Financijska i aktuarska matematika

Damir Bakić

i

Drago Francišković

Osijek, 2013.

Predgovor

Namjera ove skripte je dati studentima dobar pisani materijal na hrvatskom jeziku na osnovu kojeg bi mogli lakše naučiti predmetno gradivo koje obrađuje financijsku i osnove aktuarske matematike. Razlog više je nedostatak literature na hrvatskom jeziku koja se bavi aktuarskom matematikom uopće i drugačijim pristupom u financijskoj matematici.

Ova skripta je u osnovi prijevod dijelova knjiga 'An Introduction to the Mathematics of Finance' [9] i 'Life contingencies' [10] u kojima se obrađuje gradivo iz financijske i aktuarske matematike prilagođeno preddiplomskim studijskim programima.

Začetak ove skripte je materijal za učenje napravljen prema rukopisu predavanja prof. dr. sc. Damira Bakića na kolegiju Financijska matematika, kojeg je održao na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, akademske godine 2004./2005.. U prvoj fazi, izrade materijal za učenje, pri prepisivanju materijala u LaTeX, uvelike su pomogli studenti Odjela za matematiku koji su Financijsku matematiku slušali u akademskoj godini 2005./2006. na čemu im se zahvaljujem.

U cilju boljeg razumijevanja gradiva, u početnom materijalu za učenje, pojašnjen je dio teksta, dodane su neke slike i dosta komentara, prošireni su neki primjeri, detaljnije objašnjena rješenja nekih primjera i zadataka, te sistematičnije organizirani neki pododjeljci. Također je preveden i dodan pododjeljak 2.4 koji se odnosi na otplatu zajma jednakim anuitetima, kao i nekoliko primjera u pododjeljku 3.1 . Dodan je odjeljak Dodatak koji sadrži značenje osnovnih simbola i formule (sa zamjenskim funkcijama) vezanih za aktuarsku matematiku, te aktuarske tablice smrtnosti (tablice doživljenja) potrebne za rješavanje primjera i zadataka u skripti.

Uloženo vrijeme i rad na ovoj skriptu posvećeno je studentima željnjih znanja, naročito onima koji su danas magistri i doktori znanosti ili su na putu da to postanu.

Zahvaljujem se svima koji su na bilo koji način doprinijeli u stvaranju i izlasku ove skripte. Posebno se zahvaljujem recenzentima dr. sc. Tomislavu Maroševiću i dr. sc. Mireli Jukić-Bokun sa Sveučilišnog odjela za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayer u Osijeku.

mr. sc. Drago Francišković Osijek, 31.10.2013.

Sadržaj

1 Teorija kamatnih stopa

1.1 Kamatna stopa

Uzet ćemo da je jedinični vremenski interval 1 godina - u teoriji je to nebitno, a u praksi je često tako. Razmatranje započinjemo s opisom sustava u kojem se kamata isplaćuje na kraju fiksnog perioda.

Promotrimo investiciju u iznosu 1 uloženu na period od 1 godine u trenutku t; pretpostavimo da se u trenutku $t+1$ isplaćuje (odnosno vraća) iznos $1+i(t)$. Po definiciji, $i(t)$ je **kamatna stopa za jedinični vremenski period** $[t, t+1]$ (relativna kamata jediničnog kapitala za jedinični interval). Ponekad se $i(t)$ naziva i godišnja **efektivna kamatna stopa** (za razliku od nominalne kamatne stope o kojoj ćemo govoriti kasnije).

Daljnja pretpostavka je da kamatna stopa $i(t)$ ne ovisi o visini uloženog kapitala. Ako dakle uložimo iznos C, nakon jedne godine dobit ćemo $C(1+i(t))$.

Ako sada u sustavu složene kamate, u trenutku $t=0$ investiramo iznos C_0, imat ćemo u trenutku $t=n$, $n \in \mathbf{N}$ (dakle, nakon n godina)

$$C_n = C_0\,(1+i(0))\,(1+i(1))\,(1+i(2))\,\cdots\,(1+i(n-2))\,(1+i(n-1))\,, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{1.1.1}$$

Ukoliko je naša efektivna kamatna stopa konstantna u vremenu, gornji izraz prelazi u

$$C_n = C_0(1+i)^n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{1.1.2}$$

C_n se zove **akumulacija** od C_0 za n godina po godišnjoj kamatnoj stopi i .

1.2 Nominalne kamatne stope

Ponovo, i ovdje i kasnije, uzimamo da je vremenska jedinica 1 godina. Želimo promatrati transakcije u trajanju $h > 0$ vremenskih jedinica pri čemu h nije nužno cijeli broj.

Promotrimo period $[t, t+h]$. Uz pretpostavku da kamatna stopa ne ovisi o visini investiranog kapitala, gledamo povrat na depozit u trenutku t u iznosu 1 (tj. $C_t = 1$), a sve ostale veličine dobivamo proporcionalno.

Neka depozit u iznosu 1 investiran u trenutku t u trenutku $t+h$ vrijedi $A(t, t+h)$.[1] Pišemo

$$A(t, t+h) = 1 + h\, i_h(t)\,, \tag{1.2.1}$$

a broj $i_h(t)$ zovemo (godišnja) **nominalna kamatna stopa** u trenutku t za transakciju na intervalu $[t, t+h]$.

Drugim riječima, definirali smo

$$i_h(t) = \frac{A(t, t+h) - 1}{h}\ . \tag{1.2.2}$$

Za $h = 1$ očito je nominalna kamatna stopa ista kao efektivna kamatna stopa $i(t)$ za godinu $[t, t+1]$. Vrijedi dakle

$$i_1(t) = i(t)\,. \tag{1.2.3}$$

[1] Proporcionalno, investicija u iznosu C_t investirana u trenutku t, u trenutku $t+h$ vrijedi $C_{t+h} = C_t\, A(t, t+h)$.

U praksi su često kamatne stope, odnosno akumulacije $A(t, t+h)$ neovisne o vremenu, tj. o t. Tada pišemo

$$i_h(t) = i_h, \quad \forall t \,. \tag{1.2.4}$$

U tom slučaju, u konkretnim situacijama za $h < 1$, često ćemo imati $h = \dfrac{1}{p}$ gdje je $p \in N$.
Na primjer, ako gledamo polugodišnje, kvartalne, mjesečne ili dnevne transakcije imat ćemo redom, $h = \dfrac{1}{2}$, $h = \dfrac{1}{4}$, $h = \dfrac{1}{12}$, $h = \dfrac{1}{365}$.
Običaj je u slučajevima $h = \dfrac{1}{p}$, gdje je p prirodan broj, pisati

$$i_{\frac{1}{p}} = i^{(p)}\,, \quad p \in \mathbf{N} \,. \tag{1.2.5}$$

Istaknimo, ovo je samo oznaka, u slučaju $h = \dfrac{1}{p}$ formula (1.2.1) kaže da investicija u iznosu 1 položena u bilo kojem trenutku po isteku $\dfrac{1}{p}$ godine daje povrat

$$1 + \frac{1}{p}\, i^{(p)} \,. \tag{1.2.6}$$

Kaže da je $i^{(p)}$ **(godišnja) nominalna kamatna stopa plativa ili konvertibilana** p **puta godišnje**.

1.3 Akumulacijski faktor

Zamislimo da se prati (u prošlosti) ili prognozira (u budućnost) povrat koji investicije daju u raznim vremenskim intervalima; ovdje dakle ne polazimo od unaprijed zadane kamatne stope (k.s.), nego samo pratimo ili prognoziramo realizirane povrate.

Za $t_1 \leq t_2$ definiramo veličinu $A(t_1, t_2)$ kao akumulaciju (tj. povrat) u trenutku t_2 koju proizvodi jedinični kapital (depozit u iznosu 1) investiran u trenutku t_1. Kažemo da je t_1 trenutak investicije, a t_2 trenutak dospijeća.
Prema formuli (1.2.1), vrijedi

$$A(t, t+h) = 1 + h\, i_h(t) \,.$$

Po definiciji uzimamo da je $A(t,t) = 1, \forall\, t$. Istaknimo, veličine $A(t, t+h)$ smatramo poznatima (odnosno predvidivima) $\forall\, t, h$. $A(t, t+h)$ je **akumulacijski faktor** na $[t, t+h]$.
Za iznos $C(t_1)$ investiran u t_1, akumulacija u t_2 je

$$C(t_2) = C(t_1)\; A(t_1, t_2) \,, \tag{1.3.1}$$

tj. vrijedi **proporcionalnost**, a koeficijent proporcionalnosti je akumulacijski faktor.

Uzmimo sada $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ i promotrimo investiciju u iznosu 1 u trenutku t_0. U trenutku t_2 imamo $A(t_0, t_2)$. S druge strane, ako akumulirani iznos u trenutku t_1, a to je $A(t_0, t_1)$, povučemo i onda reinvestiramo, u trenutku t_2 dobit ćemo iznos $A(t_0, t_1)A(t_1, t_2)$. U konzistentnim tržištima ovo se mora podudarati. Zato uzimamo da je

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2), \quad \forall\, t_0 \leq t_1 \leq t_2. \quad (\textbf{princip konzistencije}) \,. \tag{1.3.2}$$

Indukcijom lagano slijedi

$$A(t_0,t_n) = A(t_0,t_1)A(t_1,t_2)\cdots A(t_{n-1},t_n), \quad \forall\, t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n,\ n \in \mathbf{N}. \tag{1.3.3}$$

Od sada na dalje ćemo pretpostavljati da tržište zadovoljava ovaj uvjet (no može se primijetiti da u praksi zapravo nije tako zbog poreza, administrativnih troškova i sl.).

Uzmimo sada fiksnu godišnju efektivnu kamatnu stopu $i = konst.$ (dakle i je neovisno o t). Izračunat ćemo odgovarajuće nominalne kamatne stope uz pomoć principa konzistencije. Fiksirajmo $p \in \mathbf{N}$ i nađimo $i^{(p)}$. Gledamo vremenski interval $[0,1]$. Prema (1.2.1) imamo

$$A\left(t, t+\frac{1}{p}\right) = 1 + \frac{1}{p}\, i^{(p)}, \quad \forall t.$$

Zato je

$$A\left(0, \frac{1}{p}\right) = 1 + \frac{1}{p}\, i^{(p)} = A\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right) = A\left(\frac{2}{p}, \frac{3}{p}\right) = \cdots = A\left(\frac{p-1}{p}, 1\right)$$

i onda princip konzistencije (1.3.2) daje

$$\left(1 + \frac{1}{p} i^{(p)}\right)^p = A\left(0, \frac{1}{p}\right) A\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right) \cdots A\left(\frac{p-1}{p}, 1\right) = A(0,1) = 1 + i_1 \overset{(1.2.3)}{=} 1 + i.$$

Dokazali smo dakle

$$\left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^p = 1 + i, \tag{1.3.4}$$

odnosno za slučaj konstantne k.s. imamo vezu između nominalne i efektivne kamatne stope

$$i^{(p)} = p\left((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right). \tag{1.3.5}$$

Kažemo da je efektivna kamatna stopa (e.k.s.) i ekvivalentna (tj. da odgovara) nominalnoj k.s. $i^{(p)}$ i obratno. Iz prethodnog slijedi da je

$$A\,(t, t+h) = (1+i)^h.$$

Pokažimo da je $i > i^{(p)}$, $\forall p > 1$. Binomna formula primijenjena na (1.3.4) daje

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{i^{(p)}}{p}\right)^k 1^{p-k} = 1 + p\,\frac{i^{(p)}}{p} + \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{i^{(p)}}{p}\right)^k \ \ge\ 1 + i^{(p)}.$$

Dakle je,

$$i^{(p)}\ <\ i, \quad \forall\, p > 1 \quad (\text{odnosno},\ \ \forall p \ge 2)\,. \tag{1.3.6}$$

Primjer 1.3.1. *Neka je efektivna godišnja kamatna stopa* $i = 6\%$. *Tada imamo sljedeće vrijednosti za* i^p

p	1	2	3	4	6	12
i^p	0.06000	0.05913	0.05884	0.05870	0.05855	0.05841

.

Primjer sugerira da općenito vrijedi

$$i = i^{(1)} > i^{(2)} > i^{(3)} > \dots \qquad ;$$

ovo je zaista točno i dokazat ćemo to u sljedećoj točki (vidi Primjer 1.4.2).

Primjer 1.3.2.

(a) Nađite ekvivalentnu godišnju efektivnu kamatnu stopu za nominalnu godišnju kamatnu stopu 4% plativu tromjesečno.

(b) Izračunajte iznos na koji se akumulira investicija u iznosu 100 po nominalnoj godišnjoj kamatnoj stopi 6% s trajanjem $\frac{1}{2}$ godine. Kolika ja ekvivalentna godišnja efektivna kamatna stopa?

Rješenje:

(a) $h = \frac{1}{4}, p = 4, i^{(4)} = 0.04 \overset{(1.3.4)}{\Longrightarrow} i = \left(1 + \frac{0.04}{4}\right)^4 - 1 = 0.0406$, tj. $i = 4.06\%$

(b) $h = \frac{1}{2}, p = 2, i^{(2)} = 0.06$ pa se akumulira

$$100\,A\left(0, \frac{1}{2}\right) \overset{(1.2.1)}{=} 100(1 + \frac{1}{2}0.06) = 103.$$

Nadalje je $i = (1 + \frac{0{,}06}{2})^2 - 1 = 1{,}03^2 - 1 = 0{,}0609$, tj. $i = 6{,}09\%$.

◇

1.4 Intenzitet kamata

U prošloj točki vidjeli smo da pomoću akumulacijskih faktora $A(t_1, t_2)$ definiramo veličinu $i_h(t)$ (vidi (1.2.2)). Razumno je pretpostaviti da postoji

$$\delta(t) := \lim_{h \to 0+} i_h(t)\,. \tag{1.4.1}$$

Ova veličina se zove **intenzitet kamate u trenutku** t (puni naziv bi bio intenzitet kamate po jedinici vremena u trenutku t). Vrijedi

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{A(t, t+h) - 1}{h}\,. \tag{1.4.2}$$

Kao primjer promotrimo najprije slučaj fiksne efektivne kamatne stope i. U tom slučaju za, $h = 1/p$, imamo prema (1.3.5) $i^{(p)} = p\left((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right)$; sjetimo se da je $i^{(p)}$ zapravo $i_{\frac{1}{p}}$. Dalje, po definiciji je jasno da će ovdje biti $\delta(t) = const. = \delta$. Da ga nađemo, ovdje ćemo gledati $\lim\limits_{p \to \infty} i^{(p)}$.

$$\delta = \lim_{p \to \infty} i^{(p)} = \lim_{p \to \infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}} - (1+i)^0}{\frac{1}{p}} = \left|\text{ definicija derivacije od } (1+i)^x \right| = \Big((1+i)^x\Big)'_{x=0} \quad .$$

Slijedi $\delta = \ln(1+i)$, odnosno

$$e^{\delta} = 1 + i\,. \tag{1.4.3}$$

$r = 1 + i$ se često naziva **dekurzivni kamatni faktor**. (Pitanje: Da li vrijedi $\delta(t) = \ln(1+i(t))$? Zašto?)

