorem o otvorenom preslikavanju) Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A \in \mathbb{B}(X,K)$ surjekcija. Tada je i A otvoreno preslikavanje.*

Jasno je da teorem 6.1.3 trivijalno slijedi iz prethodnog teorema o otvorenom preslikavanju: naime, ako je $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ ograničena bijekcija Banachovih prostora, onda je prema prethodnom teoremu A otvoreno preslikavanje, što upravo znači da je A^{-1} neprekidno.

Teorem o otvorenom preslikavanju ekvivalentan je još jednom klasičnom teoremu funkcionalne analize - teoremu o zatvorenom grafu. Za svaki linearan operator među normiranim prostorima $A : X \to Y$ možemo promatrati njegov graf $\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in X\} \subseteq X \times Y$. Pritom $X \times Y$ promatramo kao normiran prostor s normom $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$. Sjetimo se da prema tvrdnji zadatka 1.1.32 vrijedi: $(x,y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ ako i samo ako je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ i $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Teorem 6.1.7 *(Teorem o zatvorenom grafu) Neka su X i Y Banachovi prostori i $A : X \to Y$ linearan operator sa zatvorenim grafom. Tada je A ograničen.*

Prije dokaza da su sva tri navedena teorema međusobno ekvivalentna, korisno je zabilježiti sljedeću opasku.

Napomena 6.1.8 Neka su X i Y normirani prostori i $A \in \mathbb{B}(X, Y)$. Tada postoji jedinstven operator $\tilde{A} \in \mathbb{B}(X/\operatorname{Ker} A, Y)$ takav da vrijedi $\tilde{A}\pi = A$. Operator $\tilde{A}$ je injekcija i vrijedi $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} \tilde{A}$.

Zaista: $\tilde{A}$ se definira formulom $\tilde{A}([x]) = Ax$. Jasno je da je $\tilde{A}$ dobro definiran jer $[x] = [x']$ povlači $x - x' \in \operatorname{Ker} A$ pa je $Ax = Ax'$. Operator $\tilde{A}$ je očito linearan. Pokažimo da je neprekidan u točki 0. Uzmimo otvoren skup $V \subseteq Y$ koji sadrži 0. Tada, jer A je neprekidan, postoji otvoren skup $U \subseteq X$ takav da je $0 \in U$ i $A(U) \subseteq V$. Jer je π otvoreno preslikavanje, i skup $\pi(U)$ je otvoren. Pritom vrijedi $\tilde{A}(\pi(U)) = A(U) \subseteq V$.

Druga tvrdnja je trivijalna. □

Teorem 6.1.9 *Teoremi 6.1.3, 6.1.6 i 6.1.7 su međusobno ekvivalentni.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da vrijedi teorem 6.1.7 i dokažimo teorem 6.1.6. Uzmimo surjektivan linearan operator $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, pri čemu su X i Y Banachovi prostori. Najprije primijetimo da je operator $\tilde{A}$ iz prethodne napomene bijektivan.

Promotrimo operator $G : Y \to X/\operatorname{Ker} A$ definiran s $G(Ax) = [x]$. Operator G je dobro definiran; ako je $Ax = Ax'$ onda je $x - x' \in \operatorname{Ker} A$ pa je $[x] = [x']$. Jasno je da je G linearan, te da je G zapravo inverz operatora $\tilde{A}$. Pokažimo da je graf operatora G zatvoren.

Neka je $((y_n, [x_n]))_n$ niz u $\Gamma(G)$ koji konvergira k $(y, [x])$. Prije svega, jer je $(y_n, [x_n]) \in \Gamma(G)$, imamo $G(y_n) = [x_n]$, odakle je $Ax_n = y_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, pretpostavljena konvergencija znači da $y_n \to y$ i $[x_n] \to [x]$. Ovo drugo povlači $\|[x_n - x]\| \to 0$, odnosno $\inf\{\|x_n - x - v\| : v \in \operatorname{Ker} A\} \to 0$. Zbog toga možemo naći niz $(v_n)_n$ u $\operatorname{Ker} A$ takav da $\|x_n - x - v_n\| \to 0$. Odavde zaključujemo da $x_n - v_n \to x$. Kako je A neprekidan, slijedi $A(x_n - v_n) \to Ax$, a jer je $v_n \in \operatorname{Ker} A$, to znači $Ax_n \to Ax$. Jer je $Ax_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ovo možemo pisati kao $y_n \to Ax$. Budući da otprije znamo $y_n \to y$, možemo zaključiti da je $Ax = y$. Zato je $(y, [x]) = (Ax, [x]) \in \Gamma(G)$.

Time je pokazano da je graf operatora G zaista zatvoren. Jer su prostori $X/\operatorname{Ker} A$ i Y Banachovi, teorem 6.1.7 povlači da je operator G neprekidan. Zato je njegov inverz, a to je upravo $\tilde{A}$, otvoreno preslikavanje. Jer je $A = \tilde{A}\pi$, i operator A je, kao kompozicija dva otvorena preslikavanja, otvoreno preslikavanje.

Već smo konstatirali da teorem 6.1.6 povlači 6.1.3.

Preostaje pokazati da teorem 6.1.3 povlači teorem 6.1.7. Neka su prostori X i Y Banachovi, te neka operator $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ ima zatvoren graf. Najprije uočimo da je $\Gamma(A)$ kao zatvoren potprostor Banachovog prostora $X \times Y$ i sam Banachov. Promotrimo sada projekcije $p_X : X \times Y \to X$, $p_X(x, y) = x$ i $p_Y : X \times Y \to Y$, $p_Y(x, y) = y$. Jasno je da su p_X i p_Y ograničeni i surjektivni linearni operatori. Štoviše, $p := p_X|_{\Gamma}(A) : \Gamma(A) \to X$ je ograničena bijekcija. Prema teoremu 6.1.6 i $p^{-1} : X \to \Gamma(A)$ je ograničen operator. Sad uočimo da je $p_Y(p^{-1}(x)) = Ax$, $\forall x \in X$. Dakle, i operator A kao kompozicija dva ograničena operatora je ograničen. □

Slijedi dokaz teorema 6.1.7. Za dokaz nam treba sljedeća lema.

Lema 6.1.10 *Neka je X Banachov prostor i p polunorma na X. Ako za svaki konvergentan red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ u X vrijedi $p(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) \in [0, \infty]$, onda postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi $p(x) \leq C\|x\|$, $\forall x \in X$.*

Lemu ćemo dokazati u sljedećoj točki koristeći Baireov teorem.

Dokaz teorema 6.1.7: Pretpostavimo da A nije ograničen. Uvedimo polunormu na X formulom $p(x) = \|Ax\|$. Uočimo da ne može postojati $C > 0$ sa svojstvom $p(x) \leq C\|x\|$, $\forall x \in X$ jer to bi značilo $\|Ax\| \leq C\|x\|$, $\forall x \in X$. Zato, prema prethodnoj lemi, postoji konvergentan red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ u X za koji vrijedi $p(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) > \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n)$. Sad odavde zaključujemo da postoji $\epsilon > 0$ takav da je

$$p(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) + \epsilon. \tag{1}$$

Uočimo da su obje strane u (1) konačne. Posebno, i red $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ax_n\|$ konvergira pa, jer je prostor potpun, konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} Ax_n$.

Stavimo $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$ i $v_n = \sum_{j=1}^{n} Ax_j = As_n$ za $n \in \mathbb{N}$. Oba ova niza su konvergentna, pa im limese označimo sa s i v, respektivno. Uočimo da je

$$\|v_n\| = \|\sum_{j=1}^{n} Ax_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|Ax_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Ax_j\| \overset{(1)}{\leq} p(\sum_{j=1}^{\infty} x_j) - \epsilon = p(s) - \epsilon = \|As\| - \epsilon.$$

Odavde je

$$\|As - v_n\| \geq \|As\| - \|v_n\| \geq \epsilon.$$

Dakle, $v_n \notin K(As, \epsilon)$ odakle slijedi i $v \notin K(As, \epsilon)$. Posebno, $v \neq As$, što znači da $(s, v) \notin \Gamma(A)$. Kako imamo $(s_n, As_n) \to (s, v)$, zaključujemo da graf operatora A nije zatvoren. Kontradikcija. $\square$

Domaća zadaća 19

Zadatak 6.1.11 Uz oznake iz napomene 6.1.8 pokažite da je $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Zadatak 6.1.12 Neka su $\|\cdot\|_a$ i $\|\cdot\|_b$ dvije norme na prostoru X, te neka je X potpun s obzirom na obje. Ako postoji konstanta $C >$ za koju vrijedi $\|x\|_a \leq C\|x\|_b$, $\forall x \in X$, dokažite da su norme $\|\cdot\|_a$ i $\|\cdot\|_b$ ekvivalentne. *Uputa:* primijenite teorem 6.1.3.

6.2 Baireov teorem i posljedice

Standardni dokazi teorema uniformne ograničenosti i teorema o otvorenom preslikavanju baziraju se na Baireovom teoremu. To je rezultat iz teorije metričkih prostora i sam za sebe je zanimljiv. U ovoj točki dokazujemo Baireov teorem i pokazujemo na njemu građene dokaze spomenutih klasičnih rezultata funkcionalne analize.

Osnovni pojam u Baireovoj teoriji je pojam nigdje gustog skupa. Da ga uvedemo, potrebno je najprije definirati nutrinu, odnosno interior skupa u topološkom prostoru - to je pojam dualan pojmu zatvarača. Za skup A u topološkom prostoru X nutrina ili interior $\operatorname{Int} A$ se definira kao najveći otvoren skup koji je sadržan u A. Odmah je jasno da je $\operatorname{Int} A$ zapravo unija svih otvorenih podskupova od A. Uočimo također da je A otvoren ako i samo ako je $A = \operatorname{Int} A$.

Definicija 6.2.1 *Skup $A \subseteq X$ u topološkom prostoru X se zove nigdje gust ako je $\operatorname{Int}(\overline{A}) = \emptyset$. Skup $S \subseteq X$ se zove skup prve kategorije ako je unija prebrojivo mnogo nigdje gustih skupova. U protivnom se kaže da je S druge kategorije.*

Uočimo da je definicioni uvjet $\operatorname{Int}(\overline{A}) = \emptyset$ ekvivalentan sa zahtjevom da je skup $X \setminus \overline{A}$ gust u X. Zaista, uzmimo $x \in X$ i $r > 0$. Ako je kugla $K(x,r)$ disjunktna s $X \setminus \overline{A}$, onda je $K(x,r) \subseteq \overline{A}$, pa je interior skupa $\overline{A}$ očito neprazan. Jednako se argumentira u obratnom smjeru.

U svakom slučaju, intuitivno je jasno da je nigdje gust skup, štoviše, čak njegov zatvarač, skup koji je vrlo razrijeđeno smješten u prostoru.

Lema 6.2.2 *Neka je X potpun metrički prostor, te neka je $(A_n)_n$ niz zatvorenih nigdje gustih podskupova od X. Tada je $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \neq X$.*

Označimo $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $V_n = X \setminus A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Prema pretpostavci, skupovi V_n su otvoreni. Jasno je da je $V_1 \neq \emptyset$ jer bi u protivnom bilo $A_1 = X$, što nije, jer je A_1 nigdje gust. Jer je V_1 neprazan i otvoren, postoje $x_1 \in X$ i $r_1 > 0, r_1 \leq 1$, takvi da je $\overline{K}(x_1, r_1) \subseteq V_1$ (naime, V_1 sadrži neku otvorenu kuglu, pa ako toj kugli smanjimo radijus, ta manja koncentrična kugla će zajedno s pripadajućom sferom biti sadržana u V_1).

Jer je $A_2 = \overline{A_2}$ nigdje gust, on ne može sadržavati ni jednu otvorenu kuglu, posebno, ni $K(x_1, r_1)$. Dakle, vrijedi $V_2 \cap K(x_1, r_1) \neq \emptyset$. Kako je taj skup otvoren, postoje $x_2 \in X$ i $r_2 > 0, r_2 \leq \frac{1}{2}$, takvi da je $\overline{K}(x_2, r_2) \subseteq V_2 \cap K(x_1, r_1)$.

Induktivno sad konstruiramo niz kugli $\overline{K}(x_1, r_1) \supseteq \overline{K}(x_2, r_2) \supseteq \ldots \overline{K}(x_n, r_n) \supseteq \ldots$ s radijusima $r_n \leq \frac{1}{n}$ takvih da vrijedi $\overline{K}(x_n, r_n) \subseteq V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Uočimo da za $m, n \geq n_0$ imamo $x_n, x_m \in \overline{K}(x_{n_0}, r_{n_0})$ pa je $d(x_n, x_m) \leq \frac{2}{n_0}$. Dakle, (x_n) je Cauchyjev niz u X. Neka je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Kako je $x_k \in \overline{K}(x_n, r_n)$, $\forall k \geq n$, zaključujemo da je $x \in \overline{K}(x_n, r_n) \subseteq V_n$ i taj je zaključak točan za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $x \notin A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, što znači da $x \notin A$. □

Na redu je Baireov teorem. Najčešće se citira u formulaciji "potpun metrički prostor je skup druge kategorije", ali teorem zapravo daje više.

Teorem 6.2.3 *(Baire) Neka je X potpun metrički prostor. Svaki neprazan otvoren podskup U od X je skup druge kategorije.*

Dokažimo tvrdnju najprije za $U = X$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji teorema: neka je $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\operatorname{Int}(\overline{A_n}) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Primijetimo da su i skupovi $\overline{A_n}$ nigdje gusti i da je pogotovo $X = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. No, to je u izravnoj kontradikciji s prethodnom lemom.

Uzmimo sada proizvoljan neprazan otvoren skup $U \subseteq X$ i pretpostavimo da je $U = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\operatorname{Int}(\overline{A_n}) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Neka je K bilo koja zatvorena kugla u U. Tada je $K = \cup_{n=1}^{\infty} (K \cap A_n)$ i $\operatorname{Int}(\overline{K \cap A_n}) \subseteq \operatorname{Int}(\overline{A_n}) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Ovo je kontradikcija s tvrdnjom dokazanom u prvom dijelu dokaza jer je i K potpun metrički prostor. □

Korolar 6.2.4 *Neka je X potpun metrički prostor i neka je $(U_n)_n$ niz otvorenih skupova od kojih je svaki gust u X. Tada je i $A = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ gust u X.*

Pretpostavimo suprotno: neka postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $A \cap K(x,r) = \emptyset$. Opet možemo smanjiti radijus pa dobiti i jači zaključak; naime, $A \cap \overline{K}(x,r) = \emptyset$. Sada je $\overline{K}(x,r) = \overline{K}(x,r) \setminus A = \overline{K}(x,r) \setminus (\cap_{n=1}^{\infty} U_n) = \cup_{n=1}^{\infty} (\overline{K}(x,r) \setminus U_n)$. Uočimo da je $\overline{K}(x,r)$ potpun metrički prostor, te da su skupovi $\overline{K}(x,r) \setminus U_n$ zatvoreni. Prema prethodnom teoremu, bar jedan od tih skupova ima neprazan interior. Dakle, za neki $m \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \overline{K}(x,r) \setminus U_m$ i postoji $\epsilon > 0$ takvi da je $K(y,\epsilon) \subseteq \overline{K}(x,r) \setminus U_m$. Drugim riječima, $K(y,\epsilon) \cap U_m = \emptyset$. No, to je nemoguće, jer U_m je gust u X. □

Sad smo u mogućnosti dokazati lemu 6.1.10.

Dokaz leme 6.1.10: Neka je, za $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x \in X : p(x) \leq n\}$ i $F_n = \overline{A_n}$. Jer je p polunorma, skupovi A_n i F_n su simetrični (zbog $p(-x) = p(x)$) i konveksni (zbog $p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y)$).

Kako je X potpun prostor i vrijedi $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, postoji n za koji je $\operatorname{Int} F_n \neq \emptyset$. Zato postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $K(x_0, r) \subseteq F_n$. Kako je $K(-x_0, r) = -K(x_0, r)$, slijedi i $K(-x_0, r) \subseteq F_n$.

Sad, ako je $\|x\| < r$ imamo $x_0 + x \in K(x_0, r)$ i $x - x_0 \in K(-x_0, r)$; dakle, $x + x_0, x - x_0 \in F_n$. Zbog konveksnosti je onda i $x = \frac{1}{2}(x - x_0) + \frac{1}{2}(x + x_0) \in F_n$. Ovime smo pokazali da vrijedi $K(0, r) \subseteq F_n$.

Sad želimo dokazati da vrijedi i $K(0,r) \subseteq A_n$. Uzmimo x takav da je $\|x\| < r$. Nađimo $\rho > 0$ za koji je $\|x\| < \rho < r$ i fiksirajmo neki q za koji vrijedi $0 < q < 1 - \frac{\rho}{r}$. Primijetimo da za tako odabran broj q vrijedi $1 - q > \frac{\rho}{r}$, a odavde i $\frac{1}{1-q} \frac{\rho}{r} < 1$.

Stavimo $y = \frac{r}{\rho} x$. Tada je $y \in K(0,r) \subseteq F_n = \overline{A_n}$ pa postoji $y_0 \in A_n$ takav da je $\|y - y_0\| < qr$, odnosno $\frac{1}{q}(y - y_0) \in K(0,r)$. Sad možemo naći $y_1 \in A_n$ takav da vrijedi $\|\frac{1}{q}(y - y_0) - y_1\| < qr$, odnosno $\|y - y_0 - qy_1\| < q^2 r$. Induktivno konstruiramo niz $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ u A_n za koji vrijedi $\|y - \sum_{k=0}^{m} q^k y_k\| < q^{m+1} r$. Dakle, vrijedi $y = \sum_{k=0}^{\infty} q^k y_k$. Prema pretpostavci sad vrijedi $p(y) \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k p(y_k) \leq \frac{1}{1-q} n$. Kako je $x = \frac{\rho}{r} y$, imamo $p(x) \leq \frac{1}{1-q} \frac{\rho}{r} n < n$; dakle, $x \in A_n$ što smo i željeli dokazati.

Uzmimo sad proizvoljan $x \in X$, $x \neq 0$ i stavimo $\lambda = \frac{r}{\|x\|(1+\epsilon)}$ gdje je $\epsilon > 0$ proizvoljno odabran. Jasno je da vrijedi $\lambda x \in K(0,r) \subseteq A_n$. Dakle, $p(\frac{r}{\|x\|(1+\epsilon)} x) \leq n$, odnosno $p(x) \leq \frac{(1+\epsilon)n}{r} \|x\|$. □

Primijetimo da smo ovime kompletirali razmatranja iz prethodne točke u smislu da su sada svi rezultati dokazani. U nastavku dajemo alternativne dokaze koji se direktnije zasnivaju na Baireovom teoremu. Počinjemo s Banach - Steinhausovovim teoremom. U stvari, ovdje ćemo dokazati čak nešto jaču tvrdnju od one navedene u teoremu 5.3.2.

Teorem 6.2.5 *Neka su X i Y normirani prostori, te neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}(X,Y)$ proizvoljna familija operatora s X u Y. Pretpostavimo da postoji skup druge kategorije $X_0 \subseteq X$ sa svojstvom da za svaki $x \in X_0$ vrijedi sup $\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$. Tada je i sup $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$.*

Dokaz: Za $T \in \mathcal{F}$ i $n \in \mathbb{N}$ stavimo $G(T,n) = \{x \in X : \|Tx\| \leq n\}$. To su zatvoreni skupovi pa je za svaki $n \in \mathbb{N}$ zatvoren i $F_n = \cap_{T\in\mathcal{F}} G(T,n) = \{x \in X : \|Tx\| \leq n, \forall T \in \mathcal{F}\}$.

Jasno je da vrijedi $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty\}$. Zato je, prema pretpostavci, $X_0 \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Kako je X_0 skup druge kategorije, bar jedan F_n $(= \overline{F_n})$ ima neprazan interior. Dakle, postoje $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $\overline{K}(x_0, r) \subseteq F_m$. Drugim riječima, za sve $x \in \overline{K}(x_0, r)$ vrijedi $\|Tx\| \leq m$, $\forall T \in \mathcal{F}$.

Ako je $\|x\| \leq r$ onda je $x_0 - x \in \overline{K}(x_0, r)$ pa je, prema prethodnom, $\|T(x_0 - x)\| \leq m$, $\forall T \in \mathcal{F}$. Odavde je $\|Tx\| \leq \|T(x - x_0)\| + \|Tx_0\| \leq 2m$, $\forall T \in \mathcal{F}$.

Naposljetku, ako je $x \in X$, $x \neq 0$, onda prema prethodnom imamo $\|T(\frac{r}{\|x\|}x)\| \leq 2m$, $\forall T \in \mathcal{F}$. Odavde je $\|Tx\| \leq \frac{2m}{r}\|x\|$, $\forall x \in X, \forall T \in \mathcal{F}$, tj. $\|T\| \leq \frac{2m}{r}$, $\forall T \in \mathcal{F}$. □

Pokažimo sada kako se na temelju Baireovog teorema može dokazati Teorem o otvorenom preslikavanju. Najprije trebamo sljedeći tehnički rezultat.

Lema 6.2.6 *Neka su X i Y normirani prostori i neka je $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ operator takav da je $\mathrm{Im}\, A$ skup druge kategorije u Y. Tada za svaki $r > 0$ postoji $\rho > 0$ takav da je $K(0,\rho) \subseteq \overline{A(K(0,r))}$.*

Dokaz: Uzmimo proizvoljan $r > 0$. Iz (očite) jednakosti $X = \cup_{n=1}^{\infty} nK(0, \frac{r}{2})$ slijedi $\mathrm{Im}\, A = \cup_{n=1}^{\infty} nA(K(0, \frac{r}{2}))$. Jer je $\mathrm{Im}\, A$ skup druge kategorije, bar jedan od skupova $\overline{nA(K(0, \frac{r}{2}))}$ ima neprazan interior. Dijeljenjem s n isti zaključak dobivamo za skup $\overline{A(K(0, \frac{r}{2}))}$. Zato $\overline{A(K(0, \frac{r}{2}))}$ sadrži otvorenu kuglu $K(y, \rho)$ za neke $y \in Y$ i $\rho > 0$. Sada je $K(0,\rho) = K(y,\rho) - y \subseteq \overline{A(K(0, \frac{r}{2}))} - y \subseteq \overline{A(K(0, \frac{r}{2}))} - \overline{A(K(0, \frac{r}{2}))} \subseteq \overline{A(K(0, \frac{r}{2}) - K(0, \frac{r}{2}))} \subseteq \overline{A(K(x,r))}$ □

Napomena 6.2.7 Dokaz teorema 6.1.6: Prema prethodnoj lemi, za svaki $\epsilon_0 > 0$ postoji $\delta_0 > 0$ takav da je $K(0, \delta_0)$ sadržana u $\overline{A(K(0, \epsilon_0))}$. Sad tvrdimo da možemo ispustiti znak zatvarača ako udvostručimo radijus, tj. da vrijedi $K(0, \delta_0) \subseteq A(K(0, 2\epsilon_0))$.

Da to pokažemo, uzmimo niz (ϵ_n) pozitivnih brojeva takvih da vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \epsilon_0$. Primjenom prethodne leme možemo naći $\delta_1 > 0$ takav da je $K(0, \delta_1) \subseteq \overline{A(K(0, \epsilon_1))}$. Dalje, za broj ϵ_1 možemo naći $\delta_2 > 0$ takav da je $\delta_2 < \delta_1$ i $K(0, \delta_2) \subseteq \overline{A(K(0, \epsilon_2))}$. Induktivnim postupkom dolazimo do niza pozitivnih brojeva (δ_n) takvog da je $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ i $K(0, \delta_n) \subseteq \overline{A(K(0, \epsilon_n))}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Uzmimo sad proizvoljni $y \in K(0, \delta_0)$. Zbog $K(0, \delta_0) \subseteq \overline{A(K(0, \epsilon_0))}$ postoji $x_0 \in K(0, \epsilon_0)$ za koji vrijedi $\|y - Ax_0\| < \delta_1$. Odavde je $y - Ax_0 \in K(0, \delta_1) \subseteq \overline{A(K(0, \epsilon_1))}$. Zato postoji $x_1 \in K(0, \epsilon_1)$ takav da vrijedi $\|(y - Ax_0) - Ax_1\| < \delta_2$. Sad induktivno nastavimo dalje. Tako dolazimo do niza (x_n) u X takvog da je $x_n \in K(0, \epsilon_n)$ i $\|y - Av_n\| < \delta_{n+1}$, gdje smo označili $v_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Jer je $\|x_n\| < \epsilon_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ i jer je prostor X potpun, red $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergira k nekom vektoru $x \in X$. Zbog neprekidnosti norme vrijedi $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|v_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k = \epsilon_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < 2\epsilon_0$. Dakle je $x \in K(0, 2\epsilon_0)$. Neprekidnost operatora A i $x = \lim_{n\to\infty} v_n$ povlače $Ax = \lim_{n\to\infty} Av_n$. Sad iz $\|y - Av_n\| < \delta_{n+1}$ i $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ slijedi $y = Ax$. Time je dokazano $K(0, \delta_0) \subseteq A(K(0, 2\epsilon_0))$.

Preostaje pozvati se na propoziciju 6.1.4. □

Na kraju, vratimo se još jednom pitanju metrizabilnosti slabe topologije na normiranom prostoru. Pitanje glasi: postoji li metrika d na normiranom prostoru X za koju se izvedena topologija podudara sa slabom topologijom na X? Drugačije rečeno, postoji li metrika d na X takva da kugle $K(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$, $x \in X, r > 0$, čine bazu slabe topologije na X? Uočimo da bi afirmativan odgovor implicirao da slaba topologija na takvom prostoru X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Prisjetimo se da smo u primjeru 5.3.7 pokazali da to nije slučaj na Hilbertovim prostorima beskonačne dimenzije. U stvari, takva je situacija i na svakom beskonačno dimenzionalnom prostoru.

Lema 6.2.8 *Neka su $f, f_1, \dots, f_n$ linearni funkcionali na vektorskom prostoru X. Tada je f linearna kombinacija funkcionala $f_1, \dots, f_n$ ako i samo ako je $\cap_{i=1}^n Ker\, f_i \subseteq Ker\, f$.*

Dokaz: Ako je $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$, tada je očito $\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\, f_i \subseteq \mathrm{Ker}\, f$.

Pretpostavimo sada da je $\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\, f_i \subseteq \mathrm{Ker}\, f$. Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je skup $\{f, f_1, \dots, f_n\}$ linearno nezavisan. Definirajmo $\Phi : X \to \mathbb{F}^{n+1}$ formulom $\Phi(x) = (f(x), f_1(x), \dots, f_n(x))$. Zbog $\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\, f_i \subseteq \mathrm{Ker}\, f$ vektor $(1, 0, \dots, 0)$ ne može biti u slici od Φ. Dakle, $\mathrm{Im}\,\Phi$ je pravi potprostor od $\mathbb{F}^{n+1}$, te stoga postoji netrivijalan linearan funkcional na $\mathbb{F}^{n+1}$ koji iščezava na $\mathrm{Im}\,\Phi$. Koristeći teorem o reprezentaciji linearnih funkcionala možemo zaključiti:

$$\exists (\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ tako da je } \lambda v + \sum_{i=1}^n \lambda_1 v_i = 0,\ \forall (v, v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{Im}\,\Phi.$$

Odavde je

$$\lambda f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_1 f_i(x) = \left(\lambda f + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right)(x) = 0,\ \forall x \in X,$$

što zapravo znači

$$\lambda f + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0.$$

Kako je skup $\{f, f_1, \dots, f_n\}$ linearno nezavisan, ne može biti $\lambda = 0$, pa slijedi

$$f = -\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} f_i.$$

□

Teorem 6.2.9 *Slaba topologija na normiranom prostoru X je metrizabilna ako i samo ako je $\dim X < \infty$.*

Dokaz: Ako je $\dim X < \infty$ teorem 5.2.8 nam kaže da se slaba topologija na X podudara s jakom, te stoga potječe ne samo od metrike, već od norme na X.

Pretpostavimo sada da na X postoji metrika d za koju se inducirana topologija podudara sa slabom topologijom na X. Posebno, za sve $k \in \mathbb{N}$, kugle $B_k = \{x \in X : d(0,x) < \frac{1}{k}\}$ su bazični otvoreni skupovi u slaboj topologiji na X. S obzirom na izgled definicione baze okolina u 0 u slaboj topologiji na X, možemo zaključiti da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji konačan skup funkcionala $F_k \subseteq X'$ i pozitivan broj ϵ_k tako da vrijedi

$$U_k = \{x \in X : |f(x)| < \epsilon_k, \forall f \in F_k\} \subseteq B_k.$$

Stavimo $F = \cup_{k=1}^{\infty}$. Pokazat ćemo da ovaj prebrojivi skup algebarski generira X'. Tada će prema tvrdnji zadatka 6.2.10 slijediti da je prostor X' konačnodimenzionalan, a onda je zbog tvrdnje zadatka 4.2.14 i $\dim X < \infty$.

Preostaje, dakle, dokazati da skup F algebarski generira X'. Uzmimo $g \in X'$ i stavimo $U = \{x \in X : |g(x) > 1\}$. Po definiciji, taj skup je otvorena okolina nul-vektora u slaboj topologiji na X. Zato postoji $k \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $B_k \subseteq U$, a tada je i $U_k \subseteq U$. Neka je $x \in \cap_{f \in F_k} \mathrm{Ker}\, f$. Tada je i $f(\lambda x) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall f \in F_k$. Posebno, vrijedi i $\lambda x \in U_k \subseteq U, \forall \lambda \in \mathbb{F}$. To konkretno znači da je $|\lambda|\,|g(x)| < 1, \forall \lambda \in \mathbb{F}$. Slijedi $g(x) = 0$, a time smo pokazali da vrijedi $\cap_{f \in F_k} \mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, g$. Prethodna lema nam sad kaže da je g linearna kombinacija funkcionala koji pripadaju skupu F_k. □

Domaća zadaća 20

Zadatak 6.2.10 Neka je X Banachov prostor u kojem postoji niz $(x_n)_n$ takav da se svaki vektor x može prikazati kao konačna linearna kombinacija vektora x_n, $n \in \mathbb{N}$. dokažite da je tada $\dim X < \infty$. *Uputa:* uočite da za potprostore $M_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $X = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$ pa primijenite Baireov teorem. *Napomena:* ovo pokazuje da je algebarska dimenzija beskonačnodimenzionalnog Banachovog prostora veća od $\aleph_0$.

Zadatak 6.2.11 Upotpunite dokaz leme 6.2.8 tako da pokažete kako pretpostavka da je skup $\{f_1, \ldots, f_n\}$ linearno nezavisan zaista nije smanjenje općenitosti.

6.3 Dodatak: Još o ekvivalenciji klasičnih teorema

Pokazali smo u točki 6.1 (v. teorem 6.1.9) da su teoremi o otvorenom preslikavanju, o inverznom preslikavanju i o zatvorenom grafu međusobno ekvivalentni. Zanimljivo je pitanje jesu li ta tri teorem ekvivalentna i s Banach - Steinhausovim teoremom uniformne ograničenosti (teorem 5.3.2).

Pokazat ćemo najprije da princip uniformne ograničenosti povlači teorem o otvorenom preslikavanju (pa onda, a posteriori, i teorem o inverznom preslikavanju i o zatvorenom grafu. Dokaz koji slijedi iznosimo prema bilješci N. Eldredgea iz diskusije na web stranici Mathoverflow (`http://mathoverflow.net/`). Ključni korak se sastoji u dokazu leme 6.2.6 na temelju principa uniformne ograničenosti. Tada se, u nastavku, direktno primjenjuje dokaz koji je izložen u napomeni 6.2.7.

Zadatak 6.3.1 Neka su X i Y normirani prostori i $A \in \mathbb{B}(X, Y)$. Tada je za svaki $m > 0$ formulom

$$\|y\|_m = \inf\{m\|z\| + \|x\| : z \in Y, x \in X,\, y = z + Ax\} \tag{2}$$

definirana norma na Y.

Propozicija 6.3.2 *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ surjekcija. Tada postoji $\delta > 0$ takav da je $K(0, \delta) \subseteq \overline{A(K(0, 1))}$.*

Dokaz: Za svaki $n \in \mathbb{N}$ označimo s Y_n prostor Y ekipiran s normom $\|\cdot\|_n$ definiranom formulom (2). Nadalje, promotrimo prostor konačnih nizova vektora iz Y

$$c_{00}(Y) = \{(y_n)_n : y_n \in Y_n,\, y_n = 0, \forall n \geq n_0\}$$

(pri čemu n_0 ovisi o nizu $(y_n)_n$) s normom $\|(y_n)_n\| = \sup\{\|y_n\|_n : n \in \mathbb{N}\}$. Na ovaj način $c_{00}(Y)$ postaje normiran prostor.

Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ promotrimo linearan operator $S_n : Y \to c_{00}(Y)$ definiran s

$$S_n(y) = (0, \ldots, 0, y, 0, \ldots)$$

(y na n-toj poziciji). Jasno je da za svaki $y \in Y$ vrijedi $\|y\|_n \leq n\|y\|$ pa je S_n ograničen operator. S druge strane, A je surjektivan pa za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ za koji je $Ax = y$; sada definicija norme $\|\cdot\|_n$ pokazuje da vrijedi i $\|y\|_n \leq \|x\|$. To pokazuje da je skup $\{\|S_n y\| : n \in \mathbb{N}\}$ ograničen s $\|x\|$, za svaki pojedini $y \in Y$. Prema teoremu 5.3.2 sada postoji $C > 0$ takav da je $\|S_n\| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (Ovdje je dobro primijetiti da prostor $c_{00}(Y)$ nije potpun, ali u pretpostavkama teorema 5.3.2 se niti ne traži da je kodomena Banachov prostor.)

Neka je $\delta < \frac{1}{C}$. Pokazat ćemo da je $K(0, \delta) \subseteq \overline{A(K(0, 1))}$. Uzmimo $y \in Y$ takav da je $\|y\| < \delta$. Sada je

$$\|y\|_n = \|S_n y\| \leq \|S_n\|\,\|y\| \leq C\delta < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Po definiciji norme $\|\cdot\|_n$ to znači da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje $z_n \in Y$ i $x_n \in X$ takvi da je $y = z_n + Ax_n$ i $n\|z_n\| + \|x_n\| < 1$. Posebno, imamo i $\|z_n\| < \frac{1}{n}$ što pokazuje da $z_n \to 0$. To zajedno s $y = z_n + Ax_n$ povlači $Ax_n \to y$. Kako je $\|x\| < 1$, slijedi $y \in \overline{A(K(0, 1))}$. $\square$

Primijetimo da smo ovime pokazali kako princip uniformne ograničenosti povlači teoreme o otvorenom preslikavanju, o inverznom preslikavanju i o zatvorenom grafu, što znači da se sva četiri teorema (u navedenim verzijama) mogu dokazati bez pozivanja na Baireov teorem. Ipak, to ne trebalo sugerirati bilo kakvu intenciju ili potrebu da se Baireov teorem zaobiđe. Naprotiv, taj teorem ima čitav niz korisnih i zanimljivih primjena i izvan ovog okvira diskusije o klasičnim teoremima funkcionalne analize. Neke od tih zanimljivih primjena Baireovog teorema mogu se naći na `http://math.stackexchange.com/questions/165696/your-favourite-application-of-the-baire-category-theorem`.

Pokažimo na kraju da su sva četiri spomenuta teorema zapravo međusobno ekvivalentni. Konkretno, pokazat ćemo da se princip uniformne ograničenosti može izvesti iz teorema o zatvorenom grafu, te će time, zajedno s prethodnom propozicijom i teoremom 6.1.9, krug biti zatvoren.

Napomena 6.3.3 Neka je X Banachov, Y normiran prostor i $(T_j)_{j\in J} \subseteq \mathbb{B}(X,Y)$ familija operatora s X u Y takva da za svaki $x \in X$ vrijedi $\sup\{\|T_j x\| : j \in J\} < \infty$. Tada iz teorema o zatvorenom grafu slijedi da je i $\sup\{\|T_j\| : j \in J\} < \infty$.

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je prostor Y potpun. Definirajmo prostor $\oplus_{j\in J} Y$ kao skup svih preslikavanja s J u Y, $j \mapsto y_j$, takvih da je $\sup\{\|y_j\| : j \in J\} < \infty$. Definirajmo normu na $\oplus_{j\in J} Y$ s $\|(y_j)_{j\in J}\| = \sup\{\|y_j\| : j \in J\}$. Lako se pokazuje da je ovo zaista norma te da je u toj normi i $\oplus_{j\in J} Y$ Banachov prostor. Sad definirajmo operator $T : X \to \oplus_{j\in J} Y$ formulom $Tx = (T_j x)_{j\in J}$. Prema pretpostavci, T je dobro definiran, to jest T zaista poprima vrijednosti u prostoru $\oplus_{j\in J} Y$. Operator T je očito i linearan.

Pokažimo da T ima zatvoren graf. U tu svrhu pretpostavimo da $x_n \to x$ i $Tx_n \to (y_j)_{j\in J}$. To povlači $T_j x_n \to T_j x$, $\forall j \in J$, a i $T_j x_n \to y_j$, $\forall j \in J$. Zato je $y_j = T_j x$, $\forall j \in J$. Prema teoremu o zatvorenom grafu T je ograničen operator; dakle, postoji $C > 0$ tako da vrijedi

$$\|x\| \le 1 \Longrightarrow \|Tx\| \le C,$$

to jest,

$$\|x\| \le 1 \Longrightarrow \|T_j x\| \le C, \forall j \in J;$$

dakle,

$$\|T_j\| \le C, \forall j \in J.$$

Preostaje ukloniti pretpostavku o potpunosti prostora Y. Neka je sada Y samo normiran prostor, Uzmimo originalnu familiju operatora $(T_j)_{j\in J} \subseteq \mathbb{B}(X,Y)$, pogledajmo upotpunjenje $\tilde{Y}$ prostora Y i za svaki $j \in J$ uvedimo operator $\tilde{T}_j : X \to \tilde{Y}$ definiran s $\tilde{T}_j x = Tx$ (pri čemu interpretiramo da je $Y \subset \tilde{Y}$). Očito i familija $(\tilde{T}_j)_{j\in J}$ zadovoljava istu pretpostavku kao i familija $(T_j)_{j\in J}$. Prema već provedenom dijelu dokaza imamo $\|\tilde{T}_j\| \le C$, $\forall j \in J$. Preostaje primijetiti da je $\|\tilde{T}_j\| = \|T_j\|$, za sve $j \in J$.

7 Banachove algebre

7.1 Spektar i spektralni radijus

Definicija 7.1.1 *Algebra (preciznije, asocijativna algebra) je vektorski prostor* $\mathbb{A}$ *nad poljem* $\mathbb{F}$ *snabdjeven operacijom množenja* $\cdot : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *koje ima sljedeća svojstva:*

1. $a(bc) = (ab)c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{A}$;

2. $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$, $\forall a, b \in \mathbb{A}, \forall \lambda \in \mathbb{F}$;

3. $a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc$, $\forall a, b, c \in \mathbb{A}$.