Teorem 1.4.1. *Ako su $\delta(t)$ i $A(t_0, t)$ neprekidne funkcije u varijabli $t \in [t_0, \infty)$ te ako je na snazi princip konzistencije (1.3.2), (1.3.3), onda*[2] *je*

$$A(t_1, t_2) = \exp\Big(\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt\Big), \quad \forall\ t_2 \geq t_1 \geq t_0\ . \tag{1.4.4}$$

Dokaz: Definirajmo funkciju $f(t) = A(t_0, t)$ (što je akumulacija investicije u iznosu 1 u periodu $[t_0, t]$). Primijetimo da vrijedi

$$A(t_0, t+h) = A(t_0, t) \cdot A(t, t+h) \implies A(t, t+h) = \frac{f(t+h)}{f(t)}$$

pa zato imamo

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \lim_{h\to 0+} \frac{A(t, t+h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\frac{f(t+h)}{f(t)} - 1}{h} = \frac{1}{f(t)} \lim_{h\to 0+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
&\quad \text{(koristimo obje pretpostavke o neprekidnosti)} \\
&= \frac{1}{f(t)} f(t)' = \frac{d}{dt}\Big(\ln f(t)\Big).
\end{aligned}$$

Dakle je $\delta(t) = \frac{d}{dt}\Big(\ln f(t)\Big)$. Integracijom od t_1 do t_2 slijedi

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt = \ln f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \ln f(t_2) - \ln f(t_1) = \ln \frac{f(t_2)}{f(t_1)} \implies \frac{f(t_2)}{f(t_1)} = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}\ .$$

Na kraju, lijeva strana po principu konzistencije je upravo $A(t_1, t_2)$. □

U prethodnom dokazu se vidi da $A(t_0, t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d}{dt} A(t_0, t) = \delta(t)\, A(t_0, t), \tag{1.4.5}$$

tj. da je $\delta(t) = \dfrac{A'(t_0, t)}{A(t_0, t)}$, što znači da je $\underline{\delta(t)\text{ brzina kapitalizacije jediničnog kapitala}}$ (brzina akumulacije po jedinici kapitala) u trenutku t.

Iz (1.3.1), za $t_1 = t_0\,, t_2 = t$ i (1.4.5) slijedi da je

$$C'(t) = \delta(t)\, C(t)\,. \tag{1.4.6}$$

Koristeći ovaj teorem formulu (1.2.2) možemo pisati kao

$$i_h(t) = \frac{\exp\Big(\displaystyle\int_{t}^{t+h} \delta(s)ds\Big) - 1}{h}. \tag{1.4.7}$$

[2] Vrijedi i obrat. Vidi [8] str.7.

Posebno, za $h = 1$ imamo $i_1(t) = i(t)$ što je efektivna kamatna stopa za godinu $[t, t+1]$. Slijedi

$$i(t) = \exp\Big(\int_t^{t+1} \delta(s)ds\Big) - 1\,. \tag{1.4.8}$$

Ovo je u skladu i sa zdravim razumom; naime, teorem nam kaže da je prvi član s desne strane upravo akumulacija $A(t, t+1)$, tj. akumulacija investicije u iznosu 1 u periodu $[t, t+1]$, a to po definiciji znači $1 + i(t)$.

Iz (1.4.8) slijedi da ako je $\delta(s) = \delta(t), \forall s \in [t, t+1]$, onda je $\delta(t) = \ln(1 + i(t))$. Dalje, kada je $\delta(t) = \delta$, $\forall t$ (tako je npr. u slučaju fiksne efektivne kamatne stope i), onda teorem daje

$$A(t_0, t_0 + n) = \exp\Big(\int_{t_0}^{t_0+n} \delta dt\Big) = e^{n\delta},\ \forall\, t, n\, \in \mathbb{R},\, n \geq 0. \tag{1.4.9}$$

Posebno, za $n = 1$ izraz na lijevoj strani je $1 + i$ te je zato $1 + i = e^{\delta}$.
Sada formula (1.4.9) daje

$$A(t_0, t_0 + t) = e^{t\delta} = (e^{\delta})^t = (1 + i)^t,\quad \forall t \geq 0, \tag{1.4.10}$$

što znači da formula iz uvoda (1.1.2) (povrat $C_n = C_0(1 + i)^n$) vrijedi i za *realne brojeve* n!

Primjer 1.4.1. *Neka je* $\delta(t) = 0.12$ *(vrijeme se mjeri u godinama). Treba naći nominalnu godišnju kamatnu stopu na depozite za vremenski period od*

(a) 7 dana, *(b) 1 mjesec,* *(c) 6 mjeseci.*

Rješenje: Formula (1.4.7) daje

$$i_h(t) = i_h = \frac{1}{h}\Big(e^{\delta h} - 1\Big) = \frac{1}{h}\Big(e^{0.12\cdot h} - 1\Big).$$

Supstituiramo redom $h = \frac{7}{365}$, $h = \frac{1}{12}$, $h = \frac{1}{2}$ i dobivamo 0.120138, 0.120602, 0.123673 (još uočimo da je ovdje prema (1.4.3) $i = 12.7497\%$). ◇

Primjer 1.4.2. *Neka je dana konstantna efektivna godišnja kamatna stopa* $i > 0$. *Pokažimo da vrijedi*

$$i > i^{(2)} > i^{(3)} > i^{(4)} > \cdots .$$

Rješenje: Sjetimo se da je prema (1.3.5) $i^p = p((1 + i)^{1/p} - 1)$. No, i ovdje je primjenjiva formula (1.4.7) $i_h = \frac{1}{h}(\exp(\int_t^{t+h} \delta(s)ds) - 1)$. Međutim, kako je u ovom slučaju $\delta(s) = \delta \overset{(1.4.3)}{=} \ln(1 + i)$; kad uvažimo $h = \frac{1}{p}$ dobije se

$$i^{(p)} = i_{\frac{1}{p}} = p\,(e^{\frac{1}{p}\delta} - 1) = p\,((1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1),$$

kako i mora biti.

Općenito je ovdje za bilo koji h $i_h = \frac{1}{h}(e^{\delta\, h} - 1)$. Promotrimo funkciju $f(x) = x(e^{\delta/x} - 1), x > 0$ gdje je $\delta > 0$ konstanta. Dokazat ćemo da je funkcija f padajuća. To će za posljedicu imati

$$m > p \quad\Longrightarrow\quad f(m) < f(p) \quad\overset{(*)}{\Longrightarrow}\quad i^{(m)} < i^{(p)},$$

drugim riječima

$$i = i^{(1)} > i^{(2)} > i^{(3)} > i^{(4)} > \cdots . \qquad (1.4.11)$$

Preostaje vidjeti da f zaista pada na $(0, \infty)$. Kako je

$$f'(x) = e^{\delta/x} - 1 - x\frac{\delta}{x^2}e^{\frac{\delta}{x}} = e^{\frac{\delta}{x}}(1 - \frac{\delta}{x}) - 1,$$

sada je dovoljno vidjeti da je $f'(x) < 0$. Supstituirajući $\frac{\delta}{x} \longleftrightarrow y$ što je bijekcija u $\mathbf{R}^+$ u $\mathbf{R}^+$ jer $\delta > 0$, dobijemo funkciju $g(y) = e^y(1-y) - 1 < 0$. Sada je $e^y(1-y) - 1 < 0 \Longleftrightarrow 1 - y < e^{-y}$, a ovo je evidentno $\forall y > 0$. $\diamond$

Primjer 1.4.3. *Banka posluje s akumulacijskim faktorima baziranim na promjenjivom intenzitetu kamate. Na dan 1.7.2000. klijent je položio depozit u iznosu od 50000. Dana 1.7.2002. depozit je narastao na 59102. Pretpostavimo da je godišnji intenzitet kamate tijekom tog vremenskog razdoblja bio linearna funkcija. Odredite intenzitet kamate na dan 1.7.2001.!*

Rješenje: Kao u dokazu teorema definirajmo $f(t) = A(t_0, t)$; i imamo $\delta(t) = (\ln f(t))' = \frac{1}{f(t)}f(t)'$. Odavde je

$$\ln f(t) = \int_{t_0}^{t} \delta(s)ds \qquad (1.4.12)$$

(ovo je samo parafraza formule (1.4.4) iz teorema). Ako sada iskoristimo pretpostavku da je $\delta(s)$ linearna funkcija, onda zadnja formula direktno pokazuje da je $\ln f(t)$ kvadratna funkcija.

Zamislimo sada proizvoljnu kvadratnu funkciju $g(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma,\ t\epsilon[a-h, a+h]$. Vrijedi

$$g'(a) = \frac{1}{2h}(g(a+h) - g(a-h)),$$

dakle vrijednost derivacije kvadratne funkcije u sredini nekog intervala je razlika vrijednosti na krajevima podijeljene s dužinom intervala. Zaista, $g'(t) = 2\alpha t + \beta$ pa je $g'(a) = 2\alpha a + \beta$, a s druge strane je (lako se vidi) $\frac{1}{2h}(g(a+h) - g(a-h)) = \cdots = 2\alpha a + \beta$.
Sada je naša funkcija $\ln f(t) = g(t)$, znamo da je kvadratna, a promatrane vremenske točke su $0, 1, 2$ (dakle vrijeme $t = 0$ počnemo mjeriti na dan 1.7.2000.). Nama treba $\delta(1) = \Big(\ln f(t)\Big)'_{t=1}$, a poznajemo $\ln f(0)$ i $\ln f(2)$. Dakle je

$$\delta(1) = \frac{1}{2}(\ln f(2) - \ln f(0)) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{59102}{50000}\right) = 0.083621.$$

$\diamond$

Primjedba. *Ponekad ćemo promatrati i po dijelovima neprekidne funkcije kao npr.*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0,06\,,\ t < 5 \\ 0,04\,,\ t \geq 5\ . \end{cases}$$

Pokazuje se (ali to ovdje nećemo učiniti) da i u takvim slučajevima vrijede i Teorem 1.4.1 i sve navedene formule.

1.5 Sadašnje vrijednosti

Neka je $t_1 < t_2$. U Teoremu 1.4.1 smo dokazali $A(t_1, t_2) = \exp\big(\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt\big)$. Posebno, to znači da depozit u iznosu $\frac{C}{A(t_1,t_2)} = C\exp\big(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt\big)$ investiran u trenutku t_1, naraste u trenutku t_2 do iznosa C.

Kažemo da je

$$C\exp\Big(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt\Big) \tag{1.5.1}$$

diskontirana vrijednost u trenutku t_1 iznosa C koji dospijeva u trenutku t_2. Posebno, diskontirana vrijednost u trenutku $t = 0$ ("sada") zove se **sadašnja vrijednost**, i iznosi:

$$C\exp\Big(-\int_{0}^{t} \delta(s)ds\Big) \tag{1.5.2}$$

(Puno ime: **sadašnja vrijednost iznosa C koji dospijeva u trenutku t**).

Definirajmo funkciju koja mjeri sadašnje vrijednosti iznosa 1

$$v(t) = \exp\Big(-\int_0^t \delta(s)ds\Big) = \frac{1}{A(0,t)}, \qquad t \geq 0. \tag{1.5.3}$$

Primijetimo da gornja formula ima smisla i za $t < 0$. Zaista, tada je

$$v(t) = \exp\Big(-\int_0^t \delta(s)ds\Big) = \exp\Big(\int_t^o \delta(s)ds\Big),$$

što točno po teoremu predstavlja akumulaciju od 1 u intervalu $[t, 0]$.

Uz ovako uvedenu funkciju $v(t)$ formulu (1.5.2) možemo pisati kao

$$C\,v(t), \quad t \geq 0 \tag{1.5.4}$$

i istaknimo još jednom: $v(t)$ je sadašnja vrijednost iznosa 1 koji dospijeva u trenutku t.

U specijalnom slučaju kad je $\delta(t) = const = \delta$ (dakle kad je efektivna kamatna stopa konstantna, tj. $i(t) = i$) imamo

$$v(t) = e^{-\delta t} = (e^{-\delta})^t\,. \tag{1.5.5}$$

Uvedemo li veličinu v (**diskontni faktor**) formulom

$$v = v(1) = e^{-\delta} = \frac{1}{1+i} \tag{1.5.6}$$

prethodna formula prelazi u

$$v(t) = v^t, \quad t \geq 0. \tag{1.5.7}$$

Primjer 1.5.1. *Neka je* $\delta(t) = 0.06 \cdot 0.9^t$, $\forall t$. *Ukoliko je* $t_0 = 0$, *traži se sadašnja vrijednost iznosa* $C = 100$ *koji dospijeva nakon* 3.5 *godine.*

Rješenje:

$$v(t) = \exp\Big(- \int_0^t 0.06 \cdot 0.9^s ds\Big) = \ exp\big(- 0.06 \cdot \frac{1}{\ln 0.9}(0.9^t - 1)\big).$$

Posebno, $v(3.5) = 0.838927$ i tražena vrijednost iznosi 83.89. ◇

1.6 Stoodleyjeva formula

Ponekad je moguće $\delta(t)$ aproksimirati funkcijom oblika

$$\delta(t) = p + \frac{s}{1 + re^{st}} \tag{1.6.1}$$

pri čemu se parametri p, r, s trebaju odabrati tako da rezultirajući intenzitet kamate dovoljno dobro slijedi praksu. Više o tome se može naći u (J.J. McCutcheon [9], Some remarks on Stoodly's formule).

Neka je $\delta(t)$ kao gore. Tada imamo

$$\begin{aligned}
v(t) &= \exp\Big(- \int_0^t \delta(y)dy\Big) \\
&= \exp\Big(- \int_0^t (p + \frac{s}{1 + re^{sy}})dy\Big) \\
&= \exp\Big(- \int_0^t (p + s - \frac{rse^{sy}}{1 + re^{sy}})dy\Big) \\
&= \exp\Big(- \Big[(p + s)y - \ln(1 + re^{sy})\Big]_0^t\Big) \\
&= \exp\Big(- (p + s)t + \ln(1 + re^{st}) - \ln(1 + r)\Big) \\
&= \exp\Big(- (p + s)t + \ln\frac{1 + re^{st}}{1 + r}\Big) \\
&= e^{-(p+s)t} \cdot \frac{1 + re^{st}}{1 + r} \\
&= \frac{1}{1 + r}e^{-(p+s)t} + \frac{r}{1 + r}e^{-pt} \qquad (1.6.2)
\end{aligned}$$

Uvedimo veličine $v_1 = e^{-(p+s)}$, $v_2 = e^{-p}$ (što su diskontni faktori koji odgovaraju konstantnim intenzitetima kamate $\delta = p + s$, i $\delta = p$). Sada je

$$v(t) = \frac{1}{1 + r}\, v_1^t + \frac{r}{1 + r}\, v_2^t, \tag{1.6.3}$$

što objašnjava ideju u pozadini. Funkcija $v(t)$, uvedena formulom (1.5.3) kojom se računaju sadašnje vrijednosti, ovdje je težinski prosjek s ponderima $\frac{1}{1+r}$, $\frac{r}{1+r}$ dviju takvih funkcija koje dolaze od konstantnih intenziteta kamate $\delta = p + s$ i $\delta = p$.