Algebra je komutativna ako još vrijedi i $ab = ba$, $\forall a, b \in \mathbb{A}$.
Kaže se da je $\mathbb{A}$ *algebra s jedinicom ako postoji* $e \in \mathbb{A}$ *sa svojstvom* $ae = ea = a$, $\forall a \in \mathbb{A}$.
Neprazan podskup $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ *se naziva podalgebra od* $\mathbb{A}$ *ako je i* $\mathbb{B}$ *algebra s operacijama naslijeđenima iz* $\mathbb{A}$.

Tipični primjeri algebri su M_n, $L(V)$, za vektorski prostor V, te $\mathbb{B}(X)$, za normiran prostor X. Sve ove algebre imaju jedinicu. Općenito, jedinica u algebri - ako uopće postoji - je jedinstvena.

Podalgebra algebre s jedinicom ne mora sadržavati jedinicu iz ambijentne algebre. Međutim, podalgebra može sadržavati svoju vlastitu jedinicu. Kao primjer takve situacije možemo uočiti $\mathbb{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{F} \right\} \subseteq M_3$.

Definicija 7.1.2 *Kaže se da je algebra* $\mathbb{A}$ *normirana algebra ako je* $\mathbb{A}$ *normiran vektorski prostor, te ako norma na* $\mathbb{A}$ *još zadovoljava*

1. $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, $\forall a, b \in \mathbb{A}$;

2. $\|e\| = 1$ *ukoliko je* e *jedinica u* $\mathbb{A}$.

Kaže se da je normirana algebra $\mathbb{A}$ *Banachova algebra ako je* $\mathbb{A}$ *Banachov prostor.*

Uočimo da gornja definicija svojstvom (2) implicira da je svaka normirana algebra s jedinicom netrivijalna. Ni u kojem drugom smislu uvjet (2) nije restriktivan. Naime, ako $\mathbb{A}$ ima jedinicu, čim $\mathbb{A} \neq \{0\}$, nužno je $e \neq 0$. Tada, ako je $\| \cdot \|$ neka submultiplikativna norma na $\mathbb{A}$, imamo $\|e\| \neq 0$ i onda tu originalnu normu na $\mathbb{A}$ možemo reskalirati tako da u novodobivenoj normi (očito ekvivalentnoj polaznoj) vrijedi i $\|e\| = 1$.

Primjer komutativne Banachove algebre je algebra neprekidnih kompleksnih funkcija $(C(K), \| \cdot \|_\infty)$ definiranih na kompaktnom prostoru K. Ako je X normiran prostor, uobičajeno je algebru $\mathbb{B}(X)$ promatrati s operatorskom normom. Posebno, ako je X Banachov, onda je $\mathbb{B}(X)$ primjer nekomutativne Banachove algebre s jedinicom. Primijetimo usput: ako je H Hilbertov prostor, norma na $\mathbb{B}(H)$ zadovoljava i tzv. C^*-jednakost $\|A^*A\| = \|A\|^2$, $\forall A \in \mathbb{B}(H)$ (usp. zadatak 7.1.18).

Propozicija 7.1.3 *Množenje na normiranoj algebri je neprekidno preslikavanje.*

Dokaz: Pokazat ćemo da je množenje i uniformno neprekidno na ograničenim skupovima.

Promotrimo $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ s normom $\|(a, b)\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$. Neka je $\max\{\|a\|, \|b\|\} \leq M$ i $\epsilon > 0$. Odaberimo $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2M+1}\}$. Ako su sada $x, y \in \mathbb{A}$ takvi da je $\|x - a\| < \delta$ i $\|y - b\| < \delta$ onda imamo

$$\|xy - ab\| = \|(x - a)(y - b) + ay + xb - ab - ab\| \leq$$

$$\|x - a\| \, \|y - b\| + \|a\| \, \|y - b\| + \|x - a\| \, \|b\| < \delta^2 + 2M\delta < \delta + 2M\delta = (2M + 1)\delta < \epsilon.$$

$\square$

Ako je $\mathbb{A}$ algebra s jedinicom, s $G(\mathbb{A})$ označavamo grupu regularnih elemenata u $\mathbb{A}$. Pritom element a zovemo regularnim ako postoji $b \in \mathbb{A}$ takav da vrijedi $ab = ba = e$. Lako se pokaže da je takav element najviše jedan i on se onda zove inverz od a i označava s a^{-1}.

Sjetimo se da za operator jednostranog pomaka S na Hilbertovom prostoru ℓ^2 vrijedi $S^*S = I$ i $SS^* \neq I$. To pokazuje da za regularnost elementa a općenito nije dovoljno postojanje elementa b takvog da vrijedi samo jedna od jednakosti $ab = e, ba = e$. Ove dvije jednakosti su međusobno ekvivalentne samo u konačnodimenzionalnim algebrama.

Propozicija 7.1.4 *Neka je $\mathbb{A}$ normirana algebra s jedinicom. Tada je preslikavanje $a \mapsto a^{-1}$ neprekidna bijekcija na $G(\mathbb{A})$.*

Dokaz: Najprije primijetimo da u ovoj tvrdnji $G(\mathbb{A})$ shvaćamo kao metrički prostor s metrikom $d(a, b) = \|a - b\|$.

Neka je $a \in G(\mathbb{A})$. Uzmimo $x \in G(\mathbb{A})$ takav da vrijedi $\|x - a\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$. Tada je

$$\|x^{-1}\| - \|a^{-1}\| \leq \|x^{-1} - a^{-1}\| = \|x^{-1}(x - a)a^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \, \|x - a\| \, \|a^{-1}\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|.$$

Dakle, imamo $\|x^{-1}\| < 2\|a^{-1}\|$. Ako se s ovim podatkom vratimo u prethodni račun dobit ćemo $\|x^{-1} - a^{-1}\| < 2\|a^{-1}\|^2\|x - a\|$. $\square$

U svakoj algebri $\mathbb{A}$ su zbog asocijativnosti množenja dobro definirane potencije a^n za $a \in \mathbb{A}$ i $n \in \mathbb{N}$. Dodatno, ako $\mathbb{A}$ ima jedinicu, definira se $a^0 = e$. Potencije a^k s negativnim cjelobrojnim eksponentima k definirane su (očito) samo za regularne a. Posebno, ako je $\mathbb{A}$ algebra s jedinicom, $p(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ polinom i $a \in \mathbb{A}$, dobro je definiran element algebre $p(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k$. Pridruživanje $p \mapsto p(a)$ je homomorfizam algebre polinoma i $\mathbb{A}$. Pritom možemo uočiti da se za svaki polinom p element $p(a)$ nalazi u komutativnoj podalgebri od $\mathbb{A}$ generiranoj s a i e.

Tvrdnja iduće propozicije poopćuje formulu za sumu geometrijskog reda u Banachovim algebrama.

Propozicija 7.1.5 *Neka je $\mathbb{A}$ Banachova algebra s jedinicom, te neka je $a \in \mathbb{A}$ takav da je $\|a\| < 1$. Tada je element $e - a$ regularan i vrijedi $(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.*

Dokaz: Zbog $\|a^n\| \leq \|a\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vrijedi $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, a red $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ apsolutno konvergira. Jer je $\mathbb{A}$ potpun prostor, postoji $s = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \in \mathbb{A}$.

Dalje, očito vrijedi $(e-a)(\sum_{k=0}^{n} a^k) = (\sum_{k=0}^{n} a^k)(e-a) = e - a^{n+1}$. Prelaskom na limes kad $n \to \infty$ dobivamo $(e-a)s = s(e-a) = e$. □

Propozicija 7.1.6 *Neka je $\mathbb{A}$ Banachova algebra s jedinicom. Tada je grupa regularnih elemenata $G(\mathbb{A})$ otvoren skup u $\mathbb{A}$.*

Dokaz: Uzmimo $a \in G(\mathbb{A})$ i $x \in K(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|})$. Tada je $\|e - a^{-1}x\| = \|a^{-1}(a-x)\| \leq \|a^{-1}\|\,\|a-x\| < 1$. Prema prethodnoj propoziciji je $e-(e-a^{-1}x) \in G(\mathbb{A})$, tj. $a^{-1}x \in G(\mathbb{A})$. Jer je $G(\mathbb{A})$ grupa, množenjem s a dobivamo $x \in G(\mathbb{A})$. □

Napomena 7.1.7 U dokazu propozicije 7.1.5 nije bilo nužno da vrijedi $\|a\| < 1$; dovoljno bi bilo znati da red $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|$ konvergira. Drugim riječima, treba nam da red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|\lambda^n$ konvergira za $\lambda = 1$. Dakle, dovoljno je da radijus konvergencije toga reda bude veći od 1, tj. da vrijedi $\mathrm{limsup}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$

Definicija 7.1.8 *Neka je $\mathbb{A}$ normirana algebra i $x \in \mathbb{A}$. Spektralni radijus elementa x definira se kao broj $\nu(x) = inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$.*

Teorem 7.1.9 *Neka je $\mathbb{A}$ normirana algebra. Tada vrijedi:*

(a) *Niz* $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_n$ *je konvergentan i* $\nu(x) = lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, $\forall x \in \mathbb{A}$.

(b) $0 \leq \nu(x) \leq \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{A}$.

(c) $\nu(\alpha x) = |\alpha|\nu(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in \mathbb{A}$.

(d) $\nu(xy) = \nu(yx)$, $\forall x, y \in \mathbb{A}$.

(e) $\nu(x^k) = \nu(x)^k$, $\forall x \in \mathbb{A}, \forall k \in \mathbb{N}$.

(f) *Ekvivalentne norme daju iste spektralne radijuse.*

Dokaz: Neka je $x \in \mathbb{A}$ i $\epsilon > 0$. Po definiciji spektralnog radijusa, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\|x^m\|^{\frac{1}{m}} \leq \nu(x) + \epsilon$, odnosno $\|x^m\| \leq (\nu(x)+\epsilon)^m$.

Fiksirajmo taj m i pišimo sve $n \in \mathbb{N}$ u obliku $n = p_n m + q_n$ pri čemu je $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $q_n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Sad iz jednakosti $1 = p_n \frac{m}{n} + q_m \frac{1}{n}$ odmah zaključujemo da je $\lim_n p_n \frac{m}{n} = 1$.

Sad primijetimo da je

$$\|x^n\| = \|x^{p_n m + q_n}\| \leq \|x^m\|^{p_n}\,\|x\|^{q_n} \leq (\nu(x)+\epsilon)^{p_n m}\|x\|^{q_n},$$

odakle odmah slijedi

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\nu(x)+\epsilon)^{p_n \frac{m}{n}}\,\|x\|^{q_n \frac{1}{n}}.$$

Odavde zaključujemo da je

$$\limsup_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_n (\nu(x)+\epsilon)^{p_n \frac{m}{n}} \|x\|^{q_n \frac{1}{n}} = \lim_n (\nu(x)+\epsilon)^{p_n \frac{m}{n}} \|x\|^{q_n \frac{1}{n}} = \nu(x)+\epsilon.$$

Jer je ϵ bio proizvoljan, ovo povlači

$$\limsup_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \nu(x) = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} \leq \liminf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Ovo je dovoljno za dokaz tvrdnje (a). Tvrdnje (b) i (c) su očite.

Dokažimo (d). Za sve x, y iz $\mathbb{A}$ i svaki prirodan broj n imamo $(xy)^{n+1} = x(yx)^n y$ što povlači $\|(xy)^{n+1}\| \leq \|x\| \, \|(yx)^n\| \, \|y\|$, a odavde je

$$\|(xy)^{n+1}\|^{\frac{1}{n+1}} \leq (\|x\| \, \|y\|)^{\frac{1}{n+1}} (\|(yx)^n\|^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n+1}}.$$

Prelaskom na limes kad $n \to \infty$ slijedi $\nu(xy) \leq \nu(yx)$. Po simetriji zaključujemo da vrijedi i obratna nejednakost.

Za dokaz tvrdnje (e) imamo sljedeći niz jednakosti:

$$\nu(x^k) = \lim_{n\to\infty} \|x^{nk}\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\|x^{nk}\|^{\frac{1}{nk}})^k = \nu(x)^k.$$

Konačno, da dokažemo (f) uzmimo da vrijedi $m\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq M\|x\|_a$ za sve $x \in \mathbb{A}$ i neke $m, M > 0$. Tada za svaki prirodan broj n imamo $m\|x^n\|_a \leq \|x^n\|_b \leq M\|x^n\|_a$, a onda i $m^{\frac{1}{n}} \|x^n\|_a^{\frac{1}{n}} \leq \|x^n\|_b^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}} \|x^n\|_a^{\frac{1}{n}}$. Preostaje pustiti $n \to \infty$. □

Korolar 7.1.10 *Neka je $\mathbb{A}$ Banachova algebra s jedinicom te neka za $a \in \mathbb{A}$ vrijedi $\nu(a) < 1$. Tada je $e - a$ regularan i vrijedi $(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi direktno iz napomene 7.1.7 i tvrdnje (a) prethodnog teorema. □

Definicija 7.1.11 *Neka je $\mathbb{A}$ algebra s jedinicom i $a \in \mathbb{A}$. Spektar elementa a se definira kao skup $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{F} : a - \lambda e$ nije regularan $\}$.*

Sljedeći teorem je fundamentalan za teoriju Banachovih algebri. Ujedno, tvrdnja mu opravdava i ime spektralni radijus za broj $\nu(a)$. Primijetimo da se u pretpostavkama teorema ograničavamo na polje $\mathbb{C}$.

Teorem 7.1.12 *Neka je $\mathbb{A}$ kompleksna Banachova algebra s jedinicom i $a \in \mathbb{A}$. Tada je $\sigma(a)$ neprazan i kompaktan skup i pritom vrijedi $\nu(a) = max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Dokaz: Uzmimo $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $|\lambda| > \nu(a)$. Tada je $\nu(\frac{1}{\lambda}a) < 1$ pa je prema korolaru 7.1.10 element $e - \frac{1}{\lambda}a$ regularan. Tada je i $\lambda e - a = \lambda e(e - \frac{1}{\lambda}a)$, kao produkt dva regularna elementa, regularan.

Dakle, $\sigma(a) \subseteq K(0, \nu(a))$. Posebno, $\sigma(a)$ je ograničen skup. Dokažimo da je i zatvoren. Uzmimo $\mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Nađimo najprije $\epsilon > 0$ za koji vrijedi implikacija $\|x - (\mu e - a)\| < \epsilon \Rightarrow x \in G(\mathbb{A})$; takav ϵ postoji jer je $\mu e - a \in G(\mathbb{A})$, a skup $G(\mathbb{A})$ je otvoren. Jasno je da za $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $|\lambda - \mu| < \epsilon$ vrijedi $\|(\lambda e - a) - (\mu e - a)\| < \epsilon$ pa je element $\lambda e - a$ regularan. Drugim riječima, $K(\mu, \epsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$.

Preostaje pokazati da je $\sigma(a) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \nu(a)\} \neq \emptyset$.

Promotrimo prvo slučaj $\nu(a) = 0$. Ovdje trebamo pokazati da je $0 \in \sigma(a)$, tj. da a nije regularan. Pretpostavimo suprotno: $a \in G(\mathbb{A})$. Tada za sve n imamo $e = a^n(a^{-1})^n$ što povlači $1 \leq \|a^n\| \, \|(a^{-1})^n\|$, pa onda i $1 \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \, \|(a^{-1})^n\|^{\frac{1}{n}}$. Odavde je $1 \leq \nu(a)\nu(a^{-1})$, a to je u kontradikciji s $\nu(a) = 0$.

Uzmimo sada da je $\nu(a) > 0$ i označimo $\nu(a) = \nu$. Pretpostavimo ponovo da je $\sigma(a) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \nu\} = \emptyset$. Tada otvoren skup $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ sadrži zatvoren kružni vijenac $K = \{\lambda \in \mathbb{C} : \nu \leq \lambda \leq \nu + 1\}$. Na K možemo promatrati funkciju $f : K \to G(\mathbb{A})$ definiranu s $f(\lambda) = (e - \frac{1}{\lambda}a)^{-1}$. Kako je f neprekidna a K kompaktan, f je i uniformno neprekidna na K. Dakle:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \ \text{ tako da } \ \lambda_1, \lambda_2 \in K, |\lambda_1 - \lambda_2| < \delta \Rightarrow \|f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\| < \epsilon. \tag{1}$$

Uočimo sada, za $n \in \mathbb{N}$, sve n-te korijene iz 1: $w_1 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}}, w_2 = w_1^2, \ldots, w_n = w_1^n = 1$. Za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$ imamo

$$1 - \lambda^n = 1 - \frac{1}{w_j^n}\lambda^n = (1 - \frac{1}{w_j}\lambda)(1 + \frac{1}{w_j}\lambda + \frac{1}{w_j^2}\lambda^2 + \ldots + \frac{1}{w_j^{n-1}}\lambda^{n-1}).$$

Ako sada u ovoj jednakosti zamijenimo λ s $\frac{1}{\lambda}a$ dobivamo

$$e - \frac{1}{\lambda^n}a^n = (e - \frac{1}{w_j}\frac{1}{\lambda}a)(e + \frac{1}{w_j}\lambda^{-1}a + \frac{1}{w_j^2}\lambda^{-2}a^2 + \ldots + \frac{1}{w_j^{n-1}}\lambda^{-(n-1)}a^{n-1}).$$

Uzmimo sada $\lambda \in K$ i uočimo da je tada i $w_j\lambda \in K$. Zato je element $e - \frac{1}{w_j}\frac{1}{\lambda}a$ regularan i $(e - \frac{1}{w_j}\frac{1}{\lambda}a)^{-1} = f(w_j\lambda)$. Osim toga, izrazi u zagradama na desnoj strani prethodne jednakosti očito komutiraju. Zato tu jednakost možemo pisati u obliku

$$e + \frac{1}{w_j}\lambda^{-1}a + \frac{1}{w_j^2}\lambda^{-2}a^2 + \ldots + \frac{1}{w_j^{n-1}}\lambda^{-(n-1)}a^{n-1} = (e - \frac{1}{\lambda^n}a^n)f(w_j\lambda) = f(w_j\lambda)(e - \frac{1}{\lambda^n}a^n).$$

Sad uočimo da za $1 \leq j \leq n - 1$ vrijedi $\frac{1}{w_j} = w_{n-j}$, da je $\frac{1}{w_n} = w_n = 1$, te da vrijedi $\sum_{j=1}^n w_j^k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Zato, ako zbrojimo svih n prethodnih jednakosti (koje su dobivene za $j = 1, 2, \ldots, n$), dobivamo

$$ne = (e - \frac{1}{\lambda^n}a^n)\sum_{j=1}^n f(w_j\lambda) = (\sum_{j=1}^n f(w_j\lambda))(e - \frac{1}{\lambda^n}a^n).$$

To pokazuje da je element $e - \frac{1}{\lambda^n}a^n$ regularan, te da vrijedi

$$(e - \frac{1}{\lambda^n}a^n)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(w_j\lambda), \ \forall \lambda \in K. \tag{2}$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Odaberimo $0 < \delta < 1$ takav da vrijedi (1). Za $0 < t < \delta$ imamo $(\nu+t)w_j, \nu w_j \in K$ i $|(\nu+t)w_j - \nu w_j| = t|w_j| = t < \delta$ pa slijedi $\|f((\nu+t)w_j) - f(\nu w_j)\| < \epsilon$ za sve $j = 1, 2, \ldots, n$. Zato je, prema (2),

$$\|(e - \frac{1}{(\nu+t)^n}a^n)^{-1} - (e - \frac{1}{\nu^n}a^n)^{-1}\| = \frac{1}{n}\|\sum_{j=1}^{n}(f(w_j(\nu+t)) - f(w_j\nu))\| \leq$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|f(w_j(\nu+t)) - f(w_j\nu)\| \leq \frac{1}{n}n\epsilon = \epsilon.$$

Uočimo da izbor broja δ nije ovisio o n i prethodnom računu s n-tim korijenima iz 1. Zato možemo zaključiti:

$$0 < t < \delta \Rightarrow \|(e - \frac{1}{(\nu+t)^n}a^n)^{-1} - (e - \frac{1}{\nu^n}a^n)^{-1}\| \leq \epsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Odavde je

$$\|e - (e - \frac{1}{\nu^n}a^n)^{-1}\| = \|e - (e - \frac{1}{(\nu+t)^n}a^n)^{-1} + (e - \frac{1}{(\nu+t)^n}a^n)^{-1} - (e - \frac{1}{\nu^n}a^n)^{-1}\| \leq$$

$$\|e - (e - \frac{1}{(\nu+t)^n}a^n)^{-1}\| + \|(e - \frac{1}{(\nu+t)^n}a^n)^{-1} - (e - \frac{1}{\nu^n}a^n)^{-1}\|$$

iz čega prema (3) slijedi

$$\|e - (e - \frac{1}{\nu^n}a^n)^{-1}\| \leq \|e - (e - \frac{1}{(\nu+t)^n}a^n)^{-1}\| + \epsilon. \tag{4}$$

Sad još primijetimo da je $\nu + t > \nu$ što povlači $\lim_n \frac{1}{\nu+t}\|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \frac{\nu}{\nu+t} < 1$. Zato je

$$\lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{\nu+t}a^n\| = \lim_{n\to\infty}(\frac{\nu}{\nu+t})^n = 0, \ \text{tj.} \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\nu+t}a^n = 0.$$

Zbog neprekidnosti invertiranja onda je i $\lim_n(e - (e - \frac{1}{\nu+t}a^n)^{-1}) = e - e = 0$. Odavde i iz (4) dobivamo $\limsup_n\|e - (e - \frac{1}{\nu^n}a^n)^{-1}\| \leq \epsilon$, za svaki $\epsilon > 0$. To implicira $\lim_{n\to\infty}(e - \frac{1}{\nu^n}a^n)^{-1} = e$. Zato je $\lim_{n\to\infty}(e - \frac{1}{\nu^n}a^n) = e$ i konačno $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\nu^n}a^n = 0$. No, ova posljednja relacija je nemoguća jer znamo da vrijedi $\nu^n = \nu(a)^n = \nu(a^n) \leq \|a^n\|$, te zbog toga i $\|\frac{1}{\nu^n}a^n\| = \frac{1}{\nu^n}\|a^n\| \geq 1$. □

Definicija 7.1.13 *Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ algebre nad istim poljem. Linearan operator $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ se naziva homomorfizam algebri ako još vrijedi i $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{A}$. Kažemo da je homomorfizam algebri φ izomorfizam ako je φ i bijekcija. Ako postoji izomorfizam između algebri $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ kažemo da su one izomorfne i pišemo $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$.*

Korolar 7.1.14 *(Geljfand-Mazur) Neka je $\mathbb{A}$ kompleksna Banachova algebra s jedinicom u kojoj je svaki ne-nul element regularan. Tada je $\mathbb{A} \simeq \mathbb{C}$.*

Dokaz: Uzmimo $a \in \mathbb{A}$. Jer je $\sigma(a) \neq \emptyset$, postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $a - \lambda e \notin G(\mathbb{A})$. Kako je $\mathbb{A} \setminus G(\mathbb{A}) = \{0\}$, slijedi $a - \lambda e = 0$. Zato je $a = \lambda e$. Formalno, možemo za taj λ pisati $\lambda = \lambda_a$ i definirati $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ formulom $\varphi(a) = \lambda_a$. □

Slijede dva teorema o preslikavanju spektra.

Teorem 7.1.15 *Neka je $\mathbb{A}$ kompleksna Banachova algebra s jedinicom, te neka je $a \in \mathbb{A}$ i p polinom s kompleksnim koeficijentima. Tada je $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Dokaz: Prvo pokažimo da za $\alpha \neq 0$ vrijedi $\sigma(\alpha a) = \alpha\sigma(a)$. To će nam omogućiti da se u daljnjem tijeku dokaza ograničimo na polinome s vodećim koeficijentom jednakim 1.

Zaista: $\lambda \in \sigma(\alpha a) \iff \alpha a - \lambda e$ nije regularan $\iff a - \frac{\lambda}{\alpha}e$ nije regularan $\iff \frac{\lambda}{\alpha} \in \sigma(a) \iff \lambda \in \alpha\sigma(a)$.

Uzmimo sada proizvoljan normiran polinom p s kompleksnim koeficijentima, st. $p = n$. Za proizvoljan $\lambda \in \mathbb{C}$ postoje kompleksni brojevi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ za koje vrijedi

$$p(t) - \lambda = (t - \beta_1)(t - \beta_2) \cdot \ldots \cdot (t - \beta_n) \tag{5}$$

Zato je $p(a) - \lambda e = (a - \beta_1 e)(a - \beta_2 e) \cdot \ldots \cdot (a - \beta_n e)$.

Ako je $\lambda \in \sigma(p(a))$ onda element s lijeve strane ove jednakosti nije regularan pa mora postojati bar jedan od faktora s desne strane koji nije regularan: dakle, postoji indeks j takav da $a - \beta_j e$ nije regularan, tj. $\beta_j \in \sigma(a)$. Jednakost (5) sad pokazuje da je $p(\beta_j) - \lambda = 0$, odnosno $p(\beta_j) = \lambda$. Time smo pokazali da vrijedi $\sigma(p(a)) \subseteq p(\sigma(a))$.

Sada uzmimo $\lambda \in p(\sigma(a))$. To znači da postoji $\gamma_j \in \sigma(a)$ takav da vrijedi $\lambda = p(\gamma_j)$. Zato se γ_j nalazi među brojevima $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ koji zadovoljavaju jednakost $p(t) - \lambda = (t-\gamma_1)(t-\gamma_2)\cdot\ldots\cdot(t-\gamma_n)$. Odavde dobivamo i $p(a)-\lambda a = (a-\gamma_1 e)(a-\gamma_2 e)\cdot\ldots\cdot(a-\gamma_n e)$. Ako bi sad $p(a) - \lambda a$ bio regularan, imali bismo

$$e = (p(a) - \lambda a)^{-1}(a - \gamma_1 e) \cdot \ldots \cdot (a - \gamma_{j-1} e)(a - \gamma_{j+1} e) \cdot \ldots \cdot (a - \gamma_n e)(a - \gamma_j e)$$

što bi značilo da element $a-\gamma_j e$ ima lijevi inverz. Sasvim analogno slijedilo bi da $a-\gamma_j e$ ima i desni inverz. Prema zadatku 7.1.19, taj bi element onda bio regularan, što je nemoguće. □

Propozicija 7.1.16 *Neka je $\mathbb{A}$ Banachova algebra s jedinicom i $a \in \mathbb{A}$ regularan element. Tada je $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1} = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Dokaz: Kako je a regularan, regularan je i λa za svaki skalar $\lambda \neq 0$. Uzmimo $\lambda \in \sigma(a)$; uočimo da je $\lambda \neq 0$ te da vrijedi $a - \lambda a = \lambda a(\frac{1}{\lambda} - a^{-1})$. Odavde je jasno da ni $\frac{1}{\lambda} - a^{-1}$ nije regularan. Time smo pokazali da je $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(a^{-1})$, tj. $\sigma(a)^{-1} \subseteq \sigma(a^{-1})$. Obratnu inkluziju dobivamo iz ove dokazane kad je primijenimo na element a^{-1}. □

Domaća zadaća 21

Zadatak 7.1.17 Neka je $\mathbb{A}$ normirana algebra, te neka je $\mathbb{A}_c$ upotpunjenje normiranog prostora $\mathbb{A}$. Pokažite da je tada $\mathbb{A}_c$ Banachova algebra.

Zadatak 7.1.18 Dokažite da za svaki ograničen operator A na Hilbertovom prostoru vrijedi $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

Zadatak 7.1.19 Pokažite: ako u algebri s jedinicom za element a postoje b i c takvi da vrijedi $ba = e$ i $ac = e$, onda je $b = c$ (pa je, dakle, a regularan i $a^{-1} = b = c$).

7.2 Spektar ograničenog operatora

U ovom odjeljku naša razmatranja ograničavamo na Banachovu algebru s jedinicom $\mathbb{B}(X)$ gdje je X kompleksan Banachov prostor. Iz Teorema o inverznom preslikavanju je očito da su regularni elementi u ovoj algebri bijektivni ograničeni operatori na X. Zato za svaki $A \in \mathbb{B}(X)$ imamo $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ nije bijekcija}\}$. Kako je $\mathbb{B}(X)$ kompleksna Banachova algebra s jedinicom, spektar svakog ograničenog operatora na X je neprazan skup.

Definicija 7.2.1 *Neka je X kompleksan Banachov prostor i $A \in \mathbb{B}(X)$.*
Točkovni spektar operatora A je skup

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Rezidualni spektar operatora A je skup

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Ker(A - \lambda I) = \{0\}, \overline{Im(A - \lambda I)} \neq X\}.$$

Kontinuirani spektar operatora A je skup

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Ker(A - \lambda I) = \{0\}, \overline{Im(A - \lambda I)} = X, Im(A - \lambda I) \neq X\}.$$

Napomena 7.2.2 (a) Očito su skupovi uvedeni u prethodnoj definiciji disjunktni. Jasno je da za svaki $A \in \mathbb{B}(X)$ vrijedi $\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \sigma(A)$. S druge strane, ako $\lambda \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A)$ onda je $A - \lambda I$ bijekcija pa je $A - \lambda I$ regularan operator, tj. $\lambda \notin \sigma(A)$. Zato je $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A)$.

(b) $\sigma_p(A)$ je skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A.

(c) Promotrimo pobliže kontinuirani spektar operatora A. Ako je $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$ i $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = X$ onda je zahtjev $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = X$ ekvivalentan zahtjevu da $A - \lambda I$ bude odozdo ograničen. Zaista, ako je $A - \lambda I$ odozdo ograničen, onda mu je slika zatvorena. Obratno ako uz uvjete $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$ i $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = X$ znamo da vrijedi i $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = X$, onda je $A - \lambda I$ prema Teoremu o inverznom preslikavanju regularan operator; dakle, njegov inverz je ograničen, a to onda povlači da je $A - \lambda I$ ograničen odozdo. Zato možemo pisati

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}, \overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = X, A - \lambda I \text{ nije odozdo ograničen}\}.$$

Primjer 7.2.3 Neka je S operator jednostranog pomaka na H s obzirom na ONB $(e_n)_n$ Hilbertovog prostora H. Tada je $\sigma_p(S) = \emptyset$, $\sigma_r(S) = K(0,1)$, $\sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ i $\sigma(S) = \overline{K}(0,1)$.

Znamo da je S definiran formulom $S(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1}$, te da vrijedi $Se_n = e_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i $S^* e_1 = 0$, $S^* e_{n+1} = e_n$, $\forall n \geq 1$.

Prije svega, S je injekcija jer je izometrija. Pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$ svojstvena vrijednost od S. Tada postoji vektor $x \in H, x \neq 0$, takav da je $Sx = \lambda x$. Zbog $x = \frac{1}{\lambda} Sx$ i zato što je vektor e_1 okomit na sliku operatora S, tada je $\langle x, e_1 \rangle = 0$. Pretpostavimo sada da vrijedi i $\langle x, e_n \rangle = 0$ za neki n. Tada je $\langle x, e_{n+1} \rangle = \langle \frac{1}{\lambda} Sx, e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle x, S^* e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle x, e_n \rangle = 0$. Dakle, $x = 0$, što je nemoguće. Time smo pokazali da je $\sigma_p(S) = \emptyset$.

Već znamo da $\operatorname{Im} S$ nije gust u H jer mu je ortogonalni komplement razapet vektorom e_1. Pokažimo sada da za $0 < |\lambda| < 1$ potprostor $\operatorname{Im}(S - \lambda I)$ nije gust u H. Jer je $(\overline{\lambda}^n)$ ℓ^2-niz, dobro je definiran vektor $x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}^n e_n \in H$. Zbog $\lambda \neq 0$ vektor x je netrivijalan. Sad za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ imamo $\langle (S - \lambda I) e_n, x_\lambda \rangle = \langle e_{n+1} - \lambda e_n, x_\lambda \rangle = \lambda^{n+1} - \lambda \lambda^n = 0$. Kako vektori $(S - \lambda I) e_n$, $n \in \mathbb{N}$, generiraju sliku operatora $S - \lambda I$, dokazali smo da je $x_\lambda \perp \operatorname{Im}(S - \lambda I)$. Dakle, $K(0,1) \subseteq \sigma_r(S) \subseteq \sigma(S)$.

Sada je jasno da je $\overline{K}(0,1) \subseteq \sigma(S)$ jer spektar je zatvoren skup. S druge strane, jer je S izometrija, i svaka potencija S^n je izometrija. Zato je $\|S^n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa očito vrijedi $\nu(S) = 1$. Zbog toga je $\sigma(S) \subseteq \overline{K}(0,1)$. Dakle, $\sigma(S) = \overline{K}(0,1)$.

Na kraju, dokazat ćemo da za sve λ, $|\lambda| = 1$, vrijedi $\overline{\operatorname{Im}(S - \lambda I)} = H$. Uzmimo proizvoljan λ modula 1 i pretpostavimo da je $x \perp \operatorname{Im}(S - \lambda I)$. Sada je $0 = \langle (S - \lambda I) e_n, x \rangle = \langle e_{n+1}, x \rangle - \lambda \langle e_n, x \rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zaključujemo da je $|\langle x, e_n \rangle| = |\langle x, e_1 \rangle|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Kako je $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$, to je moguće samo ako je $x = 0$.

Primjer 7.2.4 Neka je $(e_n)_n$ ONB Hilbertovog prostora H, neka je $(\lambda_n)_n$ niz kompleksnih brojeva takav da je $\sup\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\} = M < \infty$. Definirajmo $A(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \lambda_n e_n$. Posebno, vrijedi $Ae_n = \lambda_n e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Kaže se da je A dijagonalan operator s dijagonalom $(\lambda_n)_n$.

Tvrdimo da je $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$, $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Prije svega, treba uočiti da je A dobro definiran ograničen operator na H, te da je $\|A\| = M$.

Nadalje, $A^* x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A^* x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Ae_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\lambda_n} e_n$. Ovo pokazuje da je A^* iste građe, a onda jednakosti $AA^* e_n = A^* A e_n = |\lambda_n|^2 e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pokazuju da je $AA^* = A^* A$, tj. da je A normalan operator.

Očito je $\lambda_n \in \sigma_p(A)$. Drugih svojstvenih vrijednosti A nema. Naime, ako je $\lambda \neq \lambda_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onda iz $(A - \lambda I)x = 0$ slijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle (\lambda_n - \lambda) e_n = 0$ pa zbog $\lambda_n - \lambda \neq 0$ slijedi $\langle x, e_n \rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, što povlači $x = 0$.

Sada je odmah jasno da je $\overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \sigma(A)$.

Uzmimo $\lambda \notin \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Jer je udaljenost dva disjunktna kompaktna skupa u kompleksnoj ravnini strogo pozitivna, postoji $m > 0$ za koji vrijedi $|\lambda - \lambda_n| \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zato je $\frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} \leq \frac{1}{m}$, te je dobro definiran i ograničen operator B zadan s $B(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \frac{1}{\lambda_n - \lambda} e_n$. Očito, $(A - \lambda I)B = B(A - \lambda I) = I$ što znači da je $A - \lambda I$ regularan. Time smo pokazali da je $\overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}} = \sigma(A)$.

Na kraju, uzmimo $\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \lambda_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $(A - \lambda I) e_n = (\lambda_n - \lambda) e_n$ što pokazuje da je $e_n \in \operatorname{Im}(A - \lambda I)$. Dakle, $\operatorname{Im}(A - \lambda I)$ je gust u H i zato svaki takav λ pripada kontinuiranom spektru od A.

Propozicija 7.2.5 *Za svaki neprazan kompaktan skup $K \subseteq \mathbb{C}$ postoji Hilbertov prostor H i operator $A \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $\sigma(A) = K$.*

Dokaz: Uzme se gust niz $(\lambda_n)_n$ u K i operator A iz prethodnog primjera. $\square$

Primjer 7.2.6 Neka je $(e_n)_n$ ONB Hilbertovog prostora H. Definirajmo operator A na H s $A(\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\langle x, e_n\rangle e_{n+1}$. Jer je $(\frac{1}{n+1}\langle x, e_n\rangle)_n$ ℓ^2-niz, A je dobro definiran ograničen linearan operator.

Za sve $k, n \in \mathbb{N}$ imamo $A^k e_n = \frac{1}{(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)} e_{n+k}$ odakle je $\|A^k e_n\| = \frac{1}{(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)}$, pa je $\|A^k\| \leq \frac{1}{k!}$. Odavde je $\nu(A) = \lim_k \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \lim_k \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0$.

To znači da je $\sigma(A) = \{0\}$. Očito je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ i $e_1 \perp \operatorname{Im} A$. Zato je $0 \in \sigma_r(A)$.

Razmatranja u ovoj točki završavamo s nekoliko jednostavnih rezultata o spektru operatora na kompleksnim Hilbertovim prostorima.

Propozicija 7.2.7 *Neka je H kompleksan Hilbertov prostor i $A \in \mathbb{B}(H)$. Tada je $\sigma(A^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$.*

Dokaz: Ako je $\lambda \notin \sigma(A)$ onda postoji $B \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $(A - \lambda I)B = B(A - \lambda I) = I$. Adjungiranjem dobivamo $B^*(A^* - \overline{\lambda} I) = (A^* - \overline{\lambda} I)B^* = I$. Time smo pokazali $\lambda \notin \sigma(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \notin \sigma(A^*)$. Obratna implikacija slijedi primjenom iste tvrdnje na operator A^*. $\square$

Propozicija 7.2.8 *Neka je U unitaran operator na kompleksnom Hilbertovom prostoru H. Tada je $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*

Dokaz: Kako su U i U^* unitarni operatori imamo $\|U\| = \|U^*\| = 1$ i zato je $\sigma(U), \sigma(U^*) \subseteq \overline{K}(0, 1)$.

Jer je U regularan, jasno je da $0 \notin \sigma(U)$. Ako je $0 < |\lambda| < 1$ onda je $\frac{1}{|\lambda|} > 1$ pa $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(U^*)$. Sada jednakost $U - \lambda I = \lambda U(\frac{1}{\lambda} I - U^*)$ pokazuje da je $U - \lambda I$ regularan, tj. $\lambda \notin \sigma(U)$. $\square$

Za teorem o spektru normalnog operatora trebamo sljedeću vrlo korisnu lemu.