1.7 Sadašnje vrijednosti tokova novca

U mnogim problemima je potrebno odrediti sadašnju vrijednost višekratnih novčanih uplata i isplata - često se kaže tokova novca, koje se imaju izvršiti u budućnosti. Razlikujemo dva slučaja.

1.7.1 Diskretni tokovi novca

Sadašnja vrijednost iznosa $C_1, ...C_n$ koji dospijevaju u trenucima $t_1, ...t_n$, $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ očito iznosi

$$C_1 v(t_1) + C_2 v(t_2) + ... + C_n v(t_n) = \sum_{j=1}^{n} C_j v(t_j) \ , \tag{1.7.1}$$

kada je $C_j > 0$ radi se o uplati, a za $C_j < 0$ o isplati.

U slučaju beskonačno mnogo transakcija (isplata ili uplata) sadašnja vrijednost je

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j v(t_j), \tag{1.7.2}$$

s tim da red treba konvergirati (što će u praksi uvijek i biti slučaj).

1.7.2 Neprekidni tokovi novca

Ovaj koncept je zapravo sasvim teorijski. Riječ je o matematičkoj idealizaciji, no ona ima primjenu u praksi i može se primijeniti kad se radi o vrlo frekventnim isplatama.

Pretpostavimo da je $T > 0$ i da se u vremenskom intervalu $[0, T]$ novac isplaćuje kontinuirano. Označimo s $\rho(t)$ **stopu isplate** (uplate) po jedinici vremena (dakle u našem dogovoru $\rho(t)$ je godišnja stopa isplate) u trenutku t.
Objasnimo prvo pojam 'stopa isplate'. Stopa isplate u trenutku t je ustvari brzina isplate u trenutku t. Analogija je s brzinom pri prelasku neke udaljenost ili s brzinom punjenja bazena.

Neka $M(t)$ označava ukupnu isplatu u intervalu $[0, t]$. Zamislimo da je to derivabilna funkcija. Definiramo

$$\rho(t) = M'(t), \quad \forall t. \tag{1.7.3}$$

Sada uzmimo da je $0 \leq \alpha < \beta \leq T$. Ukupna izvršena isplata u intervalu $[\alpha, \beta]$ je

$$M(\beta) - M(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} M'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)dt\,. \tag{1.7.4}$$

Ako je $\rho(t)$ neprekidna funkcija (dovoljno je i po dijelovima neprekidna), onda možemo rezonirati ovako: između t i $t+dt$ ukupna isplata je $M(t+dt)-M(t)$. Ako je dt vrlo malen, onda je isplata približno $M'(t)dt$, odnosno $\rho(t)dt$. Teoretski je dakle sadašnja vrijednost isplate u intervalu $[t, t + dt]$ dana s $v(t)\rho(t)dt$. Ukupna sadašnja vrijednost neprekidne isplate/uplate je zato

$$\int_{0}^{T} v(t)\rho(t)dt, \tag{1.7.5}$$

odnosno

$$\int_0^\infty v(t)\rho(t)dt \tag{1.7.6}$$

(pod uvjetom da integral konvergira).
Općenito, sve isplate ne moraju biti pozitivne (istosmjerne). U tom općem slučaju je sadašnja vrijednost zapravo razlika odgovarajućih suma, odnosno integrala.

Neka je $C(t)$ iznos kapitala u trenutku t, onda se njegova vrijednost na $[t, t+dt]$ povećava za $\delta(t)C(t)dt + M'(t)dt$ ($\delta(t)C(t)dt$ dolazi od ukamaćivanja, a $M'(t)dt$ od isplate/uplate), odnosno C zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$C'(t) = \delta(t)C(t) + \rho(t)\,. \tag{1.7.7}$$

Primjer 1.7.1. *Neka je*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0,04\,,\ t < 10 \\ 0,03\,,\ t \geq 10 \end{cases}.$$

Treba izračunati sadašnju vrijednost kontinuiranih isplata koje će se vršiti kroz 15 godina počevši od sada ($t = 0$) po konstantnoj godišnjoj stopi isplate 1. Kolika je ukupna isplata na tom intervalu?

Rješenje: Ovdje je $\rho(t) = 1$, $\forall t \in [0, 15]$. Po definiciji (1.5.3) imamo

$$v(t) = \exp(-\int_0^t \delta(s)ds), \quad t \geq 0.$$

Sada je

$$t < 10 \implies v(t) = \exp(-\int_0^t 0.04ds) = e^{-0.04t},$$

$$t \geq 10 \implies v(t) = \exp(-\int_0^{10} \delta(s)ds - \int_{10}^t \delta(s)ds) = \exp(-0.4 - (t-10)0.03) = e^{-0.1-0.03t}.$$

Odavde je tražena sadašnja vrijednost prema (1.7.5)

$$\begin{aligned}
\int_0^{15} v(t)\rho(t)dt &= \int_0^{10} v(t)\cdot 1\,dt + \int_{10}^{15} v(t)\cdot 1\,dt \\
&= \int_0^{10} e^{-0.04t}dt + e^{-0.1}\int_{10}^{15} e^{-0.03t}dt \\
&= \frac{1-e^{-0.4}}{0.04} + e^{-0.1}\frac{e^{-0.3}-e^{-0.45}}{0.03} \\
&= 8.242 + 3.112 = 11.3543.
\end{aligned}$$

Ukupna isplata, prema (1.7.4), je

$$M(15) - M(0) = \int_0^{15} \rho(t)dt = 15.$$

◇

1.8 Vrednovanje tokova novca

Uzmimo u razmatranje dvije vremenske točke t_1 i t_2. Vrijednost u trenutku t_1 iznosa C koji dospijeva u trenutku t_2 je:

(a) ako je $t_1 < t_2$: $\quad C\exp\big(-\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt\big)$;

(b) ako je $t_1 \geq t_2$ onda se zapravo radi o akumulaciji u intervalu $[t_2, t_1]$ iznosa C; dakle uplaćenog u t_2, gledano u t_1; rezultat je dan teoremom kao $C\exp\big(\int_{t_2}^{t_1}\delta(t)dt\big)$, a primjenom uobičajene konvencije to opet možemo pisati kao $C\exp\big(-\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt\big)$.

Sve zajedno: neovisno o odnosu t_1 i t_2, vrijednost iznosa C, računata u trenutku t_1, koji dospijeva u trenutku t_2 je

$$C\exp\Big(-\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt\Big). \tag{1.8.1}$$

To možemo izraziti i preko sadašnjih vrijednosti. Kako je

$$\int_0^{t_1}\delta(t)dt + \int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt = \int_0^{t_2}\delta(t)dt,$$

bilo t_1 manji ili veći od t_2, imamo

$$\begin{aligned} C\exp\Big(-\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt\Big) &= C\exp\Big(-\int_0^{t_2}\delta(t)dt + \int_0^{t_1}\delta(t)dt\Big) \\ &= C\exp\Big(-\int_0^{t_2}\delta(t)dt\Big)\cdot\frac{1}{\exp\Big(-\int_0^{t_1}\delta(t)dt\Big)} \\ &= C\frac{v(t_2)}{v(t_1)}, \end{aligned} \tag{1.8.2}$$

što predstavlja **vrijednost u trenutku t_1 iznosa C koji dospijeva u t_2.**

Ovo sada možemo kombinirati s rezultatima prethodne točke da izračunamo vrijednost tokova novca, ne u trenutku 0 (sadašnjem), već u trenutku t_a. Rezultat je:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j\frac{v(t_j)}{v(t_a)}, \tag{1.8.3}$$

odnosno

$$\int_0^{T(\infty)}\rho(t)\frac{v(t)}{v(t_a)}dt \tag{1.8.4}$$

i to vrijedi za svaki t_a, bio on prije, poslije, ili u toku (između) pojedinih transakcija. Očito, kad je $t_a = 0$, dobiju se sadašnje vrijednosti.

Alternativni pogled: ako znamo sadašnje vrijednosti koje smo izračunali u prethodnoj točki, stavljajući $t_2 = 0$, $t_1 = t_a$ dobijemo gornje izraze (jer je $v(0) = 1$, po definiciji, (1.5.3)).

Obje gornje formule možemo iščitati i na sljedeći način:

$$\begin{pmatrix} \text{Vrijednost toka novca} \\ \text{u trenutku } t_a \end{pmatrix} = \frac{1}{v(t_a)} \cdot \begin{pmatrix} \text{Sadašnja vrijednost} \\ \text{toka novca} \end{pmatrix} \tag{1.8.5}$$

analogno,

$$\Big(\text{Vrijednost toka novca u trenutku } t_b\Big) = \tfrac{1}{v(t_b)} \cdot \Big(\text{Sadašnja vrijednost toka novca}\Big),$$

iz čega slijedi:

$$v(t_a) \cdot \begin{pmatrix} \text{Vrijednost} \\ \text{toka novca u} \\ \text{trenutku } t_a \end{pmatrix} = v(t_b) \cdot \begin{pmatrix} \text{Vrijednost} \\ \text{toka novca u} \\ \text{trenutku } t_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Sadašnja} \\ \text{vrijednost} \\ \text{toka novca} \end{pmatrix}. \tag{1.8.6}$$

Primjer 1.8.1. *Dužni smo platiti 1000 na dan 1.1.2006., dana 1.1.2007. daljnjih 2500, te dana 1.7.2007. završnih 3000. Uz konstantan iznos intenziteta kamata $\delta = 0.06$ treba naći vrijednost ovih isplata 1.1.2004., te 1.3.2005.*

Rješenje: (Ovo se može interpretirati i kao štednja u banci uz fiksnu kamatnu stopu.) Vrijeme počnemo mjeriti 1.1.2004., naravno u godinama. Ovdje je

$$v(t) = \exp\Big(-\int_0^t \delta(s)ds\Big) = e^{-0.06\,t}.$$

Zato je vrijednost na dan 1.1.2004, tj. u času t_0, dakle, sadašnja, prema (1.7.1)

$$1000 \cdot (v(2)) + 2500 \cdot (v(3)) + 3000 \cdot (v(3.5)) = 5406.85.$$

Prema (1.8.5) vrijednost tog istog toka je u $t = \frac{14}{12}$ dana kao

$$(\text{sad. vr.}) \cdot \frac{1}{v(\frac{14}{12})} = 5798.89.$$

$\diamond$

Primjedba. *Rezultati ove točke omogućuju mijenjanje trenutka vrednovanja. U praktičnim problemima to često u startu činimo prikladnim izborom "sadašnjeg trenutka", (u ovom primjeru 1.1.2004.) no to možemo samo kada je δ, odnosno i vremenski invarijantno (tj. konstantno).*

Primjer 1.8.2. *Neka je $\delta(t)$ dan Stoodleyevom formulom uz $p = 0.076961$, $r = 0.5$, $s = 0.12189$.*

(a) Koliko treba uplatiti u $t = 10$, da bi u $t = 20$ vrijedilo 30000?

(b) Koliki je akumulirani iznos nakon 10 godina serije od 10 godišnjih uplata po 1000, koje se uplaćuju na početku svake godine, prva u $t = 0$?

Rješenje: Imamo $\delta(t) = p + \dfrac{s}{1 + r\,e^{st}}$, a izračunali smo da je tada

$$v(t) = \frac{1}{1+r}\,v_1^t + \frac{r}{1+r}\,v_2^t,$$

gdje je $v_1 = e^{-(p+s)} = 0.819672$, $v_2 = e^{-p} = 0.925926$.

Uočimo da vrijedi $\frac{1}{v_1} = 1.22$, $\frac{1}{v_2} = 1.08$, pa možemo pisati

$$v(t) = \frac{2}{3}\,1.22^{-t} + \frac{1}{3}\,1.08^{-t}.$$

(Uvijek je dobro provjeriti recipročne vrijednosti u slučaju $\delta = const.$, jer svejedno je da li poznajemo $1+i$ ili v (znamo da je $v = e^{-\delta} = \dfrac{1}{e^{\delta}} = \dfrac{1}{1+i}$), ovdje se dakle radi o kamatnim stopama 22%, odnosno 8%.)

(a) Rješenje je: $30000 \cdot \dfrac{v(20)}{v(10)} = 30000 \cdot \dfrac{0.084010}{0.245664} = 10259.18.$

(b) Ovdje imamo diskretni tok novca. Vrijednost sada (u $t = 0$) je, prema (1.7.1) $1000 \cdot \sum_{t=0}^{g} v(t)$.
Sad ima posla u računanju (inače, za to trebaju tablice, o tome naknadno). Dalje, prema (1.8.5) imamo:

$$(\text{Vrijednost u } t = 10) = (\text{Sadašnja vrijednost}) \cdot \frac{1}{v(10)} = \frac{1000}{v(10)} \sum_{t=0}^{g} v(t) = 22821.01.$$

◇

1.9 Prihod od kamata

Pretpostavimo situaciju u kojoj investitor nije zainteresiran za akumulaciju kapitala već želi samo ubirati prihod od kamata zadržavajući svoj kapital uvijek u istom iznosu C. U slučaju fiksne efektivne godišnje kamatne stope i na isteku svake godine prihod je Ci sve dok se kapital ne povuče.

Sada zamislimo investiciju u iznosu C u trenutku t_0, koju se namjerava povući u trenutku $t > t_0$. Zamislimo da investitor želi da mu se isplati prihod od kamata u $n > 1$ vremeskih točaka $t_0 + h$, $t_0 + 2h$, $\cdots$, $t_0 + nh = t$ (dakle je $h = \frac{t-t_0}{n}$). Kamata plativa u trenutku $t_0 + (j+1)h$ za vremenski interval $[t_0 + jh, t_0 + (j+1)h]$ po definiciji nominalne kamatne stope (tu dođe u obzir nominalna stopa $i_h(t_0 + jh)$, vidi (1.2.1)) iznosi

$$C\,h\,i_h(t_0 + jh).$$

Dakle, ukupni prihod od kamata je

$$C \sum_{j=0}^{n-1} h\, i_h(t_0 + jh)\,. \tag{1.9.1}$$

Prema našoj stalno prisutnoj pretpostavci je $i_h(t) \to \delta(t)$ za $h \to 0$. Ako je još $\delta(t)$ neprekidna funkcija i ako $n \to \infty$ (pa zato $h = \frac{t-t_0}{n} \to 0$) onda gornja suma prelazi u integral pa ukupni prihod od kamata $I(t)$ u intervalu $[t_0, t]$ za $n \to \infty$ konvergira k

$$I(t) = C \int_{t_0}^{t} \delta(s)ds\,. \tag{1.9.2}$$

Ako je ovo prihod od kamate u intervalu $[t_0, t]$ onda vrijedi da je

$$I'(t) = C\delta(t), \tag{1.9.3}$$

što je po definiciji stopa prihoda po jedinici vremena (godina kod nas) za uloženi kapital C.

Primjećujemo da $I'(t)$ ima istu ulogu kao $\rho(t) = M'(t)$ (vidi (1.7.3)) u diskusiji kontinuiranog toka novca. Isto rezoniramo kao tamo, i sad zaključujemo da je sadašnja vrijednost prihoda od kamata u intervalu $[0, T]$ dana s

$$\int_0^T v(t)I'(t)dt = \int_0^T v(t)C\delta(t)dt = C\int_0^T \delta(t)v(t)dt. \tag{1.9.4}$$

Naime, sadašnja vrijednost povučenog kapitala C u trenutku T je

$$C\, v(T). \tag{1.9.5}$$

U drugu ruku, ukupnu sadašnju vrijednost znamo - to je točno C! Zato je

$$C = Cv(T) + C\int_0^T \delta(t)v(t)dt = C\Big(v(T) + \int_0^T \delta(t)v(t)dt\Big).$$

Zaista,

$$\int_0^T \delta(t)v(t)dt = \int_0^T \delta(t)\exp\Big(-\int_0^t \delta(s)ds\Big)dt = -\Big[\exp\Big(-\int_0^t \delta(s)ds\Big)\Big]_0^T = 1 - v(T).$$

Sličnim rezoniranjem kako smo ovdje pokazali da je

$$v(T) + \int_0^T \delta(t)v(t)dt = 1\ , \tag{1.9.6}$$

pokazalo bi se da je i $\int_0^\infty \delta(t)v(t)dt = 1$ (ili puštanjem u prethodne jednakosti limes po $T \to \infty$ uz hipotezu da je $\;v(T) \to 0 \;$ za $T \to \infty$).

Zadaci i rješenja

Zadaci

Zadatak 1. *Banka isplaćuje kamatu na depozite uz varijabilni intenzitet kamate. Na početku neke godine investitor deponira iznos* 20000. *Na sredini te godine akumulacija je iznosila* 20596,21 *a na kraju* 21183,70. *Mjereći vrijeme u godinama, počevši od te godine, izvedite izraz za godišnji intenzitet kamate* $\delta(t)$, $0 \le t \le 1$ *uz pretpostavku da je u tom periodu* $\delta(t)$ *linearna funkcija. Odredite akumulaciju nakon 9 mjeseci.*

Zadatak 2. *Dužnik treba platiti banci 6280 za 4 godine od danas, 8460 za 7 godina, te 7350 za 13 godina. Ovaj plan se želi reprogramirati na način da se odabere jedna od sljedeće dvije opcije:*

(a) *Jednokratna isplata, 5 godina od danas;*

(b) *Jednokratna isplata ukupnog zaduženja 22090 u odgovarajućem trenutku.*

Precizirajte reprogramirane obveze uz $\delta = const. = 0,076961$.

Zadatak 3. *Neka je zadano, mjereno u godinama,* $\delta(t) = p + \dfrac{s}{1 + r\, e^{st}}$ *uz parametre* $p = 0{,}058269$, $s = 0{,}037041$, $r = \frac{1}{3}$. *Investitor će uplatiti 5 puta iznos 600 na početku 5 uzastopnih godina, prvu u trenutku* $t = 0$. *Zauzvrat može birati jednu od ponuđenih opcija:*

(a) *Isplatu ukupnog akumuliranog iznosa po isteku svih 5 godina;*

(b) *Seriju od 5 jednakih isplata, svaku u iznosu 900 na početku 5 uzastopnih godina od kojih prva dospijeva 5 godina od sada.*

Što je povoljnije?

Zadatak 4. *Intenzitet kamate* $\delta(t)$ *po godini u trenutku* t *je linearna funkcija prvih* m *godina (mjereno od* $t = 0$*), a zatim konstanta na nivou dostignutom u trenutku* m.

(a) *Nađite akumulaciju od* 1 *u vremenskom intervalu* $[0, n]$ *u terminima* n, m, $\delta(0)$, $\delta(m)$.

(b) *Specificirajte za* $m = 16$, $\delta(0) = 0,08$, $\delta(16) = 0,048$, $n = 15$ *i onda* $n = 40$.

(c) *Nađite konstantan intenzitet koji daje isti učinak kao u (b) nakon 15 te nakon 40 godina.*

Zadatak 5. *Neka je, mjereno u godinama* $\delta(t) = \begin{cases} 0,08\ , & 0 \le t < 5 \\ 0,06\ , & 5 \le t < 10 \\ 0,04\ , & 10 \le t \end{cases}$.
Investitor će uplatiti 15 premija godišnje unaprijed, svaku u iznosu 600, *prvu u* $t = 0$. *Zauzvrat može birati jednu od sljedeće dvije opcije*

(a) *Ukupni akumulirani iznos godini dana nakon zadnje uplate*

(b) *8 jednakih godišnjih isplata koje će se isplatiti u jednakim intervalima, a prva dospijeva jednu godinu nakon zadnje uplate*

Odredite iznose pod (a) i (b).

Zadatak 6. *Neka je* $v(t) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+t)(\alpha+t+1)}$, $t \ge 0$, $\alpha > 0$ *je konstanta. Odredite* $\delta(t)$ *i efektivnu kamatnu stopu* $i(n)$ *za period* $[n, n+1]$. *Odredite sadašnju vrijednost* $a(n)$ *od* n *uzastopnih uplata, svaka u iznosu* 1 *od kojih se* k*-ta uplaćuje u trenutku* $t = k$. *Specificirajmo* $\alpha = 15$. *Nađite iznos godišnje premije koja bi se plaćala godišnje unaprijed tokom* 12 *godina koja bi osigurala isplatu* 10 *godišnjih isplata, svaka u iznosu* 1800 *s tim da prva dospijeva jednu godinu nakon zadnje uplate. Odredite u* $t = 12$ *vrijednost svih uplata, odnosno isplata.*

Zadatak 7. *Investitor kupuje rentu koja se isplaćuje neprekidno* n *godina. Stopa isplate je linearna funkcija vremena,* $\forall t$.

(a) *Neka* I_r *označava iznos isplaćen u* r*-toj godini,* $r = 1, 2, ..., n$. *Izvedite izraz stopa isplate* $\rho(t)$ *u trenutku* t *po jedinici vremena (=godini) u terminima* I_1 *i* I_2. *Nađite ukupni isplaćeni iznos do* $t \le n$.

(b) *Neka je intenzitet kamate po godini* $\delta = const.$ *Nađite sadašnju vrijednost rente u terminima* n, δ, I_1, I_2. *Za* $n = 20, I_2 = 1.07I_1, i = 6\%$ *i sadašnju vrijednost rente* 9047 *nađite* I_1 *te iznos isplaćen u zadnjoj godini.*

Rješenja

1. Prema (1.4.4) imamo $A(0,t) = \exp\,(\int_0^t \delta(s)\;ds)$, a iz pretpostavke $\delta(s) = a + bs$ slijedi

$$A(0,t) = \exp\,(a \cdot t + \frac{b}{2} \cdot t^2) \quad \Longrightarrow \quad \ln\; A(0,t) = at + \frac{b}{2}t^2, \quad \forall t \leq 1.$$

Tada

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{daje} \quad \ln \frac{20596,21}{20000} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{8} = 0,029375$$
$$t = 1 \quad \text{daje} \quad \ln \frac{21183,70}{20000} = a + \frac{b}{2} \quad \Longrightarrow \quad a + \frac{b}{2} = 0,057500.$$

Odavde je $a = 0,06$, $b = -0,005$, pa je $\delta(t) = 0,06 - 0,005t$, $t \leq 1$ i zato akumulacija nakon 9 mjeseci iznosi $20000\;\exp(\int_0^{\frac{3}{4}}(0,06 - 0,005)dt) = 20891,16.$

2. Iz

$$\text{S.V.} = 6280 \cdot v^4 + 8460 \cdot v^7 + 7350 \cdot v^{13},$$

jer je $v = e^{-\delta} = \frac{1}{1{,}08}$, izlazi $S.V. = 12254,90.$

(a) $X \cdot v^5 = 12254,90 \Rightarrow X = 18006,47;$

(b) $22090 \cdot v^t = 12254,90 \Rightarrow t = 7,66 \approx$ 7godina i 8 mjeseci.

3. Vrijedi

$$v(t) = \frac{1}{1+r}\,v_1^t + \frac{r}{1+r}\,v_2^t, \quad v_1 = e^{-(p+s)} = 0,9090911, \quad v_2 = e^{-p} = 0,943396.$$

Kako je $\dfrac{1}{v_1} = 1,1$ i $\dfrac{1}{v_2} = 1,06$ imamo $v(t) = \dfrac{3}{4} \cdot 1,1^{-t} + \dfrac{1}{4} \cdot 1,06^{-t}$.
Sadašnja vrijednost svih uplata iznosi $600\,(1 + v(1) + v(2) + v(3) + v(4))$.
Akumulacija svih uplata u trenutku $t = 5$ iznosi dakle

$$\frac{600}{v(5)}(1 + v(1) + \cdots + v(4)) = 3902,16.$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v(t)$	0,91767	0,84233	0,77339	0,71028	0,65251	0,59996	0,55113	0,50674	0,46605

Neka je Y iznos fer godišnje isplate (s.v. svih isplata jednaka je s.v. svih uplata). Izjednačavanjem sadašnjih vrijednosti uplata i isplata slijedi

$$600\big(1 + v(1) + \cdots + v(4)\big) = Y\Big(v(5) + v(6) + v(7) + v(8) + v(9)\Big) \quad \Longrightarrow Y = 917,09.$$

Vidimo da bi u drugom slučaju investitor trebao dobiti $917,09$, a ne $900,00$.

Prva je opcija dakle bolja (ako su sve druge okolnosti neutralne).

4.

(a) $A(0,n) = \exp\,(\int_0^n \delta(t)dt)$. Označimo $\delta(0) = \delta_0$, $\delta(m) = \delta_m$.
Za $t \in [0,m]$ imamo

$$\delta(t) = \delta_0 + \frac{t}{m}(\delta_m - \delta_0).$$

Za $n \leq m$ vrijedi

$$\int_0^n \delta(t)dt = \int_0^n \Big(\delta_0 + \frac{t}{m}(\delta_m - \delta_0)\Big)dt = \Big[\delta_0 t + \frac{1}{2m}(\delta_m - \delta_0)t^2\Big]_0^n$$
$$= \delta_0 n + \frac{1}{2m}(\delta_m - \delta_0)n^2 = n(\delta_0 + \frac{n}{2m}(\delta_m - \delta_0)).$$

Slijedi

$$n \leq m \quad \Longrightarrow \quad A(0,n) = \exp\Big(\int_0^n \delta(t)dt\Big) = \exp(n\Big(\delta_0 + \frac{n}{2m}(\delta_m - \delta_0)\Big)),$$
$$n > m \quad \Longrightarrow \quad A(0,n) = \exp\Big(\int_0^m \delta(t)dt + \int_m^n \delta(t)dt\Big)$$
$$= \exp\Big(\frac{m}{2}(\delta_0 + \delta_m) + (n-m)\delta_m\Big).$$

(b) Imamo:

$$n = 15 \quad \Longrightarrow \quad A(0,n) = 2,6512,$$
$$n = 40 \quad \Longrightarrow \quad A(0,n) = 8,8110.$$

(c) U ovom slučaju je

$$e^{15\delta} = 2,6512 \quad \Longrightarrow \quad \delta = 0,065,\ i = e^{\delta} - 1 = 6,72,$$
$$e^{40\delta} = 8,8110 \quad \Longrightarrow \quad \delta = 0,0544,\ i = 5,59.$$

5. Vrijedi:

$$v(t) = exp\Big(-\int_0^t \delta(s)ds\Big) = \begin{cases} \exp(-0,08t) & ,\ 0 \leq t < 5 \\ \exp(-0,06t - 0,1) & ,\ 5 \leq t < 10 \\ \exp(-0,04t - 0,3) & ,\ 10 \leq t \end{cases}.$$

Jednadžbe vrijednosti glase

(a) $600\big(v(0) + v(1) + ... + v(14)\big) = S\,v(15) \quad \Longrightarrow \quad S = 14119,$

(b) $600\big(v(0) + v(1) + ... + v(14)\big) = X\big(v(15) + v(16) + ... + v(22)\big) \quad \Longrightarrow \quad X = 2022.$

6.

$$v(t) = exp\Big(-\int_0^t \delta(s)ds\Big) \;\Rightarrow\; \int_0^t \delta(s)ds = -ln\,v(t) \quad \Longrightarrow \quad \delta(t) = -\Big(ln\,v(t)\Big)' = -\frac{v'(t)}{v(t)}.$$

U našem slučaju je

$$\delta(t) = -\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{-(\alpha+t)(\alpha+t+1)}{\alpha(\alpha+1)} \cdot \frac{-\alpha(\alpha+1)(2\alpha+2t+1)}{(\alpha+t)^2(\alpha+t+1)^2} = \frac{2t+2\alpha+1}{(t+\alpha)(t+\alpha+1)}.$$

Prema (1.4.8) je

$$i(t) = \exp\Big(\int_t^{t+1} \delta(s)ds\Big) - 1,$$

a kod nas je (trik!)

$$i(n) = \exp\Big(\int_n^{n+1} \delta(s)ds\Big) - 1 = \exp\Big(\int_0^{n+1} \delta(s)ds - \int_0^{n} \delta(s)ds\Big) - 1 = \frac{v(n)}{v(n+1)} - 1$$

pa je

$$i(n) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} \cdot \frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}{\alpha(\alpha+1)} - 1 = \frac{\alpha+n+2}{\alpha+n} - 1 = \frac{2}{\alpha+n}.$$

Dalje, uvažavajući da prva uplata dospijeva u trenutku $t=1$, a n-ta u $t=n$ imamo

$$a(n) = v(1) + ... + v(n).$$

Sad primijetimo da je

$$v(t) = \alpha(\alpha+1)\Big(\frac{1}{\alpha+t} - \frac{1}{\alpha+t+1}\Big).$$

Odavde je

$$\begin{aligned} a(n) &= \alpha(\alpha+1)(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+2} + ... + \frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{\alpha+n+1}) \\ &= \alpha(\alpha+1)(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+n+1}) \\ a(n) &= \frac{n\alpha}{\alpha+n+1}. \end{aligned}$$

Označimo s P iznos uplate (premije). Jednadžba vrijednosti u $t=0$ (danas) je

$$P(1 + a(11)) = 1800(a(21) - a(11)).$$

Slijedi

$$P = 1800 \cdot \frac{a(21) - a(11)}{1 + a(11)} = \Big/ \alpha = 15 \Big/ = \frac{\frac{21\cdot 15}{37} - \frac{11\cdot 15}{27}}{1 + \frac{11\cdot 15}{27}} \cdot 1800 = 608.11.$$

Neka je X vrijednost u trenutku t=12 (obje strane su jednako vrijedne; tako smo i odredili premiju). Prema (1.8.5) je

$$X = \frac{1}{v(12)} \cdot 1800\big(a(21) - a(11)\big) = 13621.62.$$

Isto bismo dobili i da smo računali vrijednost svih premija za $t = 12$.