Lema 7.2.9 *Neka je H kompleksan Hilbertov prostor. Operator $A \in \mathbb{B}(H)$ je normalan ako i samo ako vrijedi $\|Ax\| = \|A^*x\|, \forall x \in H$.*

Dokaz: Jedan smjer je očit. Pretpostavimo da vrijedi $\|Ax\| = \|A^*x\|, \forall x \in H$. Uočimo da je operator $B = AA^* - A^*A$ hermitski, te da vrijedi $\langle Bx, x\rangle = 0, \forall x \in H$. Prema propoziciji 2.2.14, $B = 0$.

Propozicija 7.2.10 *Neka je A normalan operator na kompleksnom Hilbertovom prostoru H. Ako je $\lambda \in \sigma_p(A)$, onda je $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ i pripadajući svojstveni potprostori se podudaraju. Svojstveni potprostori koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima operatora A su međusobno okomiti. Još vrijedi $\sigma_r(A) = \emptyset$ i $\nu(A) = \|A\|$.*

Dokaz: Uočimo prvo da je za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ i operator $A-\lambda I$ normalan, pa je $\|(A-\lambda I)x\| = \|(A^* - \overline{\lambda} I)x\|$, $\forall x \in H$. To odmah povlači prvu tvrdnju.

Uzmimo sada $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, i odaberimo proizvoljne svojstvene vektore $x, y \in H$ za λ i μ, respektivno. Tada je $\lambda\langle x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$. Zato je $\langle x, y\rangle = 0$.

Neka je sada $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $A-\lambda I$ injekcija. Mi trebamo pokazati da je $\mathrm{Im}(A-\lambda I)$ gust potprostor od H. Međutim, prema primjedbi s početka dokaza i operator $A^* - \overline{\lambda} I$ je injekcija. Zato je $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = (\mathrm{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I))^{\perp} = \{0\}$.

Konačno, uočimo da je prema prethodnoj propoziciji $\|A^2 x\| = \|A(Ax)\| = \|A^*(Ax)\|$, za sve $x \in H$. Zato je $\|A^2\| = \|A^*A\|$. Prema tvrdnji zadatka 7.1.18 zato je $\|A^2\| = \|A\|^2$. Indukcijom slijedi (jer i svaka potencija od A je normalan operator) $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sada je $\nu(A) = \lim_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_k \|A^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|A\|$. □

Propozicija 7.2.11 *Neka je A hermitski operator na kompleksnom Hilbertovom prostoru H. Tada je $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Nadalje, ako označimo $m = inf\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$ i $M = sup\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$, onda je $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ i $m, M \in \sigma(A)$. (Brojevi m i M se nazivaju granice operatora A.)*

Dokaz: Ako je $\lambda \in \sigma_p(A)$ i ako za vektor x vrijedi $\|x\| = 1$ i $Ax = \lambda x$, onda je $\lambda = \lambda\langle x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle = \overline{\lambda}$. Dakle, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Uzmimo sad $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Prema prvom dijelu dokaza znamo da $\lambda \notin \sigma_p(A)$, a iz prethodne propozicije slijedi i $\lambda \notin \sigma_r(A)$. Osim toga je $\langle Ax - \lambda x, x\rangle - \langle x, Ax - \lambda x\rangle = (\overline{\lambda} - \lambda)\|x\|^2$. Odavde je $|\overline{\lambda} - \lambda|\|x\|^2 \leq 2\|x\|\,\|Ax - \lambda x\|$ što pokazuje da je $A - \lambda I$ odozdo ograničen operator. Zato λ nije niti u $\sigma_c(A)$.

Uzmimo sad $\epsilon > 0$ i $\lambda = M + \epsilon$. Za $x \in H$ imamo

$$\langle (A - \lambda I)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \leq (M - \lambda)\|x\|^2 = -\epsilon\|x\|^2.$$

Zato je

$$\epsilon\|x\|^2 \leq -\langle (A - \lambda I)x, x\rangle \leq |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle| \leq \|x\|\,\|(A - \lambda I)x\|.$$

Dakle, $A - \lambda I$ je odozdo ograničen i zato prema prethodnom dijelu dokaza $\lambda \notin \sigma(A)$.

Uzmimo opet $\epsilon > 0$ i stavimo $\lambda = m - \epsilon$. Za $x \in H$ tada je $\langle (A - \lambda I)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \geq (m - \lambda)\|x\|^2 = \epsilon\|x\|^2$ što povlači $\epsilon\|x\|^2 \leq \|(A - \lambda I)x\|\,\|x\|$. Dakle, $A - \lambda I$ je odozdo ograničen i zato $\lambda \notin \sigma(A)$.

Preostaje pokazati da brojevi M i m leže u $\sigma(A)$. Pretpostavit ćemo da je $m \geq 0$. To nije smanjenje općenitosti jer ako nije tako možemo A zamijeniti operatorom $A' = A - mI$ i tvrdnju nastaviti dokazivati za operator A'. Imamo, dakle, $M = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\} =$ (prema Propoziciji 2.2.14) $= \|A\|$. Neka je $M = \lim_n \langle Ax_n, x_n\rangle$ za niz $(x_n)_n$ takav da je $\|x_n\| = 1$, $\forall n$. Tada je

$$\|Ax_n - Mx_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 + M^2 - 2M\langle Ax_n, x_n\rangle \leq 2M^2 - 2M\langle Ax_n, x_n\rangle.$$

Dakle, vrijedi $\lim_n \|Ax_n - Mx_n\| = 0$, što znači da $A - MI$ nije odozdo ograničen operator. Zato ne može biti regularan, pa je $M \in \sigma(A)$.

Promotrimo sad operator $-A$. Njegove granice su $-M$ i $-m$, pa prema upravo dokazanome imamo $-m \in \sigma(-A) = -\sigma(A)$. Zato je $m \in \sigma(A)$. $\square$

Napomena 7.2.12 Vidjeli smo da je rezidualni spektar normalnog operatora prazan skup. To odmah povlači: ako je A normalan onda je $\lambda \in \sigma(A)$ ako i samo ako operator $A - \lambda I$ nije odozdo ograničen. Uočite da smo tu činjenicu nekoliko puta koristili u prethodnom dokazu.

Općenito se za operator A na kompleksnom Hilbertovom prostoru H definira *aproksimativan točkovni spektar* kao skup

$$\Pi(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ nije odozdo ograničen}\}.$$

U ovakvom pristupu definira se i tzv. *kompresijski spektar* od A kao skup

$$\Gamma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} \neq H\}.$$

Jasno, $\sigma(A) = \Pi(A) \cup \Gamma(A)$; međutim, važno je uočiti da ova unija više nije disjunktna.

Zadatak 7.2.13 Neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ONB Hilbertovog prostora $\ell^2(\mathbb{Z})$, te neka je na $\ell^2(\mathbb{Z})$ definiran operator U formulom $U(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle x, e_n\rangle e_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle x, e_n\rangle e_{n+1}$. Pokazuje se da je U unitaran operator (tzv. operator dvostranog pomaka) i da za U^* vrijedi analogna formula: $U^*(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle x, e_n\rangle e_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle x, e_n\rangle e_{n-1}$.

Pokažite da je $\sigma(U) = \sigma_c(U) = \overline{K}(0, 1)$.

Zadatak 7.2.14 Neka je A ograničen operator na kompleksnom Hilbertovom prostoru. Dokažite da je skup $\Pi(A)$ zatvoren. (Uputa: pokažite da je $\mathbb{C} \setminus \Pi(A)$ otvoren.)

Zadatak 7.2.15 Neka je A ograničen operator na kompleksnom Hilbertovom prostoru. Pokažite da je rub skupa $\sigma(A)$ sadržan u $\Pi(A)$. (Uputa. Lako je pokazati da se tvrdnja svodi na sljedeću: ako A nije regularan operator i ako za niz regularnih operatora (A_n) vrijedi $A = \lim_n A_n$, onda je $0 \in \Pi(A)$.)

Napomena. Pojam aproksimativnog točkovnog spektra jednako se definira i za operatore na Banachovim prostorima. Pokazuje se da tvrdnja ovog zadatka vrijedi i za operatore na Banachovim prostorima; vidite [SK], §4, propozicija 12 i propozicija 21.

8 Kompaktni operatori

8.1 Kompaktni operatori na normiranim prostorima

Kompaktni operatori (ponekad se kaže i potpuno ograničeni operatori) čine važnu klasu ograničenih operatora.

Prije formalne defincije, prisjetimo se da se skup S u topološkom prostoru X naziva relativno kompaktnim ako je zatvarač $\overline{S}$ kompaktan. U svakom normiranom prostoru X za $S \subseteq X$ je ekvivalentno:

(a) S je relativno kompaktan.

(b) Svaki niz elemenata iz S ima podniz koji konvergira u X.

Ako je X potpun, s prethodim svojstvima je ekvivalentan i svaki od sljedeća dva uvjeta:

(c) Svaki niz elemenata iz S ima Cauchyjev podniz.

(d) Za svaki $\epsilon > 0$ postoje $x_1, x_2, \ldots, x_m \in S$, $m \in \mathbb{N}$, takvi da je $S \subseteq \cup_{i=1}^{m} K(x_i, \epsilon)$ (kažemo da za svaki $\epsilon > 0$ skup S ima konačnu ϵ-mrežu).

Već smo u propoziciji 1.1.26 vidjeli da je u normiranom prostoru svaki kompaktan skup ograničen i zatvoren; posebno, svaki relativno kompaktan skup je ograničen. Obrat, naravno, ne vrijedi, kako znamo već iz teorema 1.2.13.

Definicija 8.1.1 *Neka su X i Y normirani prostori, te neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Kažemo da je A kompaktan operator ako je skup $A(\overline{K}(0, 1))$ relativno kompaktan skup. Skup svih kompaktnih operatora s X u Y označavamo s $\mathbb{K}(X, Y)$. Ako je $X = Y$, pišemo $\mathbb{K}(X)$.*

Napomena 8.1.2 (a) Jer relativna kompaktnost povlači ograničenost, jasno je da je svaki kompaktan operator ograničen. Zato je $\mathbb{K}(X, Y) \subseteq \mathbb{B}(X, Y)$. Inkluzija je striktna čim prostor X nije konačnodimenzionalan jer očito je da tada $I \notin \mathbb{K}(X)$.

(b) Linearan operator $A : X \to Y$ je kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz $(x_n)_n$ u X niz $(Ax_n)_n$ ima konvergentan podniz.

(c) Neka je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ operator takav da je $\dim(\operatorname{Im} A) < \infty$ - za takav operator se kaže da je konačnog ranga, a skup takvih operatora označavamo s $\mathbb{F}(X, Y)$. Tada je A kompaktan, tj. $\mathbb{F}(X, Y) \subseteq \mathbb{K}(X, Y)$. Uočimo da je tvrdnja trivijalno slijedi iz činjenice da je u konačnodimenzionalnom prostoru skup kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen. Međutim, ovdje je zaista nužno osim konačnosti ranga pretpostaviti i ograničenost operatora - prisjetimo se da čak i linearni funkcionali mogu biti neograničeni.

Napomena 8.1.3 Prema tvrdnji zadatka 8.1.13 komapaktni operatori slabo konvergentne nizove prevode u jako konvergentne nizove. Lako je vidjeti da za operatore na Hilbertovim prostorima vrijedi i obrat: ukoliko su H i K Hilbertovi prostori i ako operator $A \in (H, K)$ ima svojstvo $x_n \overset{w}{\to} x \Rightarrow Ax_n \overset{s}{\to} Ax$ za sve slabo konvergentne nizove u H, onda je A kompaktan. To je zapravo neposredna posljedica teorema 5.3.10.

Kako već znamo, dobro ponašanje prema nizovima nije općenito dovoljno da se zaključi neprekidnost u odgovarajućim topologijama. Zanimljivo je da vrijedi: ako je H Hilbertov prostor i A linearan operator na H koji je $w-s$ neprekidan, onda je A konačnog ranga.

Zaista; zbog $w-s$ neprekidnosti skup $A^{-1}(K(0,1))$ je slabo otvoren, pa sadrži i neku baznu otvorenu okolinu nul-vektora. To znači da postoje $\epsilon > 0$ i vektori $x_1, \ldots, x_k \in H$ takvi da je $A(B_{0,x_1,\ldots,x_k,\epsilon}) \subseteq K(0,1)$. Dakle, vrijedi $|\langle x, x_i \rangle| < \epsilon$, $\forall i = 1, \ldots, k \Rightarrow \|Ax\| < 1$. Neka je $M = \operatorname{span}\{x_1, \ldots x_n\}$. Očito je iz prethodnog da za svaki $x \in M^\perp$ imamo $\|Ax\| < 1$. Međutim, tada i za svaki $x \in M^\perp$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $\|A(nx)\| < 1$, a to povlači $Ax = 0$. Dakle, $\operatorname{Im} A = A(H) = A(M \oplus M^\perp) = A(M)$ što pokazuje da je A konačnog ranga.

Propozicija 8.1.4 *Neka su X i Y normirani prostori. Tada je $\mathbb{K}(X,Y)$ potprostor od $\mathbb{B}(X,Y)$, a $\mathbb{K}(X)$ je čak i obostrani ideal u $\mathbb{B}(X)$.*

Dokaz: Prva tvrdnja slijedi direktno upotrebom karakterizacije iz napomene 8.1.2 (b).

Druga tvrdnja zapravo znači da je produkt (kompozicija) kompaktnog i ograničenog operatora opet kompaktan operator. Međutim, i to izlazi direktno upotrebom istog nizovnog kriterija. $\square$

Propozicija 8.1.5 *Neka su X i Y normirani prostori.*

1. *Ako je $\dim X < \infty$ ili $\dim Y < \infty$, onda je $\mathbb{K}(X,Y) = \mathbb{B}(X,Y)$.*
2. *$I \in \mathbb{K}(X)$ ako i samo ako je $\dim X < \infty$.*
3. *Ako je $\dim X = \infty$, onda je svaki operator $A \in \mathbb{K}(X)$ singularan.*

Dokaz: Ako je $\dim Y < \infty$ onda je svaki ograničen skup relativno kompaktan, a to odmah povlači da je svaki ograničen operator s vrijednostima u Y kompaktan. Ako je $\dim X < \infty$ i $(x_n)_n$ ograničen niz u X, onda on ima konvergentan podniz $(x_{p(n)})_n$, a tada je za svaki operator $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ zbog neprekidnosti i niz $(Ax_{p(n)})_n$ konvergentan.

Druga tvrdnja je direktna posljedica teorema 1.2.13.

Konačno, ako bi $A \in \mathbb{K}(X)$ bio regularan, onda bi zbog druge tvrdnje prethodne propozicije i operator $I = A^{-1}A$ bio kompaktan, a to je moguće samo za $\dim X < \infty$. $\square$

Propozicija 8.1.6 *Neka je X normiran, a Y Banachov prostor. Tada je $\mathbb{K}(X,Y)$ zatvoren u $\mathbb{B}(X,Y)$.*

Dokaz: Neka je $(A_n)_n$ niz u $\mathbb{K}(X,Y)$ i neka za $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ vrijedi $A = \lim_n A_n$. Uzmimo $\epsilon > 0$ i nađimo $n \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $\|A - A_n\| < \frac{\epsilon}{3}$. Kako je operator A_n kompaktan, skup $A_n(\overline{K}(0,1))$ je relativno kompaktan. Neka je $\{A_n x_1, \ldots, A_n x_m\}$ neka njegova $\frac{\epsilon}{3}$-mreža.

Tvrdimo da je tada $\{Ax_1, \ldots, Ax_m\}$ jedna ϵ-mreža skupa $A(\overline{K}(0,1))$. No, to je zapravo očito: za proizvoljan $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, najprije možemo naći j za koji je $\|A_n x - A_n x_j\| < \frac{\epsilon}{3}$, a tada je $\|Ax - Ax_j\| \leq \|Ax - A_n x\| + \|A_n x - A_n x_j\| + \|A_n x_j - Ax_j\| < \epsilon$. $\square$

Primjer 8.1.7 Neka je $(e_n)_n$ ONB separabilnog kompleksnog Hilbertovog prostora H, neka je $(\lambda_n)_n$ ograničen niz kompleksnih brojeva, te neka je $A \in \mathbb{B}(H)$ dijagonalan operator s dijagonalom $(\lambda_n)_n$ (vidite primjer 7.2.4).

Operator A je definiran s $Ae_n = \lambda_n e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i vrijedi $\|A\| = M$, gdje je $M = \sup\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

Tvrdimo da je ovako definiran operator kompaktan ako i samo ako vrijedi $\lim_n \lambda_n = 0$.

Naime, ako je A kompaktan, s obzirom da niz $(e_n)_n$ slabo konvergira k 0, prema tvrdnji zadatka 8.1.13 niz $(Ae_n)_n$ mora u normi konvergirati k 0. Međutim, $\|Ae_n\| = |\lambda_n|$.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $\lim_n \lambda_n = 0$. Odaberimo $\epsilon > 0$ i nađimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0 \Rightarrow |\lambda_n| < \epsilon$. Pogledajmo dijagonalan operator A_{n_0} s dijagonalom $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_0}, 0, 0, \ldots)$. Jasno je da je operator A_{n_0} konačnog ranga, a onda zbog napomene 8.1.2(c) i kompaktan. S druge strane, i operator $A - A_{n_0}$ je dijagonalan, a njegova dijagonala je $(0, \ldots, 0, \lambda_{n_0+1}, \lambda_{n_0+2}, \ldots)$. Zato je $\|A - A_{n_0}\| \leq \epsilon$. Kako je ϵ bio odabran proizvoljno, prethodna propozicija povlači da je i A kompaktan.

U prethodnom primjeru smo ustanovili da je izvjestan operator na Hilbertovom prostoru kompaktan tako što smo pokazali da je limes niza operatora konačnog ranga. U stvari je to tipično, čim je kodomena Hilbertov prostor.

Propozicija 8.1.8 *Neka je X normiran, a H Hilbertov prostor. Tada je $\mathbb{K}(X,H) = \overline{\mathbb{F}(X,H)}$.*

Dokaz: Napomena 8.1.2 (c) i propozicija 8.1.6 povlače $\overline{\mathbb{F}(X,H)} \subseteq \mathbb{K}(X,H)$.

Da dokažemo obrat uzmimo $A \in \mathbb{K}(X,H)$ i $\epsilon > 0$. Jer je H potpun prostor, a skup $A(\overline{K}(0,1))$ relativno kompaktan, postoji konačna ϵ-mreža $\{y_1, \ldots, y_n\}$ za $A(\overline{K}(0,1))$. Neka je $M = \mathrm{span}\,\{y_1, \ldots, y_n\}$, te neka je $P \in \mathbb{B}(H)$ ortogonalni projektor na M. Stavimo $B = PA$. Tada je operator B konačnog ranga, a Bx je najbolja aproksimacija vektora Ax vektorima iz M. Za dani $x \in \overline{K}(0,1)$ izaberimo indeks j za koji vrijedi $\|Ax - y_j\| < \epsilon$. Tada je $\|Ax - Bx\| \leq \|Ax - y_j\| < \epsilon$. Zato je $\|A - B\| \leq \epsilon$. $\square$

Teorem 8.1.9 *Neka je X normiran prostor, $A \in \mathbb{K}(X)$ i $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$.*

(a) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\dim \mathrm{Ker}((A - \lambda I)^n) < \infty$. Nadalje, postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $\mathrm{Ker}((A - \lambda I)^n) = \mathrm{Ker}((A - \lambda I)^{n+1})$.

(b) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\mathrm{Im}((A - \lambda I)^n)$ zatvoren potprostor od X. Postoji $m \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $\mathrm{Im}((A - \lambda I)^m) = \mathrm{Im}((A - \lambda I)^{m+1})$.