7. Stavimo $\rho(t) = p + qt$. Po formuli (1.7.4) u r-toj godini je isplaćeno

$$I_r = \int_{r-1}^{r} (p + q\,t)dt.$$

Slijedi

$$I_r = p + \frac{q}{2}(r^2 - (r-1)^2) = p + \frac{q}{2}(2r-1), \quad r = 1, 2, ..., n.$$

Odavde je

$$I_1 = p + \frac{q}{2},\ I_2 = p + \frac{3}{2}q,$$

pa je

$$q = I_2 - I_1,\ p = \frac{3}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_2,$$

odnosno

$$\rho(t) = (\frac{3}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_2) + (I_2 - I_1)t, \quad 0 \leq t \leq n.$$

Dalje, po (1.7.5) je sadašnja vrijednost izražena s

$$\int_0^n (p+qt)e^{-\delta t}dt = p\int_0^n e^{-\delta t}dt + q\int_0^n te^{-\delta t} = \text{ (parcijalna integracija)}$$
$$= \frac{1}{2}(3I_1 - I_2)\cdot\frac{1-e^{-n\delta}}{\delta} + (I_2 - I_1)\cdot\frac{1-e^{-n\delta} - n\delta e^{-n\delta}}{\delta^2}.$$

Računom izlazi $I_1 = 500$, $I_n = 1165$.

2 Osnovne funkcije složenog ukamaćivanja

2.1 Osnovne relacije

U ovom poglavlju operirat ćemo s **fiksnom efektivnom godišnjom kamatnom stopom** $i = konst.$, a vremenska jedinica je opet godina. Ponovimo neke temeljne relacije.

Vrijednost u trenutku s iznosa 1 koji dospijeva u $s+t$ dana je, $\forall s$, izrazom

$$\frac{v(s+t)}{v(s)} = \exp\Big(-\int_s^{s+t} \delta(r)dr\Big) = \exp(-\delta t) = e^{-\delta t}. \tag{2.1.1}$$

Uz oznaku (već ranije navedenu)

$$v = e^{-\delta} = (1+i)^{-1} \tag{2.1.2}$$

možemo rekapitulirati: vrijednost u trenutku investicije iznosa investiranog bilo kada, koji dospijeva t godina kasnije u iznosu 1 je

$$v(t) = e^{-\delta t} = (e^{-\delta})^t = v^t\,. \tag{2.1.3}$$

Uvedimo još

$$d = 1 - v\,, \tag{2.1.4}$$

pa imamo relacije

$$v = 1 - d = e^{-\delta}, \tag{2.1.5}$$

$$v(t) = (1-d)^t. \tag{2.1.6}$$

Predzadnja formula se interpretira ovako: U zamjeni za uplatu iznosa 1 u trenutku $t = 1$ (a sadašnja vrijednost toga prema (2.1.3) je $v = e^{-\delta}$) investitor u ovom trenutku $t = 0$ raspolaže s iznosom $v = 1 - d$. Ovo možemo doživjeti kao sljedeću kreditnu pogodbu: $1 - d$ se može shvatiti kao zajam u trenutku $t = 0$ koji će biti isplaćen u iznosu 1 u času $t = 1$ s tim da je već plaćena kamata d u trenutku $t = 0$.

Ukratko: banka nam odobri zajam u iznosu 1 na rok od jedne godine; mi vraćamo točno 1, no na početku raspolažemo ne s 1, već s $1 - d$.

Kažemo da je d **diskontna ili anticipativna kamatna stopa** po jedinici vremena (kod nas je godišnje). Preciznije, d se zove **efektivna anticipativna kamatna stopa** (kasnije će se pojaviti i nominalne) .

Primijetimo još da je $i = const \Leftrightarrow \delta = const$.

Iz ranije formule $i(t) = \exp\big(\int_t^{t+1} \delta(s)ds\big) - 1$ znamo da je

$$i = e^{\delta} - 1,$$
$$\delta = \ln(1+i).$$

Kombinirajući prethodne relacije imamo još

$$v = \frac{1}{1+i},$$
$$d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i},$$
$$d = i\,v.$$

Zadnja relacija upravo potvrđuje prethodnu opservaciju: d je sadašnja vrijednost iznosa i koji dospijeva jednu godinu kasnije.

Koja bi bila odgovarajuća svota koja bi se plaćala kontinuirano kroz interval $[0,1]$? Iznos označimo sa σ, pretpostavimo stopu uplate $\rho(t) = const = \rho$ pa po formuli (1.7.4) daje

$$\sigma = \int_0^1 \rho dt = \rho \, .$$

Sad formula (1.7.5) kojom se računa sadašnja vrijednost izjednačena s d daje

$$d = \int_0^1 v(t)\rho(t)dt = \int_0^1 \sigma e^{-\delta t} dt = \frac{\sigma}{\delta}(1-e^{-\delta}) \overset{(2.1.5)}{=} \frac{\sigma}{\delta} d \quad \Rightarrow \quad \sigma = \delta \, .$$

Rezimirajmo: i, d, δ su alternativni opisi iste stvori; platiti iznos d u $t=0$ je isto kao platiti i u trenutku $t = 1$ (je isto kao kontinuirana uplata svote δ kroz interval $[0,1]$ po konstantnoj stopi uplate δ) .

Veličine i, δ, v, d se naravno mogu izraziti svaka pomoću svake. Prethodne relacije daju sljedeći tabelarni pregled

\ vrijednost u terminima od \	δ	i	v	d
δ		$e^{\delta} - 1$	$e^{-\delta}$	$1 - e^{-\delta}$
i	$\ln(1+i)$		$\dfrac{1}{1+i}$	$\dfrac{i}{1+i}$
v	$-\ln v$	$\dfrac{1}{v} - 1$		$1 - v$
d	$-\ln(1-d)$	$\dfrac{d}{1-d}$	$1 - d$	

Tablica 1.

Kada je i malen mogu se vršiti i različite aproksimacije koje pokazuju da su i, δ, d istog reda veličine dok je $v \approx 1 - i$. Na primjer, za $|i| < 1$ razvojem logoritma u red dobiva se

$$\delta = \ln(1+i) = i - \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{3}i^3 - \frac{1}{4}i^4 + \cdots$$

pa za male i vidimo

$$\delta \approx i - \frac{1}{2}i^2.$$

Slično, $d = \dfrac{i}{1+i} = i\,(1 - i + i^2 - i^3 + \cdots)$ za $|i| < 1$, pa je

$$d \approx i - i^2.$$

Također iz $i = e^\delta - 1$ razvojem e^δ u Taylorov red vidimo za male δ

$$i \approx \delta + \frac{1}{2}\delta^2.$$

Za male δ slično se izvode i

$$d \approx \delta - \frac{1}{2}^2.$$

U konkretnim situacijama moguće su i preciznije ocjene.

Neka je $f(x) = e^x$. Prema Taylorovom teoremu je

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\varepsilon)}{3!}x^3, \qquad \text{za neki } \varepsilon \in [0, x], \quad x > 0.$$

Dakle, za

$$\delta > 0, \quad \exists\varepsilon \in [0, \delta], \quad \text{t.d.} \quad e^\delta = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{6}e^\varepsilon. \tag{2.1.7}$$

Odavde je

$$i = e^\delta - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{6}e^\varepsilon. \tag{2.1.8}$$

Zamislimo sad da je $\delta \in (0, \frac{1}{10})$. Tada je $\forall\varepsilon \in [0, \delta]$

$$\frac{e^\varepsilon}{6} > \frac{e^{0.1}}{6} < 0.185.$$

Zaključak:

$$\delta < 0.1 \quad \Rightarrow \quad \delta + \frac{\delta^2}{2} \; < \; i \; < \; \delta + \frac{\delta^2}{2} + 0.185\,\delta^3.$$

2.2 Jednadžbe vrijednosti i prinos u transakciji

Promotrimo transakciju u kojoj investitor treba u vremenima $t_1, \ldots, t_n$ platiti iznose $a_1, \ldots, a_n$ i u tim istim trenucima primiti uplate $b_1, \ldots, b_n$ (u praksi će samo jedan od brojeva a_j, b_j biti $\neq 0$, $\forall j$). Postavlja se pitanje uz koju konstantnu efektivnu kamatnu stopu je vrijednost svih uplata jednake vrijednosti svih isplata; znamo da je to jednako jednom $\Leftrightarrow$ jednako u $t = 0$ $\Leftrightarrow$ jednako uvijek (bazično, to je (1.8.6)).

Ako gledamo sadašnje vrijednosti dobivamo jednadžbu

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v(t_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j v(t_j). \tag{2.2.1}$$

Uz oznaku $c_j = b_j - a_j =$"neto tok novca u trenutku t_j", kako je $v(t_j) = e^{-\delta t_j}$, imamo

$$\sum_{j=1}^{n} c_j e^{-\delta t_j} = 0. \tag{2.2.2}$$

Ovo se zove **jednadžba vrijednosti za intenzitet kamate δ implicirane transakcijom**.

Ako uvažimo $e^{\delta} = 1 + i$, $v = \dfrac{1}{1+i}$ možemo pisati i

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (1+i)^{-t_j} = 0, \quad \text{odnosno} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j v^{t_j} = 0. \tag{2.2.3}$$

Suma može ići i do ∞ samo što tada moramo osigurati da redovi konvergiraju.
Analogno jednadžba za kontinuirani tok isplate i uplate je

$$\int_0^{T(\infty)} \rho(t) e^{-\delta t} dt = 0 \tag{2.2.4}$$

ako su $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ stope isplate i uplate, te je $\rho(t) = \rho_2(t) - \rho_1(t)$ stopa toka novca u t.

Vratimo se jednadžbi (2.2.2), odnosno (2.2.3). Ako ona ima jedinstveno rješenje onda se ono, u oznaci δ_0 zove se **intenzitet kamate impliciran transakcijom**, a pripadajuća efektivna kamatna stopa $i_0 = e^{\delta_0} - 1$ se zove **prinos po jedinici vremena** (dakle kod nas godišnji prinos). Uočimo da je nužno $i_0 = e^{\delta_0} - 1 > -1$.

Primjer 2.2.1. *Pogledajmo dva projekta u kojima investitor čini inicijalnu investiciju od 10000, nakon jedne godine očekuje se prihod, a nakon još jedne godine potrebna je nova, finalna investicija:*

	$t=0$	$t=1$	$t=2$
(a)	*-10 000*	*21 500*	*-11 550*
(b)	*-10 000*	*20 400*	*-10 395*

Rješenje: Jednadžbe vrijednosti su :

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ \ -10000 + 21500\,v - 11550\,v^2 = 0, \\ &\text{(b)}\ \ -10000 + 20400\,v - 10395\,v^2 = 0. \end{aligned}$$

Prva jednadžba ima dva pozitivna rješenje $i_1 = 0,05$ i $i_2 = 0.10$, druga ima doduše isto 2 ($i_1 = 0,05$ i $i_2 = -0.01$), no samo jedno je pozitivno (naime, $i > 0$ traži da bude $\delta = \ln(1+i) > 0$). Ovdje se lako vidi što se događa. Međutim, općenito je znatno teže dobiti rješenje, čak i doznati je li jedinstveno. $\diamond$

Teorem 2.2.1. *Za svaku transakciju u kojoj sve isplate prethode svim uplatama (ili obrnuto) jednadžba (2.2.2) ima jedinstveno rješenje (tj. prinos je dobro definiran).*

Dokaz: Pretpostavimo da imamo k isplata i $n-k$ uplata. Pišemo

$$-(\alpha_1 e^{-\delta t_1} + \cdots + \alpha_k e^{-\delta t_k}) + \alpha_{k+1} e^{-\delta t_{k+1}} + \cdots + \alpha_n e^{-\delta t_n} = 0 \qquad / - e^{\delta t_k},$$

pri čemu je $\alpha_j > 0$, $\forall j = 1, \ldots, n$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Primijetimo da nisu sva plaćanja s istim predznakom; inače cijeli problem uopće nema smisla - vidi (2.2.1). Zato je ovdje $k \geq 1$ i

$k < n$ (tj. s negativnim/isplatama smo započeli, bila je barem jedna isplata i nisu sve isključivo isplate, nego od trenutka t_{k+1} slijede uplate).
Naznačeno množenje s $-e^{\delta t_k}$ daje

$$\alpha_1 e^{\delta(t_k - t_1)} + \cdots + \alpha_k e^{\delta(t_k - t_k)} - (\alpha_{k+1} e^{-\delta(t_{k+1} - t_k)} + \cdots + \alpha_n e^{-\delta(t_n - t_k)}) = 0.$$

Uz oznake

$$g(\delta) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e^{\delta(t_k - t_j)}, \quad h(\delta) = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e^{-\delta(t_j - t_k)},$$

trebamo dakle po δ riješiti jednadžbu

$$f(\delta) = g(\delta) - h(\delta) = 0\,.$$

Međutim $g(\delta)$ rastuća (ili konstanta ako je k=1), $h(\delta)$ strogo padajuća pa je $f(\delta)$ strogo rastuća. Kako je $\lim\limits_{\delta \to \pm\infty} f(\delta) = \pm\infty$, očito f ima točno jednu nul-točku. □

Primijetimo da su oba slučaja iz prethodnog primjera izvan dosega teorema. Postoje i drugi dovoljni uvjeti. Sljedeći navodimo bez dokaza.

Teorem 2.2.2. *Za neto tokove novca $C_0, C_1, \ldots, C_n$ u vremenskim točkama $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ definirajmo $S_r = \sum_{j=0}^{r} C_j$, $r = 0, 1, \ldots, n$. Pretpostavimo da je $S_0, S_n \neq 0$, da su S_0, S_n različitih predznaka, te da se predznak u nizu $S_0, S_1, \ldots, S_n$ mijenja točno jednom. Tada jednadžba (2.2.2) ima jedinstveno pozitivno rješenje.*

Vidi primjer (2.2.1 (b)).

Primjer 2.2.2. *Neka su $C_j : -5, 1, -3, 8, 4$. Tada su $S_r : -5, -4, -7, 1, 5$.* ◇

Primjer 2.2.3. *Neka se u $t = 0$ investira iznos X, neka se na kraju svake godine tijekom n godina uprihodi jX te neka se u $t = n$ povuče početnu investiciju X. Odredite prinos ove transakcije.*

Rješenje: Jednadžba vrijednosti je (koristimo oblik (2.2.3))

$$-X + jX(1+i)^{-1} + jX(1+i)^{-2} + \cdots + jX(1+i)^{-n} + X(1+i)^{-n} = 0 \qquad \Big/(1+i)^n, \qquad \Big/\frac{1}{X}$$

$$j\big[(1+i)^0 + \cdots + (1+i)^{n-1}\big] = (1+i)^n - 1$$

$$\iff \quad j\frac{(1+i)^n - 1}{i} = (1+i)^n - 1.$$

Očito je jedno rješenje $j = i$; (rješavamo po i uz zadani j). Primjer je porkiven s oba prethodna teorema, pa je rješenje jedinstveno.

Ovo je u skladu sa zdravim razumom. Za $i < j$ investitor će biti na dobitku, za $i > j$ na gubitku; naime, predložena shema je identična shemi "prihoda od kamata". I općenito, problem se može "bankovno" ilustrirati: traži se ona efektivna kamatna stopa i uz koju su naše uplate i bankine isplate u ravnoteži. ◇

Primjer 2.2.4. *Investitor može birati između sljedeća dva plana štednje:*

(1) Deset godišnjih premija u iznosu 100 plativih unaprijed koje donose 1700 nakon 10 godina

(2) Petnaest godišnjih premija u iznosu 100 plativih unaprijed koje donose 3200 nakon 15 godina

Koji plan nudi viši prinos? Koje druge faktore investitor može uzeti u obzir?

Rješenje: Prema prvom teoremu postoji jedinstveno rješenje! Tražimo vrijednost kamatne stope inducirane transakcijom.

(1) Jednadžba vrijednosti je

$$100 + 100(1+i)^{-1} + \cdots + 100(1+i)^{-9} = 1700(1+i)^{-10} \quad \Big/ (1+i)^{10}$$
$$1700 = 100(1+i)(1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^9),$$

dakle

$$17 = (1+i)\frac{(1+i)^{10} - 1}{i}.$$

Označimo $f(i) = 17 = (1+i)\frac{(1+i)^{10}-1}{i}$. Trebamo dakle riješiti jednadžbu

$$f(i) - 17 = 0.$$

Ona se rješava numerički. Pronađemo i_1 i i_2 takve da su $f(i_1) - 17$ i $f(i_2) - 17$ suprotnog predznaka, odnosno da se tražena vrijednost i nalazi između i_1 i i_2 (ok, jer je $f(i)$ neprekidna za $i > 0$). Zatim koristimo linearnu interpolaciju. Imamo $f(0.08) = 15.6455$, $f(0.09) = 16.5603$, $f(0.10) = 17.5312$. Kako je $f(0,09) - 17 < 0$ i $f(0,10) - 17 > 0$, tražena vrijednost i je između $i_1 = 0.09$ i $i_2 = 0.10$. Linearna interpolacija daje (slični trokuti)

$$\frac{i - i_1}{f(i) - f(i_1)} = \frac{i_2 - i_1}{f(i_1) - f(i_2)},$$
$$\frac{i - 0.09}{17 - 16.5603} = \frac{0.1 - 0.09}{17.5312 - 16.5603}$$

odatle je $i = 0.0945$, 9.45%. Kad to uvrstimo gore u desnu stranu dobije se 16.990053 što je zadovoljavajuće.

(2) Ovdje je jednadžba

$$32 = (1+i)\frac{(1+i)^{15} - 1}{i}$$

i istim načinom iznađemo da je rješenje točno 9% (u biti uvrštavanje daje 32.0034).

Dakle prvi plan izgleda bolji. Da li je?

Smisao je ovaj: uz kamatnu stopu 9.45%, odnosno 9% planovi su potpuno uravnoteženi. Dakle: prihvaćajući prvi plan mi odabiremo "štednju" u kojoj nam se priznaje veća kamatna stopa.

Jasno, treba vidjeti što bismo s novcem. Ako ga namjeravamo potrošiti, nema daljnjih razmatranja. Ako ga namjeravamo reinvenstirati onda treba vidjeti koju kamatnu stopu možemo postići u periodu [10,15]. Ako je taj manji, onda treba ponovo razmisliti.

Zamislimo da je na tržištu na snazi efektivna godišnja kamatna stopa 8% i da će takva biti na snazi tokom idućih 15 godina. Izračunajmo sadašnju vrijednost oba plana

(1) (8%) $s.v.1 = 1700\,v^{10} - (100 + 100\,v + \cdots + 100\,v^{9}) = 62.74,$

(2) (8%) $s.v.2 = 3200\,v^{15} - (100 + 100\,v + \cdots + 100\,v^{14}) = 84.35.$

Za $(8,5\%)$ $s.v.1 = 39,979$, a $s.v.2 = 40,238,$

Za $(8,7\%)$ $s.v.1 = 31,259$, a $s.v.2 = 23,670,$

Za $(9,0\%)$ $s.v.1 = 18,573$, a $s.v.2 = 0,00,$

Za $(10,0\%)$ $s.v.1 = -20,480.$

Dakle, ovako gledano drugi plan je bolji.

Zaključak: važno je kakva je kamatna stopa na tržištu ne samo u [10, 15] nego čitavo vrijeme.

$\diamond$

Primjer 2.2.5. *U zamjenu za uplatu 500 sada i uplatu 200 nakon dvije godine investitor ce dobiti 1000 nakon 5 godina od sada. Nađite prinos na transakciju.*

Rješenje:

$$\begin{aligned} 1000 &= 500(1+i)^5 + 200(1+i)^3 \\ 10 &= 5(1+i)^5 + 2(1+i)^3 \\ \Longrightarrow \quad i &= 8.3248\%. \end{aligned}$$

$\diamond$

Primjer 2.2.6. *U zamjenu za zajam u iznosu 100 dužnik treba platiti 110 nakon 7 mjeseci. Nađite godišnju kamatnu stopu, godišnju diskontnu stopu i godišnji intezitet kamate za ovu transakciju.*

Ubrzo nakon posudbe dužnik predlaže reprogramiranje: platio bi 50 nakon 7 mjeseca a drugu, preostalu uplatu izvršio bi 6 mjeseci kasnije. Uz suglasnost druge strane podrazumijevajući istu kamatnu stopu odredite odgovarajući iznos druge uplate.

Rješenje: Imamo

$$100(1+i)^{\frac{7}{12}} = 110,$$

što daje

$$\frac{7}{12}\ln(1+i) = \ln 1.1 \quad \Longrightarrow \quad i = 0.17749.$$

Dakle je $i = 17.75\%$, $d = 1 - v = 0.15074$, $\delta(1+i) = 0.16339$.

Označimo drugu uplatu s X. Da sve bude u ravnoteži, preostalih 60 (60=110-50) bi nakon idućih 6 mjeseci trebalo vrijediti X; dakle,

$$X = 60(1+i)^{\frac{1}{2}} = 65.1075.$$

Alternativno, to smo mogli dobiti i izjednačavajući sve skupa u času npr. $t = \frac{13}{12}$:

$$100e^{\frac{13}{12}\delta} - 50e^{\frac{1}{2}\delta} - X = 0.$$

$\diamond$

Primjer 2.2.7. *Dužnik treba platiti iznose $x_1, \dots, x_k$ u vremenima $t_1, \dots, t_k$. Umjesto toga, on predlaže jednokratnu uplatu ukupnog duga $x_1 + \cdots + x_k$ u trenutku t^* koji je težinski prosjek originalnih vremena*

$$t^* = \frac{x_1t_1 + \cdots + x_kt_k}{x_1 + \cdots + x_k}.$$

Da li ovo korektno? (Uoči $t^* \in [t_1, t_k]$.)

Rješenje: Neka je T trenutak u kojem bi ukupna jednokratna uplata te svote bila fer. Izjednačimo S.V.:

$$(x_1 + \cdots + x_k)e^{-\delta T} = x_1e^{-\delta t_1} + x_2e^{-\delta t_2} + \cdots + x_ke^{-\delta t_k}.$$

Sad zamislimo da računamo u lipama - svi x_i su tada cijeli brojevi. Sad zamislimo skup koji se sastoji od x_1 brojeva od kojih je svaki jednak $e^{-\delta t_1}$, x_2 brojeva, svaki $e^{-\delta t_2}$, ... , x_k brojeva $e^{-\delta t_k}$. Svi nisu jednaki jer $t_i \neq t_j$. Iskoristimo li poznatu nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine $(a + b > 2\sqrt{ab})$, dobivamo

$$\begin{aligned} e^{-\delta T} &= \frac{x_1e^{-\delta t_1} + x_2e^{-\delta t_2} + \cdots + x_ke^{-\delta t_k}}{x_1 + \cdots + x_k} \\ &> \Big((e^{-\delta t_1})^{x_1}(e^{-\delta t_2})^{x_2} \cdots (e^{-\delta t_k})^{x_k}\Big)^{\frac{1}{(x_1+\cdots+x_k)}} \\ &= \exp\Big(-\delta\frac{x_1t_1 + \cdots + x_kt_k}{x_1 + \cdots + x_k}\Big). \end{aligned}$$

Kako je logaritam rastuća funkcija slijedi

$$-\delta\, T > -\delta\, t^* \quad\Longrightarrow\quad T < t^*.$$

Investitor je lukav. Korektna uplata treba doći ranije. $\diamond$

Primjer 2.2.8. *(Komercijalni diskont) Zajmodavac temelji svoje kratkoročne transakcije na stopi komercijalnog diskonta D, $0 < D < 1$. Ako je $0 < t \leq 1$ nudi se zajam u iznosu $X(1 - Dt)$ u t=0 u zamjenu za otplatu X u času t. Za takvu transakciju za period $[o, t]$ treba izvesti izraz za efektivnu godišnju diskontnu stopu d u terminima D, t.*

Jasno je da d ovisi o t. Pokažite da d raste s t.

Rješenje: Jednadžba transakcije u 0 glasi

$$1 - Dt = v^t,$$

dakle je

$$1 - Dt = (1 - d)^t \quad\Longrightarrow\quad d = 1 - (1 - Dt)^{1/t}.$$

Dalje,

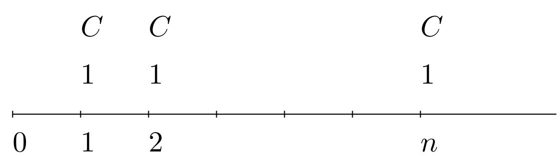
$$\begin{aligned} 1 - Dt = (1-d)^t \quad &\Longrightarrow \quad t\ln(1-d) = \ln(1-Dt) \\ &\qquad \text{(jer } |Dt| < 1 \text{ razvijemo u red)} \\ &\Longrightarrow \quad t\ln(1-d) = -Dt - \frac{(Dt)^2}{2} - \frac{(Dt)^3}{3} - \dots \\ &\Longrightarrow \quad \ln(1-d) = -D - D^2\frac{t}{2} - D^3\frac{t^2}{3} - \dots . \end{aligned}$$

Ako t raste desna strana pada, dakle $\ln(1-d)$ pada $\Longrightarrow$ $1-d$ pada $\Longrightarrow$ d raste. $\diamond$

2.3 Financijske rente (annuity-certain): sadašnje vrijednosti i akumulacije

Renta je seriji od n jednakih isplata/uplata, u jednakim vremenskim intervalima. Sve isplate/uplate su izvjesne, neovisne o smrti ili doživljenju neke osobe. Takva serija se naziva **renta** ili **financijska renta** (annuity-certain)[3]. Pretpostavljamo da se opet operira s konstantnom kamatnom stopom i.

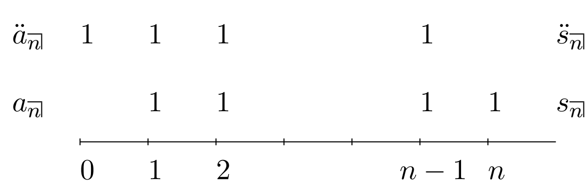
Promotrimo prvo slučaj isplate u iznosu 1 na kraju svake od n uzastopnih godina (jediničnih intervala).



Sadašnja vrijednost takve rente je

$$a_{\overline{n}|} = v + ... + v^n = v(1 + v + ... + v^{n-1}) = v\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{\frac{1}{v}-1} = \frac{1-v^n}{i}. \tag{2.3.1}$$

Ovakva se renta zove **postnumerando** ili **plativa unatrag** (ordinary annuity).
Uočimo da je stvar translaciono invarijantna; rezultat je isti kad računam vrijednost jednu godinu prije prve isplate. Jasno, s.v. $= C\, a_{\overline{n}|}$ ako se isplaćuje iznos C.



Vrijednost u trenutku prve isplate (**prenumerando, plativo unaprijed**) (annuity due) je

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + ... + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}. \tag{2.3.2}$$

[3] Ukoliko isplate nisu izvjesne i ovise o smrti ili o doživljenju, radi se o životnoj renti (contingent annuity).

Očito vrijedi (i aritmetički i zdravorazumski)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)\, a_{\overline{n}|}, \qquad \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}\,, \qquad \forall n \geq 2. \tag{2.3.3}$$

Vrijednost ovakve serije od n godišnjih isplata u trenutku zadnje isplate je

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + ... + (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{2.3.4}$$

a godinu dana nakon zadnje isplate

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + ... + (1+i)^2 + (1+i) = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \tag{2.3.5}$$

Primijetimo da vrijedi

$$s_{\overline{n+k}|} - s_{\overline{k}|} = s_{\overline{n}|}(1+i)^k\,; \quad \ddot{s}_{\overline{n+k}|} - \ddot{s}_{\overline{k}|} = \ddot{s}_{\overline{n}|}(1+i)^k.$$

Ponekad se vrijednosti $s_{\overline{n}|}$ i $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ zovu i akumulacije, odnosno akumulirane vrijednosti renti. Primijetimo još da smo npr. $s_{\overline{n}|}$ mogli izvesti iz $a_{\overline{n}|}$ i formule

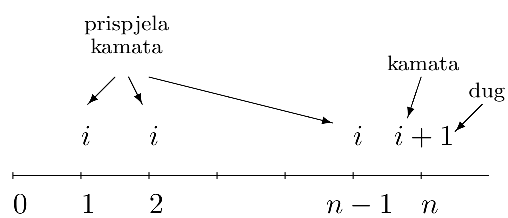
$$(\text{vr. toka novca u } t_a) = \frac{1}{v(t_a)}(\text{s.v. toka novca}).$$

U našem slučaju bi bilo

$$s_{\overline{n}|} = \frac{1}{v(n)}\, a_{\overline{n}|} = (1+i)^n \frac{1-v^n}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Lako se vide sljedeće formule

$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|} &= (1+i)^n a_{\overline{n}|}, \\ \ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i)^n\, \ddot{a}_{\overline{n}|}, \\ s_{\overline{n+1}|} &= 1 + \ddot{s}_{\overline{n}|}, \\ \ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i) s_{\overline{n}|}, \\ 1 &= i\, a_{\overline{n}|} + v^n, \\ 1 &= d\, \ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$



$$\left(\begin{array}{ll} \Longleftarrow & (1+i)^n = i\, s_{\overline{n}|} + 1 \\ \Longleftarrow & (1+i)^n = d\, \ddot{s}_{\overline{n}|} + 1 \end{array} \right)$$

Ove jednakosti se mogu i algebarski izvesti i interpretirati. Npr. Predzadnja je jednadžba vrijednosti na n godina u iznosu 1 u kojem se kamata (u godišnjem iznosu i) plaća na kraju svake godine.