(c) Ako su n i m najmanji prirodni brojevi za koje je $\mathrm{Ker}((A-\lambda I)^n) = \mathrm{Ker}((A-\lambda I)^{n+1})$ i $\mathrm{Im}((A - \lambda I)^m) = \mathrm{Im}((A - \lambda I)^{m+1})$ onda je $n = m$ i vrijedi $X = \mathrm{Ker}((A - \lambda I)^n) \dot{+} \mathrm{Im}((A - \lambda I)^n)$.

(d) Neka je $n = m$ kao u (c). Tada je $A|_{\mathrm{Im}((A-\lambda I)^n)}$ regularan operator na $\mathrm{Im}((A - \lambda I)^n)$.

Dokaz ovog teorema je mukotrpan pa ga izostavljamo. Vidite [SK], §5, propozicije 18-21. Inače, teorem (ili ponekad samo (c) dio) se naziva Fittingova dekompozicija kompaktnog operatora.

Teorem 8.1.10 *Neka je X kompleksan normiran prostor, $\dim X = \infty$, i $A \in \mathbb{K}(X)$.*

(a) Ako $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nije u $\sigma_p(A)$, onda je $A - \lambda I$ regularan operator. Dakle, $\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_p(A)$. Za svaki $\lambda \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq 0$, pripadajući svojstveni potprostor je konačnodimenzionalan.

(b) $\sigma_p(A)$ (pa onda i $\sigma(A)$) je konačan ili prebrojiv skup, a 0 mu je jedino moguće gomilište.

Dokaz: Uzmimo $\lambda \neq 0$ takav da je $A - \lambda I$ injekcija. Tada je prema teoremu 8.1.9 (c) operator $A - \lambda I$ i surjektivan, a prema tvrdnji (d) istog teorema $A - \lambda I$ je i regularan operator na $\mathrm{Im}(A-\lambda I) = X$. Uzmimo $\lambda \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq 0$, i označimo pripadajući svojstveni potprostor s Y. Tada je i $A|_Y = \lambda I$ kompaktan operator, a to je moguće samo ako je $\dim Y < \infty$.

Da je $0 \in \sigma(A)$, znamo već iz propozicije 8.1.5. Time je dokazana tvrdnja (a).

Da dokažemo (b), uzmimo proizvoljan $\epsilon > 0$. Tvrdimo da je skup $\{\lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| \geq \epsilon\}$ konačan. Pretpostavimo na trenutak suprotno, tj. da postoji niz $(\lambda_n)_n$ međusobno različitih svojstvenih vrijednosti operatora A takav da je $|\lambda_n| \geq \epsilon$, za sve n. Odaberimo za svaku od njih svojstveni vektor x_n i pogledajmo potprostore $X_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots x_n\}$. Stavimo još $X_0 = \{0\}$. Očito je $\dim X_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prema Rieszovoj lemi za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo naći vektor $e_n \in X_n$ za koji vrijedi $\|e_n\| = 1$ i $d(e_n, X_{n-1}) \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sad za proizvoljan $x \in X_n$ i $n \geq 2$ imamo $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ odakle vidimo da je $(A - \lambda_n I)x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n)x_i$. Posebno, vrijedi i $(A - \lambda_n I)e_n \in X_{n-1}$. Jer je $e_n \in X_n$, slijedi $Ae_n \in X_n$. Odavde za svaki $m \leq n-1$ nalazimo $e_{m,n} := \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_n e_n - Ae_n + Ae_m) \in X_{n-1}$.

Sada za sve $n > m$ imamo $\|Ae_n - Ae_m\| = \|\lambda_n(e_n - e_{m,n})\| = |\lambda_n|\|\|e_n - e_{m,n}\| \geq |\lambda_n| d(e_n, X_{n-1}) \geq |\lambda_n| \geq \epsilon$. To pokazuje da niz $(Ae_n)_n$ nema konvergentan podniz, što je kontradikcija. □

Napomena 8.1.11 Često se u literaturi susreće sljedeća reformulacija prve tvrdnje prethodnog teorema:

Teorem (Fredholmova alternativa). Neka je A kompaktan operator na normiranom prostoru X. Jednadžba $Ax - x = y$ ima jedinstveno rješenje za svaki $y \in X$ ako i samo ako jednadžba $Ax - x = 0$ ima samo trivijalno rješenje.

Alternativa se ovdje sastoji u već dokazanome: ili je $\lambda = 1$ u točkovnom spektru operatora A, ili je operator $A - I$ regularan.

Zadatak 8.1.12 Dokažite tvrdnju (b) iz napomene 8.1.2.

Zadatak 8.1.13 Neka su X i Y normirani prostori, $A \in \mathbb{K}(X, Y)$ i neka za niz $(x_n)_n$ u X vrijedi $x_n \stackrel{w}{\to} x$. Dokažite da tada $Ax_n \stackrel{s}{\to} Ax$.

8.2 Kompaktni operatori na Hilbertovim prostorima

U ovoj točki detaljnije ćemo proučiti kompaktne operatore na beskonačnodimenzionalnom kompleksnom Hilbertovom prostoru H. Podsjetimo se da prema propoziciji 8.1.8 vrijedi $\mathbb{K}(H) = \overline{\mathbb{F}(H)}$. U tom svjetlu je korisno uočiti da je svaki operator konačnog ranga $A \in \mathbb{B}(H)$ oblika $Ax = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle y_i$ za neke $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in H$ i $n \in \mathbb{N}$ (usp. zadatak 8.2.9).

Napomena 8.2.1 Ako je H Hilbertov prostor i $A \in \mathbb{B}(H)$ hermitski operator konačnog ranga, onda postoje realni brojevi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, i ortonormirani vektori $e_1, \ldots, e_n$ u H takvi da je $Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i$, $\forall x \in H$. Zaista, jer je $H = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$, tvrdnja slijedi iz odgovarajućeg rezultata za konačnodimenzionalne prostore primijenjenog na operator $A|_{\operatorname{Im} A} : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Im} A$.

Propozicija 8.2.2 *Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathbb{B}(H)$. Tada je $A \in \mathbb{K}(H)$ ako i samo ako je $A^*A \in \mathbb{K}(H)$. Osim toga je $A \in \mathbb{K}(H)$ ako i samo ako vrijedi $A^* \in \mathbb{K}(H)$.*

Dokaz: Ako je A kompaktan, onda je i A^*A kompaktan jer je prema propoziciji 8.1.4 $\mathbb{K}(H)$ ideal u $\mathbb{B}(H)$. Da dokažemo obrat, pretpostavimo da je operator A^*A kompaktan. Neka je $(x_n)_n$ proizvoljan niz u $\overline{K}(0,1)$. Odaberimo podniz $(x_{p(n)})_n$ niza $(x_n)_n$ takav da $(A^*Ax_{p(n)})_n$ konvergira. Zbog

$$\|Ax_{p(n)} - Ax_{p(m)}\|^2 = \langle A^*A(x_{p(n)} - x_{p(m)}), x_{p(n)} - x_{p(m)} \rangle \leq$$

$$\|A^*A(x_{p(n)} - x_{p(n)})\| \, \|x_{p(n)} - x_{p(m)}\| \leq 2\|A^*A(x_{p(n)} - x_{p(n)})\|$$

i niz $(Ax_{p(n)})_n$ je Cauchyjev.

Za dokaz druge tvrdnje uzmimo da je $A \in \mathbb{K}(H)$. Jer je $\mathbb{K}(H)$ ideal u $\mathbb{B}(H)$, slijedi $AA^* \in \mathbb{K}(H)$. Prema prvoj, već dokazanoj tvrdnji, to povlači da je $A^* \in \mathbb{K}(H)$. Obrat slijedi iz upravo dokazane implikacije primijenjene na operator A^*. $\square$

U nastavku ćemo opisati kompaktne normalne operatore. Prisjetimo se da smo u primjeru 8.1.7 već opisali kompaktne dijagonalne operatore. Pokazat će se da je takav oblik tipičan, tj. da se svaki kompaktan normalan operator može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi. Uočimo da taj rezultat već poznajemo za normalne operatore na konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima.

Ako je H Hilbertov prostor i $A \in \mathbb{B}(H)$ normalan operator onda zbog $\|Ax\| = \|A^*x\|$, $\forall x \in H$, vrijedi $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^*$, a to dalje povlači $\overline{\operatorname{Im} A^*} = \overline{\operatorname{Im} A}$. Primijetimo: ako ovaj posljednji potprostor označimo s M onda su $A|_M$ i $A^*|_M$ injektivni normalni operatori na Hilbertovom prsotoru M. S obzirom da je $H = \operatorname{Ker} A \oplus M$, očito je dovoljno opisati injektivne kompaktne normalne operatore.

Teorem 8.2.3 *Neka je A injektivan kompaktan normalan operator na Hilbertovom prostoru H. Tada je $H = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(A)} Ker(A - \lambda I)$ i, posebno, H je separabilan.*

Dokaz: Iz propozicije 7.2.10 znamo da su svojstveni potprostori koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima normalnog operatora operatora A međusobno okomiti.

Označimo $M = \left(\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(A)} \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)\right)^{\perp}$ i pretpostavimo da je $M \neq \{0\}$. Jer je svaki od potprostora $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)$ svojstven i za A i za A^* (za svojstvene vrijednosti λ i $\overline{\lambda}$, respektivno), potprostor $\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(A)} \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)$ je invarijantan i za A i za A^*, pa je zato i njegov ortogonalni komplement M invarijantan i za A i za A^*. Osim toga, operator $A|_M$ je također normalan i kompaktan operator na prostoru M i vrijedi $(A|_M)^* = A^*|_M$. Pritom, i $A|_M$ je injekcija pa je zato $A|_M \neq 0$. Posebno, $\nu(A|_M) = \|A|_M\| > 0$ pa u spektru operatora $A|_M$ postoji bar jedan skalar λ_0 različit od 0. Jer je $A|_M$ kompaktan operator, nužno je, prema teoremu 8.1.10 (a), $\lambda_0 \in \sigma_p(A|_M)$, tj. $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$. Međutim, to je kontradikcija jer je onda pripadajući svojstveni potprostor sadržan u M; dakle, okomit na $\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(A)} \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)$.

Prema teoremu 8.1.10 (b) kompaktan operator ima najviše prebrojivo mnogo svojstvenih vrijednosti (i, općenito, točaka spektra), a prema (a) dijelu istog teorema svaki svojstveni potprostor (osim ev. jezgre) kompaktnog operatora je konačne dimenzije. To dokazuje posljednju tvrdnju teorema. $\square$

Teorem 8.2.4 *Neka je A injektivan kompaktan normalan operator na Hilbertovom prostoru H i neka je $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$. Označimo s M_n pripadajuće svojstvene potprostore, i s $P_n \in \mathbb{B}(H)$ ortogonalne projektore na M_n, $n \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \ \textit{(u smislu konvergencije u normi)}, \tag{1}$$

i

$$I = (s)\sum_{n=1}^{\infty} P_n \ \textit{(u smislu jake konvergencije)}. \tag{2}$$

Dokaz: Smijemo pretpostaviti da je $|\lambda_n| > |\lambda_{n+1}|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Iz prethodnog teorema znamo da postoji ONB $(e_n)_n$ za H takva da je $\{e_{m_{n-1}+1}, \ldots, e_{m_n}\}$ ONB za M_n, $n \in \mathbb{N}$. Pritom je $m_0 = 0$, a m_n su prirodni brojevi induktivno definirani s $m_n - m_{n-1} = \dim M_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Drugim riječima, imamo $m_n = \sum_{j=1}^{n} \dim M_j$.

Sad uočimo da za sve x vrijedi $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$ i $P_j x = \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} \langle x, e_i\rangle e_i$. Zato je $\|x - \sum_{j=1}^{n} P_j x\|^2 = \sum_{i=m_n+1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \to 0$ za $n \to \infty$. Time je druga jednakost dokazana.

Odavde je zbog neprekidnosti operatora A najprije $Ax = \sum_{j=1}^{\infty} AP_j x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j x$, a onda i

$$\|(A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j)x\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j P_j x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 \|P_j x\|^2 \leq$$

$$|\lambda_{n+1}|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \|P_j x\|^2 \leq |\lambda_{n+1}|^2 \|x\|^2.$$

Dakle je $\|A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\| \leq |\lambda_{n+1}|$, a znamo da niz $(\lambda_m)_m$ konvergira u 0 jer $e_m \xrightarrow{w} 0$ pa $\|Ae_m\| = |\lambda_m| \to 0$. $\square$

Na kraju, evo još nekoliko napomena i rezultata o kompaktnim operatorima na Hilbertovim prostorima.

Napomena 8.2.5 Neka je H separabilan kompleksan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor. Tada je $\mathbb{K}(H)$ jedini pravi obostran zatvoren ideal u $\mathbb{B}(H)$.

Da to dokažemo uzmimo proizvoljan pravi zatvoren obostran ideal $\mathbb{J}$ u $\mathbb{B}(H)$ i pokažimo najprije da $\mathbb{J}$ sadrži sve ograničene operatore ranga 1. Uzmimo vektore $u, v \in H$ i operator $Ax = \langle x, u\rangle v$. Odaberimo bilo koji $B \in \mathbb{J}$, $B \neq 0$, i vektore $u_0, v_0 \neq 0$ za koje je $Bu_0 = v_0$. Definirajmo operator C sa $Cx = \langle x, u\rangle u_0$ i nađimo D za koje vrijedi$Dv_0 = v$. Tada je $DBCx = Ax$, $\forall x$, pa zbog $B \in \mathbb{J}$ slijedi $A \in \mathbb{J}$.

Sad prema tvrdnji zadatka 8.2.9 slijedi da $\mathbb{J}$ sadrži sve operatore konačnog ranga, a onda zbog zatvorenosti imamo $\mathbb{K}(H) \subseteq \mathbb{J}$.

Da završimo dokaz pretpostavimo da $\mathbb{J}$ sadrži nekompaktan operator $A \in \mathbb{B}(H)$. Pokazat ćemo da je tada $\mathbb{J} = \mathbb{B}(H)$.

Neka je $A = VT$ polarna forma operatora A. Zbog $T = V^*A$ (vidite zadatak 8.2.11) aslijedi $T \in \mathbb{J}$. S druge strane, niti T nije kompaktan zbog $A = VT$. Jer je T hermitski, postoji beskonačnodimenzionalan zatvoren potprostor $M \leq H$, invarijantan za T, na kojem je T odozdo ograničen s, recimo, ϵ. Naime, u suprotnom bi T bio kompaktan. (Obrazložite.)

Neka je $U \in \mathbb{B}(H)$ izometrija za koju je $\operatorname{Im} U = M$ (ovdje koristimo separabilnost!). Jer je $T(M) = M$, imamo $U^*TU(H) = U^*T(M) = U^*(M) = H$. Osim toga, jer za sve x vrijedi $Ux \in M$, imamo i $\|U^*TUx\| = \|TUx\| \geq \epsilon\|Ux\| = \epsilon\|x\|$. Dakle, U^*TU je regularan operator. Kako je $T \in \mathbb{J}$, a $\mathbb{J}$ obostran ideal, slijedi $I \in \mathbb{J}$, tj. $\mathbb{J} = \mathbb{B}(H)$.

Napomena 8.2.6 Neka je H kompleksan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor, te neka je $A \in \mathbb{K}(H)$. Svaki zatvoren potprostor $M \leq H$ u slici operatora A tada je konačnodimenzionalan.

Da to pokažemo uzmimo zatvoren potprostor $M \subseteq \operatorname{Im} A$. Tada je i $A^{-1}(M)$ zatvoren potprostor od H. Pogledajmo operator $B = A|_{A^{-1}(M)} : A^{-1}(M) \to M$; očito, i taj je operator kompaktan i zato je skup $B(\overline{K}(0,1)$ relativno kompaktan. Međutim, jer je B surjekcija, B je i otvoreno preslikavanje pa skup $B(\overline{K}(0,1)$ sadrži neku kuglu. Zato prema teoremu 1.2.13 mora biti $\dim M < \infty$.

Definicija 8.2.7 *Neka je H kompleksan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor. Operator $A \in \mathbb{B}(H)$ se zove Fredholmov operator ako je $Im\, A$ zatvoren potprostor od H te ako vrijedi $dim(Ker\, A) < \infty$ i $dim((Im\, A)^{\perp}) < \infty$.*

Uočimo da je, na primjer, operator jednostranog pomaka Fredholmov. Sljedeći teorem karakterizira Fredholmove operatore.

Teorem 8.2.8 *(Atkinson) Neka je H kompleksan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor i $A \in \mathbb{B}(H)$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) A je Fredholmov operator,

(b) postoji $B \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $I - AB, I - BA \in \mathbb{F}(H)$,

(c) postoji $C \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $I - AC, I - CA \in \mathbb{K}(H)$.

Dokaz izostavljamo (vidite, npr. [H], problem 142). Tek primijetimo da nam tvrdnja (c) pokazuje kako Fredholmovi operatori induciraju regularne elemente u kvocijentnoj algebri $\mathbb{B}(H)/\mathbb{K}(H)$. Naime, kvocijent algebre po idealu nije samo vektorski prostor, nego i algebra uz prirodno množenje koje se uvede preko množenja predstavnika klasa. Zato je $\mathbb{B}(H)/\mathbb{K}(H)$ zaista algebra, štoviše, Banachova algebra s jedinicom (čak i C^*-algebra). Naziva se Calkinova algebra.

Zaista, ako s $\pi : \mathbb{B}(H) \to \mathbb{B}(H)/\mathbb{K}(H)$ označimo kvocijentno preslikavanje, onda iz gornje tvrdnje (c) slijedi $\pi(I) = \pi(A)\pi(C) = \pi(C)\pi(A)$.

Zadatak 8.2.9 Neka je H Hilbertov prostor. Operator $A \in \mathbb{B}(H)$ je konačnog ranga ako i samo ako postoje linearno nezavisni vektori $y_1, \ldots, y_n \in H$ i linearno nezavisni vektori $x_1, \ldots, x_n \in H$, $n \in \mathbb{N}$, takvi da je

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle y_i, \ \forall x \in H. \tag{3}$$

Posebno, tada je i operator A^* konačnog ranga i vrijedi

$$A^* y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, y_i \rangle x_i, \ \forall y \in H \tag{4}$$

pa je zato $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^*)$. Dokažite!

Zadatak 8.2.10 Dopunite argument iz napomene 8.2.5.

Zadatak 8.2.11 Neka je H Hilbertov prostor, $A \in \mathbb{B}(H)$ i $A = VT$ polarna forma. Pokažite (oslanjajući se na konstrukciju iz dokaza teorema o polarnoj formi) da zaista vrijedi $T = V^*A$.

Zadatak 8.2.12 Neka je (e_n) ONB Hilbertovog prostora H, te neka je (α_n) ograničen niz kompleksnih brojeva. Promotrimo operator jednostranog pomaka s opterećenjem (weighted shift) na H definiran s $W(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \alpha_n e_{n+1}$, $x \in H$. (Uočite da vrijedi $We_n = \alpha_n e_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.) Dokažite: W je kompaktan ako i samo ako vrijedi $\lim_n \alpha_n = 0$. *Uputa:* uočite da je $W = SA$ gdje je S operator jednostranog pomaka, a A prikladno odabran dijagonalan operator.

9 Bazni okviri Hilbertovih prostora

9.1 Osnove

U ovom poglavlju H će označavati kompleksan separabilan Hilbertov prostor, osim ako izrijekom ne kažemo drugačije. Razmatranja koja slijede posvećena su reprodukcijskim sistemima u Hilbertovim prostorima, općenitijim od ortonormiranih baza.