Sada zamislimo sve veće i veće n i pustimo $n \to \infty$. Dobiveni nizovi isplata zovu se **vječne rente** (perpetuities). (Primjetimo: $i > 0 \implies v = \frac{1}{1+i} < 1 \Longrightarrow v^n \longrightarrow 0$ za $n \longrightarrow \infty$.)
Jasno je da vrijedi

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + ... = v\frac{1}{1-v} = \frac{1}{i},$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + ... = v\frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

i	2%	4%	6%	10%	15%
$a_{\overline{\infty}\vert}$	50	25	$16.6\dot{6}$	10	$6.6\dot{6}$
$\ddot{a}_{\overline{\infty}\vert}$	51	26	$17.6\dot{6}$	11	$7.6\dot{6}$

Također je jasno da mora biti

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} - a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} - \frac{1}{i} = \frac{i+1}{i} - \frac{1}{i} = 1.$$

Korisno je imati navedene veličine tabelirane za razne konkretne vrijednosti i. U praksi se obično tabeliraju $a_{\overline{n}|}$ i $s_{\overline{n}|}$, a druge dvije se izvode iz njih.

Primjer 2.3.1. *Na dan 15.11. svake godine od 1984 do 1999 uključivo investitor je uplaćivao iznos 500 na specijalan račun. Dana 15.11.2003. će podići svoju ušteđevinu. Odredite njezin iznos ako je i=7%. Koliko bi bio iznos ušteđevine na dan 31.12.2003.?*

Rješenje: Izvršeno je 16 uplata. Zato je vrijednost $500 s_{\overline{16}|}$ na dan zadnje uplate (po definiciji veličine $s_{\overline{n}|}$). Rezultat je $500 s_{\overline{16}|}(1+i)^4$.

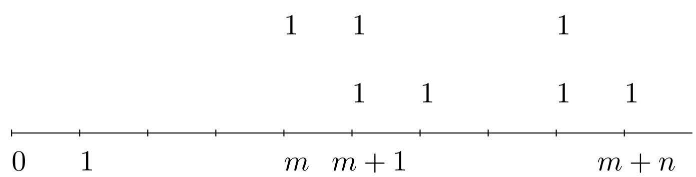
Alternativno, $500(s_{\overline{20}|} - s_{\overline{4}|})$. Iznos ušteđevine na dan 15.11.2003. je $18277,77$. Na dan 31.12.2003. iznos bi bio

$$500 s_{\overline{16}|}(1+i)^4(1+i)^{3/24} = \cdots = 18433,01.$$

$\diamond$

Odgođene rente (deferred annuities)

Opišimo sada odgođene rente. Odgođena postnumerando renta (renta plativa unazad) koja traje n godina uz rok odgode m godina ima sljedeći dijagram i sadašnju vrijednost.



$$_{m|}a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+m}|} - a_{\overline{m}|}. \tag{2.3.7}$$

Analogno se vidi,

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n+m}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}. \tag{2.3.8}$$

Neprekidne rente

Neka je $n \geq 0$ (ne nužno cijeli). Vrijednost u $t = 0$ rente koja se isplaćuje kontinuirano u vremenskom intervalu $[0, n]$ pri čemu je godišnja stopa isplate konstantna i iznosi $\rho(t) = 1$, označava se s $\bar{a}_{\overline{n}|}$. Jasno je od prije

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n \rho(t) v(t) dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} = \dfrac{1 - v^n}{\delta}, & \delta \neq 0 \\ n, & \delta = 0 \end{cases}. \tag{2.3.9}$$

Ako imamo takvu odgođenu rentu onda je

$$_{m|}\bar{a}_{\overline{n}|} = \bar{a}_{\overline{n+m}|} - \bar{a}_{\overline{m}|} = v^m \bar{a}_{\overline{n}|}\,. \tag{2.3.10}$$

Iz (2.3.9) i (2.3.1), za $\delta \neq 0$, slijedi

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|}\,. \tag{2.3.11}$$

a $a_{\overline{n}|}$ je tabelirana.

Rastuće rente

Preostalo je opisati rastuće i padajuće rente. Općenito se ovo izvodi iz već poznate formule za s.v. toka novca. Važan je sljedeći konkretan slučaj.

Promatramo postnumerando rentu u kojoj se u vremenskim točkama $1, 2, ..., n$ isplaćuju iznosi $1, 2, ..., n$.

$(I\ddot{a}_{\overline{n}|})$	1	2	3		n	
$(Ia_{\overline{n}|})$		1	2		$n-1$	n
	0	1	2		$n-1$	n

Sadašnja vrijednost takve rente je

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + 3v^3 + \cdots + (n-1)\,v^{n-1} + n\,v^n\,. \tag{2.3.12}$$

Odavde je

$$(1+i)(Ia)_{\overline{n}|} = 1 + 2v + 3v^2 + \cdots + (n-1)\,v^{n-2} + n\,v^{n-1}.$$

Oduzimanjem te jednakosti od (2.3.12) slijedi

$$\begin{aligned} i\,(Ia)_{\overline{n}|} &= 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} - nv^n = \ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n \\ \Longrightarrow \quad (Ia)_{\overline{n}|} &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Običaj je i funkciju $(Ia)_{\overline{n}|}$ tabelirati.

Ako sada imamo rentu, čiji iznosi isplate čine aritmetički niz, njezina se sadašnja vrijednost može napisati u terminima $a_{\overline{n}|}$ i $(Ia)_{\overline{n}|}$.

	P	$P+Q$	$P+2Q$			$P+(n-1)Q$
0	1	2	3		$n-1$	n

Konkretno, ako je prva isplata P, druga $P+Q$, $k-ta\,P+(k-1)Q$, s.v. svih takvih uplata je

$$(P-Q)a_{\overline{n}|} + Q(Ia)_{\overline{n}|},$$

ili analogno (2.3.13);

$$\text{s.v.} = \frac{1}{i}\Big[Q\,\ddot{a}_{\overline{n}|} + P - Q - (P + (n-1)Q)v^n\Big].$$

Analogno imamo sadašnju vrijednost u trenutku prve isplate (prenumerando)

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + 2v + 3v^2 + 3v^3 + \cdots + nv^{n-1} = (1+i)(Ia)_{\overline{n}|}$$
$$\Longrightarrow \quad (I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n\,v^n}{d}.$$

Također, lagano se vidi

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} + (Ia)_{\overline{n-1}|}\,. \tag{2.3.14}$$

Neprekidne rastuće rente

Slučaj neprekidnih renti koje se isplaćuju tokom perioda $[0, n]$ može se poopćiti na dva načina:

(a) stopa isplate je konstantna tokom godine $\rho(t) = r,\ \forall\, t \in [r-1, r]$ za $r = 1, 2, ..., n$;

(b) stopa isplate je u trenutku t $\rho(t) = t,\ \forall\, t \in [0, n]$.

U oba slučaja rezultat, tj. s.v. znamo iz (1.7.5)

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_0^n \rho(t)\,v(t)\,dt = \sum_{r=1}^{n}\Big(\int_{r-1}^{r} r\,v^t\,dt\Big) = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n\,v^n}{\delta}\,. \tag{2.3.15}$$

Također, lagano se vidi

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_0^n t\,v(t)\,dt = (\text{parcijalna integracija}) = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - n\,v^n}{\delta}\,. \tag{2.3.16}$$

Padajuće rente

Diskusija padajućih renti se dobije kombinacijom konstantnih i rastućih. Npr. niz $n, n-1, \cdots, 3, 2, 1$ dobijemo tako da od $n, n, \cdots, n$ oduzmemo $0, 1, 2, \cdots, n-1$.

Izvedite izraze za odgovarajuće sadašnje vrijednosti: $(Da)_{\overline{n}|}, (D\ddot{a})_{\overline{n}|}, (D\bar{a})_{\overline{n}|}, (\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|}$!

Ako je prva isplata P, druga $P-Q$, k-ta $P-(k-1)Q$, s.v. svih takvih uplata je

$$(P+Q)a_{\overline{n}|} - Q(Ia)_{\overline{n}|}.$$

Još na kraju spomenimo da kad se pojavljuje više kamatnih stopa često pišemo $a_{\overline{n}|,i}$, $s_{\overline{n}|,i}$, i slično.

Primjer 2.3.2. *Rente se isplaćuju godišnje unatrag (krajem svake godine). Prva isplata je 8000, a iznos svake sljedeće se umanjuje za 300. Ukupno se vrši 20 isplata. Za $i = 5\%$ nađite s.v. u oznaci X.*
Kolika bi bila s.v. rente ako bi se isti iznosi isplaćivali mjesečno unatrag?

Rješenje: 1. način:

$$X = 8000v + 7700v^2 + 7400v^3 + \cdots + (8000 - 19\cdot 300)v^{20}$$
$$\Longrightarrow \quad (1+i)X = 8000 + 7700v + \cdots + 2300v^{19}.$$

Oduzimanjem slijedi

$$
\begin{aligned}
i\,X &= 8000 - 300(v + v^2 + \cdots + v^{19}) - 2300\,v^{20} \\
\Longrightarrow \quad X &= \frac{1}{i}(8000 - 300\,a_{\overline{19|}} - 2300\,v^{20}) = 70151,28.
\end{aligned}
$$

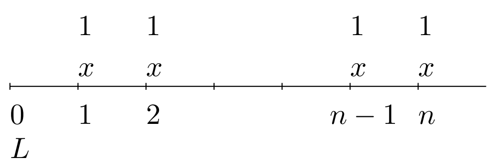
2. način:

$$
\begin{aligned}
X &= 8300(v + v^2 + \cdots + v^{20}) - 300(v + 2v^2 + 3v^3 + \cdots + 20v^{20}), \\
X &= 8300a_{\overline{20|}} - 300(Ia)_{\overline{20|}} = \cdots = 70151,08.
\end{aligned}
$$

◇

2.4 Otplata zajma jednakim anuitetima

Pretpostavimo da u $t = 0$ investitor posudi nekome (dužniku) iznos L u zamjenu za seriju od n uplata u trenucima $t = j$, $j = 1, \ldots, n$. Pretpostavimo da je kamatna stopa i po kojoj je zajam ponuđen konstantna, i da dužnik u trenucima $1, 2, \ldots, n$ otplaćuje jednake iznose (anuitete) x.



S F_r označimo ukupan ostatak duga neposredno nakon uplate r-tog iznosa x u trenutku $t = r$, $\quad r = 1, 2, \ldots, n$ (tj. F_r je vrijednost u trenutku t svih neuplaćenih anuiteta). Uz oznaku $F_0 = L$, imamo, $F_1 = (1 + i)\,F_0 - x$ itd., tj. vrijedi

$$
F_{r+1} = (1 + i)\,F_r - x\,. \tag{2.4.1}
$$

U iznosu F_r, kao ostatku duga u $t = r$, primijetimo da je iznos kamata jednak 0 (prispjele kamate su u potpunosti otplaćene anuitetom x) – kamate će se nagomilati od r do $r+1$ u iznosu $i\,F_r$. Iznos x se sastoji od prispjelih kamata ($i\,F_r$) i dijela glavnice (zajma).

S f_r označimo dio iznosa zajma (dio glavnice [4]) u anuitetu x uplaćenom u trenutku $t = r$; tada je

$$
x = x_{r+1} = i\,F_r + f_{r+1}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n-1.
$$

Odatle i iz (2.4.1) imamo:

$$
f_{r+1} = F_r - F_{r+1}.
$$

Ako od $F_r = (1 + i) \cdot F_{r-1} - x$ oduzmemo (2.4.1) dobivamo

$$
F_r - F_{r+1} = (i + 1)(F_{r-1} - F_r) \quad \Longrightarrow \quad f_{r+1} = (1 + i)f_r.
$$

Kako sadašnja vrijednost svih anuiteta x mora biti jednaka zajmu L, imamo (vidi Financijske rente) da je $L = x \cdot a_{\overline{n|}}$. Iz čega slijedi izraz za anuitet plativ krajem 'godine'.

$$
x = \frac{L}{a_{\overline{n|}}} = L \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}\,. \tag{2.4.2}
$$

[4] Otplaćeni dio glavnice se u nekoj literaturi naziva i 'otplatna kvota'.

Ukupne kamata koja se plati tokom otplate zajma (cijena zajma) je

$$n \cdot x - L = n \cdot x - a_{\overline{n}|} x = x(n - a_{\overline{n}|}) \, .$$

Primjedba. *U drugoj literaturi, često se anuitet izražava u ovisnosti od dekurzivnog kamatnog faktora $R = (1+i)$. Tada (2.4.2) poprima poznatiji oblik*

$$x = L \cdot R^n \, \frac{R-1}{R^n - 1} \, .$$

Odnosno, ako se uplate vrše p puta u jediničnom intervalu (godišnje), tijekom n jediničnih intervala, tada, uz oznaku $m = p\,n$, gdje je m broj uplata; imamo izraz za anuitet x :

$$x = L \cdot R^{\frac{m}{p}} \, \frac{R^{\frac{1}{p}} - 1}{R^{\frac{m}{p}} - 1} = L \cdot R^n \, \frac{R^{\frac{1}{p}} - 1}{R^n - 1} \, . \tag{2.4.3}$$

Primjer 2.4.1. *Zajam od 100000, na 5 godina, uz kamatnu stopu od 6% otplaćuje se tjedno. Uz pretpostavku da 1 godina ima točno 52 tjedna treba naći iznos (tjednog) anuiteta. Za koliko % se poveća anuitet kada k.s. skoči na 8%?*

Rješenje: Uzmimo za jedinični interval jedan tjedan. Tada u 5 godina imamo $n = 5 \cdot 52 = 260$ jediničnih intervala, a kamatna stopa na jediničnom intervalu je

$$i = (1 + 0,06)^{\frac{1}{52}} - 1 = 0,0011211.$$

Nadalje je,

$$v^{260} = 0,7472581, \quad a_{\overline{260}|} = \cdots = 225,44.$$

Tada iz (2.4.2) slijedi da je tjedni anuitet $x = 443,58$.
Za 5 godina se ukupno plati

$$260 \cdot 443,58 = 115330,8.$$

Cijena uzimanja zajma je $115330,8 - 100000 = 15330,8$.

Za $i = 8\%$ anuitet je 463.69, tj. anuitet se poveća za 4.54%.

2. način: Ako bismo koristili prethodnu primjedbu imamo $p = 52\,, m = 5\,, n = 260\,, R = 1.06\,$, te iz (2.4.3) dobivamo da je $x = 443,60\,$. ◇

Tablica plana otplate

Sada se može konstruirati tablica plana otplate koja pokazuje koji dio anuiteta (otplate) x u svakom trenutku r, $r = 1, 2, \ldots, n$, se odnosi na kamate, a koji dio otplaćuje glavnicu (zajam), kao i koliki je ostatak duga.