Definicija 9.1.1 *Niz $(x_n)_n$ u H se naziva bazni okvir (frame) prostora Hako postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \forall x \in H. \tag{1}$$

Optimalne konstante A i B s ovim svojstvom nazivaju se granice baznog okvira.

Ako je $A = B$ kažemo da je bazni okvir napet, a ako je $A = B = 1$, tj. ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|x\|^2, \forall x \in H, \tag{2}$$

kaže se da je bazni okvir Parsevalov.

Konačno, kažemo da je bazni okvir egzaktan ako niz dobiven izostavljanjem bilo kojeg njegovog člana više nije bazni okvir za H.

Napomena 9.1.2 Zbog apsolutne konvergencije reda u (1) ta je konvergencija i bezuvjetna. Zato je svaka permutacija baznog okvira opet bazni okvir, a za indeksni skup možemo uzeti proizvoljan prebrojiv skup.

Napomena 9.1.3 Primijetimo da je bazni okvir niz, a ne skup. Posebno, elementi baznog okvira mogu se ponavljati.

Primjer 9.1.4 Neka je $(e_n)_n$ ONB za H. Tada je niz

(a) $(e_1, e_2, e_3, \ldots)$ bazni okvir za H, Parsevalov i egzaktan;

(b) $(e_1, 0, e_2, 0, e_3, \ldots)$ bazni okvir za H, Parsevalov, neegzaktan;

(c) $(e_1, e_1, e_2, e_2, \ldots)$ bazni okvir za H, napet ($A = B = 2$), neegzaktan;

(d) $(2e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots)$ bazni okvir za H, nije napet ($A = 1$, $B = 2$), egzaktan;

(e) $(e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \ldots)$ bazni okvir za H, Parsevalov, neegzaktan;

(f) $(e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_3, \ldots)$ ortogonalan i fundamentalan, ali nije bazni okvir za H.

Propozicija 9.1.5 *Svaki bazni okvir $(x_n)_n$ u H je fundamentalan niz u H.*

Dokaz: S obzirom da radimo u Hilbertovom prostoru, dovoljno nam je dokazati da je niz $(x_n)_n$ maksimalan. Uzmimo zato da je $x \in H$, $x \perp x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Iz prve nejednakosti u (1) odmah slijedi $A\|x\|^2 \leq 0$; dakle, $x = 0$. $\square$

Uočimo jednostavnu posljedicu prethodne propozicije: skup svih konačnih linearnih kombinacija elemenata baznog okvira $(x_n)_n$ s racionalnim koeficijentima je gust u H. To je razlog zbog kojeg smo se u startu ograničili na separabilne prostore.

Ako je $\dim H = \infty$, prethodna propozicija pokazuje da svaki bazni okvir za H mora imati beskonačno mnogo različitih elemenata. Posebno, niti jedan konačan niz ne može biti bazni okvir za H. Zato konačne bazne okvire možemo promatrati samo u konačnodimenzionalnim prostorima. Time se ovdje nećemo baviti (naš fokus je na beskonačnodimenzionalnim Hilbertovim prostorima), no važno je uočiti sljedeću osnovnu činjenicu.

Napomena 9.1.6 Neka je $(x_1, x_2, \dots x_m)$ uređena m-torka vektora iz $\mathbb{F}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$ (pri čemu je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Tada je $(x_1, x_2, \dots x_m)$ bazni okvir za $\mathbb{F}^n$ ako i samo ako vektori $x_1, x_2, \dots x_m$ čine sistem izvodnica za $\mathbb{F}^n$.

Dokaz: U jednom smjeru dokaz je točno isti kao dokaz prethodne propozicije; vidi se da je bazni okvir $(x_1, \dots x_m)$ maksimalan niz u $\mathbb{F}^n$, pa je $(\operatorname{span}\{x_1, \dots x_m\})^\perp = \{0\}$.

Pretpostavimo da $x_1, x_2, \dots x_m$ čine sistem izvodnica za $\mathbb{F}^n$. Uočimo da zato vrijedi: $x \in \mathbb{F}^n$, $x \perp x_i$, $i = 1, \dots, m \Rightarrow x = 0$. Definirajmo operator $U : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ formulom $Ux = (\langle x, x_1\rangle, \dots, \langle x, x_m\rangle)$. Očito je U linearan, a zbog prethodne primjedbe i injektivan. Zato je $U_0 : \mathbb{F}^n \to \operatorname{Im} U$, $U_0 x = Ux$, bijekcija pa postoji inverzni operator $V : \operatorname{Im} U \to \mathbb{F}^n$, a taj je nužno ograničen.

Dakle, postoji konstanta $M > 0$ za koju vrijedi $\|V(U_0x)\|^2 \leq M\|U_0x\|^2$, $\forall x \in \mathbb{F}^n$, tj. $\frac{1}{M}\|x\|^2 \leq \|U_0x\|^2, \forall x \in \mathbb{F}^n$. Za $A = \frac{1}{M}$ zato imamo $A\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^m |\langle x, x_i\rangle|^2$, $\forall x \in \mathbb{F}^n$.

S druge strane, imamo $\sum_{i=1}^m |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^m \|x\|^2 \|f_i\|^2 \leq B\|x\|^2$, $\forall x \in \mathbb{F}^n$, ako stavimo $B = \sum_{i=1}^m \|f_i\|^2$.

Vratimo se sada beskonačnodimenzionalnim prostorima. Općenito, ako je $(x_n)_n$ proizvoljan niz u H, možemo za $x \in H$ definirati $Ux = (\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, \langle x, x_3\rangle, \dots)$. Jasno je da je U linearno preslikavanje; međutim, općenito, niz Ux ne mora pripadati prostoru ℓ^2. To motivira sljedeću definiciju.

Definicija 9.1.7 *Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u H Besselov ako vrijedi $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty, \forall x \in H$.*

Primijetimo da je svaki bazni okvir za H Besselov niz. Osim toga, čim je niz Besselov, operator U iz prethodne diskusije je dobro definiran linearan operator s H u ℓ^2. Kaže se da je U operator analize pridružen nizu $(x_n)_n$. Zanimljivo je da je operator U automatski ograničen, čim je polazni niz Besselov.

Propozicija 9.1.8 *Neka je $(x_n)_n$ Besselov niz u H. Tada je operator analize $U : H \to \ell^2$ ograničen. Posebno, postoji konstanta B za koju vrijedi $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2$, $\forall x \in H$.*

Dokaz: Dokazat ćemo da U ima zatvoren graf. Neka je $(y,(c_n)_n) = \lim_{k\to\infty}(y_k, Uy_k)$. Fiksirajmo indeks m. Tada je

$$|c_m - \langle y_k, x_m\rangle| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - \langle y_k, x_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(c_n)_n - Uy_k\| \to 0$$

za $k \to \infty$. Dakle, imamo $c_m = \lim_{k\to\infty}\langle y_k, x_m\rangle = \langle y, x_m\rangle$. Kako ovo vrijedi za svaki m, dokazali smo da je $(c_n)_n = Uy$. □

Broj B iz tvrdnje prethodne propozicije se zove Besselova ograda niza $(x_n)_n$. Kako je pripadajući operator analize U ograničen, definiran je i adjungirani operator U^* koji se naziva operatorom sinteze niza $(x_n)_n$. Tvrdnja propozicije koja slijedi opravdava to ime.

Propozicija 9.1.9 *Neka je $(x_n)_n$ Besselov niz u H, te neka je U pridruženi operator analize. Tada za svaki niz $(c_n)_n$ iz ℓ^2 red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ bezuvjetno konvergira i operator U^* djeluje po formuli $U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Posebno, ako je $(e_n)_n$ standardna ONB za ℓ^2, onda vrijedi $U^* e_n = x_n$ i, posljedično, $\|x_n\| \leq \|U\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: I u ovom dokazu koristit ćemo već viđeni trik: svaki vektor $x \in H$ ima istu normu kao i funkcional induciran tim vektorom.

Uzmimo proizvoljan konačan skup $F \subset \mathbb{N}$. Neka je B Besselova ograda niza $(x_n)_n$. Tada je

$$\left\|\sum_{n\in F} c_n x_n\right\| = \sup\left\{\left|\left\langle \sum_{n\in F} c_n x_n, y\right\rangle\right| : \|y\| = 1\right\} = \sup\left\{\left|\sum_{n\in F} c_n \langle x_n, y\rangle\right| : \|y\| = 1\right\} \leq$$

(sad ćemo koristiti Cauchyjevu nejednakost u prostoru $\mathbb{C}^{|F|}$)

$$\sup\left\{\left(\sum_{n\in F} |c_n|^2\right)\left(\sum_{n\in F} |\langle x_n, y\rangle|^2\right) : \|y\| = 1\right\} \leq \sup\left\{B\|y\|^2 \sum_{n\in F} |c_n|^2 : \|y\| = 1\right\} = B\sum_{n\in F} |c_n|^2.$$

Jer je bezuvjetna konvergencija reda ekvivalentna sumabilnosti, dovoljno nam je pokazati da je hiperniz $(\sum_{n\in F} c_n x_n)_F$ konvergentan, odnosno Cauchyjev. Međutim, red $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ konvergira apsolutno, zato i bezuvjetno, odakle slijedi sumabilnost te je zbog toga hiperniz $(\sum_{n\in F} |c_n|^2)_F$ Cauchyjev. Preostaje se pozvati na nejednakost dobivenu u prethodnom dijelu dokaza: $\|\sum_{n\in F} c_n x_n\| \leq B\sum_{n\in F} |c_n|^2$.

Sad je lako izvesti formulu za operator U^*: za $x \in H$ i $(c_n)_n \in \ell^2$ imamo

$$\langle x, U^*(c_n)_n\rangle = \langle Ux, (c_n)_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle \overline{c_n} = \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right\rangle.$$

□

Napomena 9.1.10 Zanimljivo je da je niz vektora u H je Besselov čim je pripadajući operator sinteze dobro definiran. Preciznije, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Neka je $(x_n)_n$ niz u H takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ dobro definiran vektor u H za svaki niz $(c_n)_n \in \ell^2$. Tada je niz $(x_n)_n$ Besselov.

Dokaz: Definirajmo $T : \ell^2 \to H$ formulom $T(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Po pretpostavci je T dobro definirano i (očito) linearno preslikavanje. Definirajmo za svaki $k \in \mathbb{N}$ operator $T_k \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ formulom $T_k(c_n)_n = \sum_{n=1}^{k} c_n x_n$. Jasno je da vrijedi $\lim_{k\to\infty} T_k(c_n)_n = T(c_n)_n$, $\forall (c_n)_n \in \ell^2$. Drugim riječima, $T_k \xrightarrow{s} T$. Prema propoziciji 5.4.10 operator T je ograničen. Pišimo $\|T\| = \sqrt{B}$.

Sada znamo da postoji i operator T^*, te da je također $\|T^*\| = \sqrt{B}$. Očito je da vrijedi $\langle T^* x, e_n\rangle = \langle x, Te_n\rangle = \langle x, x_n\rangle$, $\forall x \in H, \forall n \in \mathbb{N}$. Odavde je $T^* x = (\langle x, x_n\rangle)_n$, pa sad činjenica da je $T^* x = (\langle x, x_n\rangle)_n \in \ell^2$ zapravo znači da je $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty, \forall x \in H$, tj. da je niz $(x_n)_n$ Besselov. Osim toga, jednakost $\|T^*\| = \sqrt{B}$ pokazuje da vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|T^* x\|^2 \le B\|x\|^2$, $\forall x \in H$. Dakle, B je ograda Besselovog niza (x_n). □

U prethodnim opisima operatora analize i njemu adjungiranog operatora sinteze pretpostavljali smo da je niz koji razmatramo samo Besselov. Ti operatori imaju još bolja svojstva kad se radi o baznim okvirima. Najprije dokažimo sljedeći koristan rezultat o operatorima na Hilbertovim prostorima:

Lema 9.1.11 *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H, K)$.*

1. *T ima zatvorenu sliku ako i samo ako T^* ima zatvorenu sliku.*
2. *T je surjekcija ako i samo ako je T^* ograničen odozdo.*

Dokaz: Neka je $\operatorname{Im} T = K_0$ zatvoren potprostor prostora K. Označimo $T_0 : H \to K_0, T_0 x = Tx$. Uočimo da je T_0 surjektivan ograničen operator Hilbertovih prostora. Pretpostavimo za trenutak da za takve operatore znamo da im adjungirani operator ima zatvorenu sliku. Tada imamo $(\operatorname{Ker} T_0)^\perp = \operatorname{Im} T_0^*$. Preostaje uočiti da je $\operatorname{Im} T_0^* = \operatorname{Im} T^*$. Zaista; $T^*|_{K_0} = T_0^*$ odmah povlači $\operatorname{Im} T_0^* \subseteq \operatorname{Im} T^*$. S druge strane, $\operatorname{Im} T^* \subseteq (\operatorname{Ker} T)^\perp = (\operatorname{Ker} T_0)^\perp = \operatorname{Im} T_0^*$.

Zaključak: da bismo dokazali $\operatorname{Im} T$ *zatvoren* $\Rightarrow \operatorname{Im} T^*$ *zatvoren*, dovoljno je pokazati da vrijedi T *surjektivan* $\Rightarrow \operatorname{Im} T^*$ *zatvoren*. Međutim, u lemi 6.1.1 dokazali smo da surjektivnost operatora T povlači da je T^* odozdo ograničen. Zato je $\operatorname{Im} T^*$ zatvoren potprostor.

Ovime je kompletiran dokaz implikacije $\operatorname{Im} T$ *zatvoren* $\Rightarrow \operatorname{Im} T^*$ *zatvoren*. Obrat slijedi iz te, upravo dokazane implikacije primijenjene na operator T^*. Time je prva tvrdnja leme dokazana.

Da dokažemo drugu tvrdnju pretpostavimo da je operator T^* odozdo ograničen. Tada je $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$, a $\operatorname{Im} T^*$ je zatvoren potprostor. Prema prvoj tvrdnji leme zato je i $\operatorname{Im} T$ zatvoren potprostor te vrijedi $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp = K$. Dakle, T je surjekcija. Obrat je tvrdnja već dokazane leme 6.1.1. □

Teorem 9.1.12 *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H. Tada je pridruženi operator analize $U \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ odozdo ograničen, a adjungirani operator U^* je surjekcija. Obratno, ako je $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ surjekcija i $(e_n)_n$ standardna ONB za ℓ^2, onda je niz $(x_n)_n$, $x_n = Te_n$, $n \in \mathbb{N}$, bazni okvir za H čiji operator analize se podudara s T^*.*

Dokaz: Prva nejednakost u definicionom uvjetu (1) upravo znači da je U odozdo ograničen. Sad prethodna lema daje surjektivnost operatora U^*.

Za dokaz druge tvrdnje uzmimo surjektivan operator $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$. Operator T^* je, naravno, ograničen, a prema prethodnoj lemi i odozdo ograničen. Zato postoje konstante $A, B > 0$ za koje vrijedi $A\|x\|^2 \leq \|T^*x\|^2 \leq B\|x\|^2$, $\forall x \in H$. S druge strane, znamo da je $T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*x, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Te_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle e_n$. Zato je $\|T^*x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$. Dakle, $(x_n)_n$ je bazni okvir za H. Osim toga, rezultat prethodnog računa možemo zapisati i kao $T^*x = (\langle x, x_n\rangle)_n \in \ell^2$, a to pokazuje da je T^* operator analize za bazni okvir $(x_n)_n$. □

Korolar 9.1.13 *Niz $(x_n)_n$ u H je bazni okvir za H ako i samo ako postoje separabilan Hilbertov prostor K, ortonormirana baza $(f_n)_n$ u K i surjektivan operator $T \in \mathbb{B}(K, H)$ takvi da vrijedi $Tf_n = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: Ako je $(x_n)_n$ bazni okvir onda već znamo da je $x_n = U^*e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, gdje je $(e_n)_n$ standardna ONB za l^2, a U operator analize pridružen nizu (x_n).

Obratno, neka je $x_n = Tf_n$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je K separabilan Hilbertov prostor, $(f_n)_n$ ONB za K i $T \in \mathbb{B}(K, H)$ surjektivan operator. Uočimo sada unitaran operator $V \in \mathbb{B}(\ell^2, K)$ definiran s $Ve_n = f_n$, $n \in \mathbb{N}$, i primijetimo da vrijedi $x_n = TVe_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, te da je i TV surjekcija. Preostaje primijeniti drugu tvrdnju prethodnog teorema. □

Primjer 9.1.14 Neka je $(e_n)_n$ ONB u H. Definirajmo niz $(x_n)_n$ u H s $x_n = e_n + e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Ako sa S označimo operator jednostranog pomaka na H s obzirom na ONB $(e_n)_n$, onda je očito $x_n = (S + I)e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Kako je $-1 \in \sigma_c(S)$, operator $S + I$ nije surjekcija.

Sada je jasno da $(x_n)_n$ nije bazni okvir za H. Naime, ako bi $(x_n)_n$ bio bazni okvir za H, prema prethodnom korolaru bi postojao surjektivan operator $T \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $x_n = Te_n$, $\forall n \in \mathbb{B}(H)$. (Nije smanjenje općenitosti uzeti ovdje upravo bazu $(e_n)_n$ jer su sve ONB u separabilnim Hilbertovim prostorima unitarno ekvivalentne.) Imali bismo, dakle, $Te_n = (S + I)e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, odakle bi zbog linearnosti i ograničenosti operatora T i $S + I$ slijedilo $T = S + I$, no to je nemoguće jer $S + I$ nije surjekcija.

Iz rečenog je jasno da niti jedan niz $(x_n)_n$ u H oblika $x_n = Re_n$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $R \in \mathbb{B}(H)$ neki nesurjektivan operator, ne može biti bazni okvir za H.

Neposredna posljedica korolara 9.1.13 je i ovaj važni korolar.

Korolar 9.1.15 *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, neka je $B \in \mathbb{B}(H, K)$ surjektivan operator s H na Hilbertov prostor K, te neka je $y_n = Bx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $(y_n)_n$ bazni okvir za K.*

Korisno je zabilježiti tvrdnje prethodnih rezultata i u specijalnom slučaju Parsevalovih baznih okvira. Sjetimo se da se ograničen operator $U \in \mathbb{B}(H, K)$, gdje su H i K Hilbertovi prostori, zove ko-izometrija ako je U^* izometrija. Uočimo da je $U \in \mathbb{B}(H, K)$ ko-izometrija ako i samo ako je surjektivna parcijalna izometrija.

Korolar 9.1.16 *Niz $(x_n)_n$ u H je Parsevalov bazni okvir za H ako i samo ako postoji ko-izometrija $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ sa svojstvom $Te_n = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $(e_n)_n$ standardna ONB u ℓ^2.*

Dokaz: Kako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H, imamo $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$, $\forall x \in H$. Međutim, to upravo znači da je pridruženi operator analize U izometričan, tj. da je U^* ko-izometrija, a još iz propozicije 9.1.9 znamo da vrijedi $U^*e_n = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Obratno, uzmimo ko-izometriju $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ i stavimo $x_n = Te_n$, $n \in \mathbb{N}$. Jer je T^* izometrija, imamo $\|T^*x\|^2 = \|x\|^2$, $\forall x \in H$. S druge strane je $\|T^*x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^*x, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$, $\forall x \in H$. Dakle, $(x_n)_n$ je Parsevalov bazni okvir za H. $\square$

Zadatak 9.1.17 Neka su H i K Hilbertovi prostori i $A \in \mathbb{B}(H, K)$ operator sa zatvorenom slikom. Pokažite da tada postoji $B \in \mathbb{B}(K, H)$ za koji vrijedi $BA = P_{(\mathrm{Ker}\, A)^\perp}$ i $AB = P_{\mathrm{Im}\, A}$, pri čemu P_M označava ortogonalni projektor na zatvoren potprostor M. (Operator B se zove pseudoinverz operatora A.) Uputa: uočite da je $A_0 = A|_{(\mathrm{Ker}\, A)^\perp} : (\mathrm{Ker}\, A)^\perp \to \mathrm{Im}\, A$ ograničena bijekcija Hilbertovih prostora.

Zadatak 9.1.18 Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathbb{B}(H)$. Dokažite: A ima zatvorenu sliku ako i samo ako postoji $B \in \mathbb{B}(H)$ sa svojstvom $A = ABA$. Uputa: ako je $A = ABA$ izlazi da je $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Ker}\,(AB - I)$, a ako A ima zatvorenu sliku, promotrite pseudoinverz B iz prethodnog zadatka.

Zadatak 9.1.19 Dokažite prvu tvrdnju leme 9.1.11 ($A \in \mathbb{B}(H, K)$ ima zatvorenu sliku ako i samo ako A^* ima zatvorenu sliku) koristeći tvrdnju prethodnog zadatka.

Zadatak 9.1.20 Neka su H i K Hilbertovi prostori, te neka za $A \in \mathbb{B}(H, K)$ postoji konstanta $m > 0$ takva da vrijedi $\|Ax\| \geq m\|x\|$, $\forall x \in H$. Pokažite da je i svaki operator iz $K(A, m)$ ograničen odozdo. Posebno, uočite da je skup svih odozdo ograničenih operatora otvoren u $\mathbb{B}(H, K)$.

Zadatak 9.1.21 Neka su H i K Hilbertovi prostori, te neka je $A \in \mathbb{B}(H, K)$ surjekcija. Pokažite da je i svaki operator iz $K(A, m)$ surjekcija, gdje je m donja ograda za operator A^*. Posebno, uočite da je skup svih surjektivnih operatora otvoren u $\mathbb{B}(H, K)$.

Zadatak 9.1.22 Pokažite da je niz $(x_n)_n$ iz primjera 9.1.14 Besselov, te da je maksimalan u H. (Napomena. Sjetimo se da smo u napomeni 9.1.6 pokazali kako je u konačnodimenzionalnom prostoru svaki maksimalan niz bazni okvir. U tom smislu niz iz ovog zadatka pokazuje kako takva tvrdnje ne vrijedi ako je $\dim H = \infty$.)

9.2 Dualni bazni okviri i rekonstrukcijska formula

Vidjeli smo da su bazni okviri slike ortonormiranih baza pri surjektivnim ograničenim operatorima. Primijetimo odmah da odavde direktno slijedi ključno svojstvo baznih okvira - svojstvo rekonstrukcije. Uzmimo bazni okvir $(x_n)_n$ za H i nađimo neki Hilbertov prostor K s ONB $(f_n)_n$ i surjektivan operator $T \in \mathbb{B}(K, H)$ takve da vrijedi $Tf_n = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (Uočimo da uvijek možemo uzeti $K = \ell^2$, $(f_n)_n = (e_n)_n$ i $T = U^*$, gdje je U operator analize za (x_n), no to ovdje nije bitno.) Neka je $x \in H$ proizvoljno odabran. Nađimo $y \in K$ takav da je $Ty = x$. Kako je $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, f_n \rangle f_n$, odmah slijedi $x = Ty = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, f_n \rangle x_n$. Označimo li $\lambda_n(x) = \langle y, f_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, možemo pisati $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) x_n$.

Treba uočiti da je $(\lambda_n(x))_n$ ℓ^2-niz; međutim, jer T općenito nije injekcija, rekonstrukcijski koeficijenti $\lambda_n(x)$ vektora x nisu jedinstveno određeni s x. Uobičajen, a u teorijskom pogledu najvažniji način rekonstrukcije dobivamo pomoću kanonskog dualnog baznog okvira.

Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H i neka je $U \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ pridruženi operator analize. Sjetimo se da je operator sinteze U^* definiran s $U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, $(c_n)_n \in \ell^2$. Neka je $F := U^*U \in \mathbb{B}(H)$. Ponekad se F naziva operatorom baznog okvira.

Kako je U^* surjekcija, prema lemi 9.1.11 i $\operatorname{Im} U$ je zatvoren potprostor od ℓ^2. Zato možemo pisati $\ell^2 = \operatorname{Im} U \oplus \operatorname{Ker} U^*$, a odavde zaključujemo da vrijedi $\operatorname{Im} U^* = U^*(\operatorname{Im} U \oplus \operatorname{Ker} U^*) = U^*(\operatorname{Im} U) = \operatorname{Im} U^*U$. Jer je U^* surjekcija, to pokazuje da je i U^*U surjekcija.

S druge strane, jednakosti $\operatorname{Ker} U = \{0\}$ i $\operatorname{Ker} U^*U = \operatorname{Ker} U$ pokazuju da je U^*U i injekcija. Dakle, $F = U^*U$ je regularan operator.

Osim toga, iz

$$Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ux, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, U^* e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle e_n$$

slijedi

$$Fx = U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle U^* e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \ \forall x \in H.$$

Jer je F regularan operator, za svaki $y \in H$ postoji jedinstven $x \in H$ za koji je $y = Fx$. Sad prethodni račun daje $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F^{-1}y, x_n \rangle x_n$. Jer je F hermitski, hermitski je i F^{-1} pa odavde imamo $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, F^{-1} x_n \rangle x_n$.

Stavimo $y_n = F^{-1} x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Prema korolaru 9.1.15 i niz $(y_n)_n$ je bazni okvir za H. Taj se bazni okvir naziva kanonski dualni bazni okvir za $(x_n)_n$ i za njega vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \ \forall x \in H. \tag{3}$$

Rekonstrukcijsko svojstvo baznih okvira već smo ranije konstatirali. Sad vidimo da za svaki vektor x jedan mogući izbor rekonstrukcijskih koeficijenata predstavlja niz $(\langle x, y_n \rangle)_n$ gdje je $(y_n)_n$ kanonski dualni bazni okvir polaznog baznog okvira. Još je bolja situacija s Parsevalovim baznim okvirima. Naime, ako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir, onda je U

izometrija pa je $F = U^*U = I$. Zato je ovdje $y_n = F^{-1}x_n = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i rekonstrukcijska formula (3) ovdje poprima oblik

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \ \forall x \in H. \tag{4}$$

Zaključke ovih razmatranja rezimirat ćemo u sljedećem teoremu.

Teorem 9.2.1 *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, te neka je $F = U^*U \in \mathbb{B}(H)$, gdje je U pridruženi operator analize. Tada je F regularan, niz $(y_n)_n$ definiran s $y_n = F^{-1}x_n$, $n \in \mathbb{N}$, je bazni okvir za H i za svaki $x \in H$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n$.*

Ako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H onda je $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Napomena 9.2.2 Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H. Svaki niz $(z_n)_n$ u H sa svojstvom $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle x_n$, $\forall x \in H$ naziva se dual baznog okvira $(x_n)_n$.

Navedena formulacija sugerira da bazni okvir može imati više različitih duala. Zaista, pogledajmo ONB $(e_n)_n$ u H i napeti bazni okvir $(e_1, e_1, e_2, e_2, \ldots)$. Očito je da ovdje imamo $A = B = 2$, $F = U^*U = 2I$, pa je $F^{-1} = \frac{1}{2}I$ i kanonski dualni bazni okvir je niz $(\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_2, \ldots)$. Međutim, i nizovi $(e_1, 0, e_2, 0, \ldots)$ i $(0, e_1, 0, e_2, \ldots)$ su duali za naš bazni okvir $(x_n)_n$.

I općenito je tako: kanonski dualni bazni okvir danog baznog okvira samo je jedan od njegovih duala. A da duala ima zaista različitih, pokazuje sljedeći primjer: niz koji je dual nekog baznog okvira ne mora i sam biti bazni okvir.

Primjer 9.2.3 Pogledajmo Parsevalov bazni okvir $(e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \ldots)$ za H, gdje je $(e_n)_n$ ONB za H. Niz $(e_1, \sqrt{2}e_2, 0, \sqrt{3}e_3, 0, 0, \ldots)$ je očito njegov dual, a jasno je da taj niz nije ograničen, te stoga ne može biti bazni okvir.

Naime, prema propoziciji 9.1.9 svaki bazni okvir je nužno ograničen niz. Uočimo usput da upravo ovaj primjer pokazuje da bazni okvir ne mora biti i odozdo ograničen nekom pozitivnom konstantom, čak i ako su svi njegovi članovi netrivijalni vektori.

Naredna propozicija pokazuje po čemu je kanonski dualni bazni okvir poseban među svim dualima danog baznog okvira.

Propozicija 9.2.4 *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, neka je U pridruženi operator analize i $F = U^*U$. Neka je $(z_n)_n$ dual za $(x_n)_n$. Ako postoji operator $D \in \mathbb{B}(H)$, ne nužno regularan, za koji vrijedi $z_n = Dx_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onda je $D = F^{-1}$. Drugim riječima, kanonski dualni bazni okvir je jedini dual danog baznog okvira koji nastaje djelovanjem ograničenog operatora na taj zadani bazni okvir.*

Dokaz: Neka je $z_n = Dx_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, za $D \in \mathbb{B}(H)$. Dakle, imamo $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Dx_n \rangle x_n$, za sve $x \in H$. Imamo također i $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, F^{-1}x_n \rangle x_n$, $\forall x \in H$. Ako ovu jednakost primijenimo na FD^*x dobivamo $FD^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle FD^*x, F^{-1}x_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Dx_n \rangle x_n = x$. Slijedi $FD^* = I$ i, jer je F regularan, $D^* = F^{-1}$, a kad oba operatora hermitski adjungiramo izlazi $D = F^{-1}$. □

Kanonski dualni bazni okvir je na još jedan način poseban među svim dualima zadanog baznog okvira.

Propozicija 9.2.5 *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, neka je U pridruženi operator analize i $F = U^*U$, te neka je $x \in H$. Ako za niz skalara $(c_n)_n$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, onda je $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, F^{-1}x_n\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, F^{-1}x_n\rangle - c_n|^2$. Drugim riječima, niz $(\langle x, F^{-1}x_n\rangle)_n$ ima najmanju ℓ^2-normu od svih rekonstrukcijskih nizova vektora x.*

Dokaz: Kako je i $(F^{-1}x_n)_n$ bazni okvir za H, znamo da je $(\langle x, F^{-1}x_n\rangle)_n \in \ell^2$. Uzmimo da je i $(c_n)_n \in \ell^2$ jer u protivnom tvrdnja je na trivijalan način istinita.

Označimo $\langle x, F^{-1}x_n\rangle = a_n$. Sada je

$$\langle x, F^{-1}x\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, F^{-1}x \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle F^{-1}x_n, x\rangle = \langle (a_n)_n, (a_n)_n\rangle,$$

$$\langle x, F^{-1}x\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, F^{-1}x \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle F^{-1}x_n, x\rangle = \langle (c_n)_n, (a_n)_n\rangle.$$

Usporedbom zaključujemo da je $(c_n)_n - (a_n)_n \perp (a_n)_n$ u prostoru ℓ^2 pa zato vrijedi $\|(c_n)_n\|^2 = \|(c_n - a_n)_n + (a_n)_n\|^2 = \|(c_n - a_n)_n\|^2 + \|(a_n)_n\|^2$. □

Vidjeli smo u prethodnim razmatranjima da bazni okvir općenito ima više dualnih nizova koji sami nisu nužno bazni okviri. Situacija je znatno povoljnija ako se u razmatranjima ograničimo na Besselove duale. Štoviše, tada dualnost postaje simetrična relacija.

Propozicija 9.2.6 *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H. Ako je niz $(y_n)_n$ u H Besselov i dualan za $(x_n)_n$, tada je i $(y_n)_n$ bazni okvir za H i $(x_n)_n$ je njegov dual.*

Dokaz: Označimo s U i V operatore analize nizova $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$. Prema propoziciji 9.1.8 V je ograničen operator s H u ℓ^2. Prema pretpostavci imamo $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n\rangle x_n$, $\forall x \in H$, što sada možemo zapisati kao $U^*V = I$. Odavde je i $V^*U = I$ što pokazuje da je V^* surjekcija. S obzirom da iz propozicije 9.1.9 znamo da vrijedi $y_n = V^*e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, korolar 9.1.13 sad pokazuje da je i $(y_n)_n$ bazni okvir za H. Konačno, jednakost $V^*U = I$ znači da je $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle y_n$, $\forall x \in H$, tj. da je i $(x_n)_n$ dual za $(y_n)_n$. □

Za kraj ovih razmatranja pokažimo da dani bazni okvir u stvari ima beskonačno mnogo dualnih baznih okvira (s jednim izuzetkom kojeg ćemo komentirati malo kasnije).

Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H s operatorom analize U. Kako je U odozdo ograničen, $\operatorname{Im} U$ je zatvoren potprostor od ℓ^2. Uzmimo bilo koji zatvoren direktan komplement X; dakle, imamo $\ell^2 = \operatorname{Im} U \dot{+} X$. Neka je $Q \in \mathbb{B}(\ell^2)$ pripadajući kosi projektor na $\operatorname{Im} U$: ako je $v = w + z$, $w \in \operatorname{Im} U$, $z \in X$, onda je $Qv = w$. Posebno, Q djeluje kao identitet na $\operatorname{Im} U$ pa vrijedi $QU = U$.

Pogledajmo sad operator $T = (U^*U)^{-1}U^*Q$. Prema tvrdnji zadatka 9.2.12 T je ograničen operator s ℓ^2 u H. Osim toga, T je i surjekcija. Zaista:

$$T(\ell^2) = (U^*U)^{-1}U^*Q(\ell^2) = (U^*U)^{-1}U^*Q(\operatorname{Im} U \dot{+} X) = (U^*U)^{-1}U^*Q(\operatorname{Im} U) =$$

$$(U^*U)^{-1}U^*(\operatorname{Im} U) = (U^*U)^{-1}U^*(\operatorname{Im} U \oplus \operatorname{Ker} U^*) = (U^*U)^{-1}U^*(\ell^2) = (U^*U)^{-1}(H) = H.$$

Zato je prema korolaru 9.1.13 niz $(v_n)_n$ definiran s $v_n = Te_n$, $n \in \mathbb{N}$, bazni okvir za H čiji operator analize je T^* (pa je pripadajući operator sinteze upravo T).

Sada je

$$TU = (U^*U)^{-1}U^*QU = (U^*U)^{-1}U^*U = I,$$

a to upravo znači

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle v_n, \ \forall x \in H.$$

Prema propoziciji 9.2.6 $(x_n)_n$ i $(v_n)_n$ su međusobno dualni bazni okviri.

Može se pokazati da potprostor $\operatorname{Im} U$ ima beskonačno mnogo zatvorenih direktnih komplemenata, čim je netrivijalan. Prethodna diskusija sad pokazuje da dani bazni okvir ima u tom slučaju beskonačno mnogo različitih dualnih baznih okvira. (Usput napomenimo da se dualni bazni okviri mogu parametrizirati i ograničenim operatorima s H u $(\operatorname{Im} U)^{\perp}$.)

Izuzetak očito čini klasa baznih okvira kod kojih je $\operatorname{Im} U = \ell^2$.

Definicija 9.2.7 *Niz $(x_n)_n$ je Rieszova baza Hilbertovog prostora H ako je $(x_n)_n$ bazni okvir u H čiji operator analize je surjekcija.*

Rieszove baze karakterizirane su sljedećim teoremom kojeg navodimo bez dokaza.

Teorem 9.2.8 *Za niz $(x_n)_n$ u H sljedeće su tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(a) *$(x_n)_n$ je Rieszova baza prostora H.*

(b) *Postoje Hilbertov prostor K, ONB $(b_n)_n$ za K i regularan operator $T \in \mathbb{B}(K, H)$ takvi da je $x_n = Tb_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

(c) *Niz $(x_n)_n$ je fundamentalan i postoje konstante A i B takve da za svaki $k \in \mathbb{N}$ i svaki izbor skalara $c_1, \ldots, c_k$ vrijedi*

$$A \sum_{n=1}^{k} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{k} c_n x_n \right\| \leq B \sum_{n=1}^{k} |c_n|^2.$$

Na kraju ovih uvodnih razmatranja navedimo još nekoliko jednostavnih rezultata o Parsevalovim baznim okvirima.

Propozicija 9.2.9 *Niz $(x_n)_n$ je Parsevalov bazni okvir za H ako i samo ako za svaki x iz H vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$.*

Dokaz: U jednom smjeru tvrdnja je već ranije dokazana, te je navedena u teoremu 9.2.1. Obrat trivijalno slijedi iz neprekidnosti skalarnog množenja. $\square$

Propozicija 9.2.10 *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, neka je U pridruženi operator analize i $F = U^*U$. Tada je $(F^{-\frac{1}{2}} x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H.*

Dokaz: Primijetimo najprije da je $F^{-\frac{1}{2}}$ dobro definiran ograničen, bijektivan i pozitivan operator jer je F regularan i (očito) $F \geq 0$.

Za proizvoljan $y \in H$ imamo $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, F^{-1}x_n \rangle x_n$ odakle zbog neprekidnosti operatora $F^{-\frac{1}{2}}$ slijedi $F^{-\frac{1}{2}}y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, F^{-1}x_n \rangle F^{-\frac{1}{2}}x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F^{-\frac{1}{2}}y, F^{-\frac{1}{2}}x_n \rangle F^{-\frac{1}{2}}x_n$. Jer je $F^{-\frac{1}{2}}$ bijekcija, svaki $x \in H$ je oblika $x = F^{-\frac{1}{2}}y$ za jedinstveno određeni y. Zato možemo pisati $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, F^{-\frac{1}{2}}x_n \rangle F^{-\frac{1}{2}}x_n$, $\forall x \in H$. Preostaje primijeniti prethodnu propoziciju. $\square$

Na kraju, uočimo sljedeću jednostavnu posljedicu korolara 9.1.16: ako je M zatvoren potprostor od H, ako je $(e_n)_n$ ONB za H i P ortogonalni projektor na M onda je $(Pe_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za M. Ovo možemo vidjeti i direktno.

Naime, za svaki $x \in H$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, a onda i $Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle Pe_n$. Uzmemo li sad proizvoljan $x \in M$ imamo $Px = x$ pa prethodnu jednakost možemo pisati u obliku $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Px, e_n \rangle Pe_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Pe_n \rangle Pe_n$.

Zadatak 9.2.11 Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H s operatorom analize U. Odredite operator analize kanonskog duala $((U^*U)^{-1}x_n)_n$. Nadalje, pokažite da je $(x_n)_n$ kanonski dual svog kanonskog duala.

Zadatak 9.2.12 Neka je H Hilbertov prostor, $M \leq H$ zatvoren potprostor i $X \leq H$ potprostor takav da je $H = M \dot{+} X$. Neka je Q kosi projektor na M u smjeru potprostora X. Dokažite da je Q ograničen operator ako i samo ako je X zatvoren.

Zadatak 9.2.13 Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H. Pokažite da je tada $\|x_n\| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nadalje, pokažite: ako za neki x_m vrijedi $\|x_m\| = 1$ onda je $x_m \perp x_n$, $\forall n \neq m$. Posebno, ako su svi vektori Parsevalovog baznog okvira $(x_n)_n$ normirani, onda je $(x_n)_n$ ONB.