Neposredno nakon što je r-ta uplata učinjena, preostaje $n - r$ nepodmirenih uplata i u tom trenutku ostatak duga je

$$F_r = x \cdot a_{\overline{n-r}|}. \tag{2.4.4}$$

Tada iznos dijela zajma otplaćenog u $t = r$ je

$$f_r = F_{r-1} - F_r = x \cdot a_{\overline{n-r+1}|} - x \cdot a_{\overline{n-r}|} = x \cdot v^{n-r+1}, \tag{2.4.5}$$

a iznos prispjelih kamata u trenutku r plaćenih u anuitetu x u trenutku r, je

$$k_r = x - f_r.$$

Investitorov plan otplate za $x = 1$ (za $x \neq 1$ veličine su proporcionalne) prikazan je sljedećom tablicom:

	k_r	f_r	F_r
redni broj otplate (r)	kamate plaćene u r-toj otplati	dio zajma otplaćenog u r-toj otplati	ostatak duga nakon r-te otplate
0	$\ldots$	$\ldots$	$a_{\overline{n}\rvert}$
1	$i \cdot a_{\overline{n}\rvert} = 1 - v^n$	v^n	$a_{\overline{n}\rvert} - v^n = a_{\overline{n-1}\rvert}$
2	$i \cdot a_{\overline{n-1}\rvert} = 1 - v^{n-1}$	v^{n-1}	$a_{\overline{n-1}\rvert} - v^{n-1} = a_{\overline{n-2}\rvert}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	$i \cdot a_{\overline{n-r+1}\rvert} = 1 - v^{n-r+1}$	v^{n-r+1}	$a_{\overline{n-r+1}\rvert} - v^{n-r+1} = a_{\overline{n-r}\rvert}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$i \cdot a_{\overline{2}\rvert} = 1 - v^2$	v^2	$a_{\overline{2}\rvert} - v^2 = a_{\overline{1}\rvert}$
n	$i \cdot a_{\overline{1}\rvert} = 1 - v^1$	v	$a_{\overline{1}\rvert} - v = a_{\overline{0}\rvert} = 0$
Ukupno	$n - a_{\overline{n}\rvert}$	$a_{\overline{n}\rvert}$	

Tablica 2. $x_r = x = f_r + k_r$

Primjer 2.4.2. *Zajam od* 10000 *će biti vraćen u* 10 *godina, s jednakim anuitetima plativim mjesečno unazad (krajem mjeseca). Iznos mjesečne otplate je računat na osnovi efektivne kamatne stope od* $12,6825\%$ *(*1% *mjesečno). Treba naći:*

(a) iznos mjesečne otplate?

(b) Ukupni otplaćeni dio zajma i kamate plaćene u

i) prvoj godini

ii) posljednjoj godini

(c) Nakon koje po redu otplate će ostatak duga biti manji od 5000? (Planom otplate s jednakim vremenskim anuitetima u jednakim vremenskim razmacima se uvijek pri svakoj otplati u potpunosti otplate sve do tada prispjele kamate, plus neki dio zajma.)

(d) *Kada će (pri kojoj po redu otplati) u anuitetu, dio kojim se otplaćuje zajam biti veći od dijela kojim se otplaćuju prispjele kamate?*

Rješenje: Odaberimo 1 mjesec kao našu jedinicu vremena! Tada je $i = 1\% = 0.01$.

(a) $L = 10000$, iz (2.4.2) slijedi

$$\begin{aligned} x &= \frac{L}{a_{\overline{120|}}} = \frac{10000}{69.7005} = 143.47, \\ a_{\overline{120|}} &= \frac{1 - v^{120}}{0.01}, \\ v &= (\frac{1}{1.01})^{120} \\ &\Longrightarrow \quad a_{\overline{120|}} = 69.7005. \end{aligned}$$

Primijetimo da je totalna otplata u 1. godini $12 \cdot 143.47 = 1721.64$.

(b)(i) *1. pristup:* Ostatak zajma na kraju 1. godine (neposredno nakon 12-te otplate) je jednostavno vrijednost ostalih uplata u tom trenutku ($r = 12$) tj.

$$x \cdot a_{\overline{108|}} = 9448.62, \text{ pri } i = 1\%.$$

To znači da je ukupno otplaćeni dio zajma u prvoj godini

$$10000 - 9448.62 = 551.38,$$

odnosno, kamate plaćene u prvoj godini su $1721.64 - 551.38 = 1170.26$.

2. pristup: Dio zajma otplaćenog u prvom obroku je

$$143.47 - 10000 \cdot 0.01 = 43.47.$$

Budući da se radi o otplati jednake anuitetima, iznosi otplate zajma u svakom anuitetu čine geometrijski niz s kvocijentom $(1+i)$, tj. 1.01. Prema 3. stupcu tablice plana otplate slijedi

$$a_1 = x\, v^n = 43.47, \;\; a_r = a_{r-1} \cdot q, \;\; q = 1.01$$

tj.

$$a_1 = 43.47, \;\; a_2 = a_1 \cdot 1.01, \;\ldots, \; a_r = a_1 \cdot (1.01)^{r-1}.$$

Zato je suma prvih 12 dijelova u otplati koji se odnosi na otplatu zajma

$$43.47 \cdot s_{\overline{12|}} = 551.31.$$

(b)(ii) Dio zajma otplaćen u posljednjoj godini je jednostavno ostatak duga neposredno nakon 108 otplate, tj. na startu posljednje godine. To je

$$143.47 \cdot a_{\overline{12|}} = 1614.77.$$

Kamate plaćene u toj godini su $1721.64 - 1614.71 = 106.87$.

(c) Poslije otplate u r-tom mjesecu ostatak duga na zajam je $143.47 \cdot a_{\overline{120-r}|}$. Iz nejednadžbe

$$143.47 \cdot a_{\overline{120-r}|} \leq 5000$$

slijedi

$$a_{\overline{120-r}|} \leq 34.85 \quad \text{pri} \quad i = 1\%\,.$$

Kako je $a_{\overline{43}|} = 34.81$ i $a_{\overline{44}|} = 35.4555$, ostatak duga na zajam je prvi puta manji od 5000 za

$$120 - r = 43$$

pa je $r = 77$.

(d) r-ta otplata zajma (dio otplate x u $t = r$) je $43.47 \cdot (1.01)^{r-1}$. Želimo znati za koji $r \in \{1, \ldots, n\}$ je taj iznos prvi puta veći od polovice mjesečne otplate x. Tj. za koji najmanji r vrijedi:

$$43.47 \cdot (1.01)^{r-1} > \frac{143.47}{2}.$$

Odavde je

$$r - 1 > \frac{\ln 1.6502}{\ln 1.01} = 50.34.$$

Dakle, tražena vrijednost je 52!

◇

Primjedba. *Ispodgodišnja efektivna kamatna stopa:* $[0,1]$, $p \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{p}$ *- duljina ispodgodišnjeg intervala za koju tražimo efektivnu kamatu. (Npr.* $\left[0, \frac{1}{p}\right]$, $\left[\frac{r-1}{p}, \frac{r}{p}\right]$, $r \in \{1, \ldots, p\}$.*) Označimo traženu efektivnu kamatnu stopu s* $i'_{\frac{1}{p}}$.

Mora biti

$$(1 + i'_{\frac{1}{p}})^p = (1 + i)$$

da bi $i'_{\frac{1}{p}}$ *bio ekvivalentan s* i*, tj.*

$$i'_{\frac{1}{p}} = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 = \sqrt[p]{1+i} - 1. \tag{2.4.6}$$

Uspoređujući s (1.3.4) slijedi da je

$$i'_{\frac{1}{p}} = \frac{i_{\frac{1}{p}}}{p} = \frac{i^{(p)}}{p}, \tag{2.4.7}$$

tj. ispodgodišnja efektivna kamatna stopa $i'_{\frac{1}{p}}$*, ekvivalentna je godišnjoj efektivnoj kamatnoj stopi* i*, jednaka je odgovarajućoj godišnjoj nominalnoj kamatnoj stopi plativoj* p *puta godišnje, podijeljenoj s brojem ispodgodišnjeg intervala* p.

Za bilo koji interval duljine t *vrijedi da je efektivna kamatna stopa* i'_t *koja se odnosi na taj interval, a ekvivalentna je godišnjoj efektivnoj kamatnoj stopi* i*, dana sa:*

$$i'_t = (1+i)^t - 1. \tag{2.4.8}$$

Zadaci i rješenja

Zadaci

Zadatak 1. *Dužnik je suglasan da kredit u iznosu 3000 otplati s 15 godišnjih uplata u iznosu 500 od kojih prva dospijeva 5 godina od sada. Nađite prinos ove transakcije.*

Zadatak 2. *Dokažite da vrijedi* $\frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$, $n \in \mathbf{N}$*!*

Zadatak 3. *Odredite onu konstantnu efektivnu kamatnu stopu uz koju se iznos C investiran na rok od 11 godina utrostruči.*

Zadatak 4. *U zamjenu za jednokratnu uplatu u iznosu 1000 banka nudi opcije:*

(a) Jednokratnu isplatu u iznosu 1330 nakon 3 godine.

(b) Jednokratnu isplatu u iznosu 1550 nakon 5 godina.

(c) Četiri godišnje isplate, svaku u iznosu 425 od kojih prva dospijeva nakon 5 godina.

Nađite prinos svake od ovih transakcija.

Pretpostavimo da investitor odabere plan (a) te da isplaćenu svotu reinvestira uz fiksnu kamatnu stopu. Kolika mora biti ta stopa da bi nakon 2 godine akumulacije iznosila 1550?

Pretpostavimo da investitor odabere plan (b) te da nakon isplate odluči kupiti "prenumerando" rentu plativu tokom 4 godine. Koliko bi trebala biti kamatna stopa da bi iznos te rente bio 425?

Zadatak 5. *Neka se u danom planu štednje premija plaća godišnje unaprijed u iznosu X tokom n godina. Za uzvrat investitor dobiva m godišnjih isplata u iznosu Y s tim da prva isplata dospijeva 1 godinu nakon zadnje uplate.*

(a) Napišite jednadžbu vrijednosti.

(b) Neka je $X = 1000$, $Y = 2000$, $n = 10$. *Odredite prinos na transakciju za* $m = 10$.

(c) Za koje m, uz X, Y, n kao u (b), će prinos na transakciju biti između 8 i 10 %?

Zadatak 6. *Postnumerando rente se plaća 20 godina; prvih 6 godina u iznosu 5, daljnjih 9 godina u iznosu 7 i preostalih 5 godina u iznosu 10. Pokažite da je vrijednost u trenutku prve uplate*

$$10a_{\overline{19}|} - 3a_{\overline{14}|} - 2a_{\overline{5}|} + 5.$$

Zadatak 7. *Prenumerando godišnja renta se plaća n godina, prva isplata je u iznosu 1, a svaka sljedeća je za faktor $(1+r)$ veća od prethodne. Dokažite da je uz fiksnu godišnju kamatnu stopu i sadašnje vrijednost takve rente jednaka*

$$\ddot{a}_{\overline{n}|,j}\,, \quad \text{gdje je } j = \frac{i-r}{1+r}.$$

Odredite i sadašnju vrijednost takve postnumerando rente.

U zamjenu za jednokratnu uplatu iznosa 10 000 osoba će primati rentu godišnje unatrag s tim da je svaka isplata 5% veća od prethodne.

Za $i = 9\%$ odredite iznos prve isplate.

Zadatak 8. *Investitor uplaćuje 20 premija godišnje unaprijed. Nakon 20 godina primit će akumulirani iznos svojih uplata. Taj je izračunat na bazi $i = 8\%$ za prvih 5 godina, $i = 6\%$ za idućih 7, te $i = 5\%$ za završnih 8 godina. Nađite iznos isplate ako je svaka uplata iznosila 100. Izračunajte i prinos na transakciju.*

Rješenja

1. Jednadžba vrijednosti je

$$3000 = 500(v^5 + \cdots + v^{19}) = 500(a_{\overline{19}|} - a_{\overline{4}|}) = 500(\ddot{a}_{\overline{20}|} - \ddot{a}_{\overline{5}|})$$

ili pak

$$3000 = 500v^5(1 + \cdots + v^{14}) = 500v^5\ddot{a}_{\overline{15}|}.$$

Sve zajedno

$$6 = v^5\frac{1-v^n}{1-v} = v^5\frac{1-v^{15}}{1-v}.$$

Prvi teorem u ovom poglavlju jamči da imamo jedinstveno rješenje. Uočimo inače da je desna strana očito padajuća funkcija. Rješenje možemo aproksimirati po volji dobro. Računamo desnu stranu:

Za $i = 8\%$ dobivamo 6.29147.

Za $i = 9\%$ dobivamo 5.71039.

Linearna interpolacija daje cca $i = 8.5\%$.

2. Vrijedi

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i = \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} = \frac{i}{1-v^n} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}.$$

3. $C(1+i)^{11} = 3\,C$, $i = \sqrt[11]{3} - 1$, $i = 10.5\%$.

4. Jednadžbe vrijednosti glase:

$$\begin{aligned}
-1000 + 1330v^3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 1000(1+i)^3 = 1330\\
&\Rightarrow \quad i = 0.0997\,,\ \text{odnosno} \quad 9.97\%\\
-1000 + 1550v^5 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 1000(1+i)^5 = 1550\\
&\Rightarrow \quad i = 0.0916\,,\ \text{odnosno} \quad 9.16\%\\
-1000 + 425a_{\overline{4}|}v^4\,, \quad & \quad \text{odnosno} \quad 1000(1+i)^4 = 425a_{\overline{4}|}\,.
\end{aligned}$$

Opet pogađamo i linearno interpoliramo; treba nam $\dfrac{(1+i)^4}{a_{\overline{4}|}} = 0.425$. Kako

$$i = 8\% \quad \text{daje} \quad 0.41076,$$
$$i = 9\% \quad \text{daje} \quad 0.43571,$$

interpolacija daje $i = 8.57\%$. (Primijetimo da $v^4 a_{\overline{4}|}$ po definiciji pogodbe daje : kad i raste s.v. mora padati).

Označimo novu stopu s j. Mora biti $1330(1+j)^2 \geq 1550$ što daje $j \geq 0.07954$.

U trećem slučaju opet označimo novu kamatnu stopu s j. Treba biti

$$425\ddot{a}_{\overline{3}|,j} \leq 1550$$

(veća kamatna stopa $\rightarrow$ jeftinija renta). Pišemo

$$\ddot{a}_{\overline{3}|,j} = 1 + a_{\overline{3}|,j} \leq \frac{1550}{425} = 3.64706 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{\overline{3}|,j} \leq 2.64706.$$

Vrijedi

$$a_{\overline{3}|,6\%} = 2.6730\,, \qquad a_{\overline{3}|,7\%} = 2.6243.$$

Interpolacija daje $j = 6.53265\%$.

5. U trenutku 1 godine prije prve uplate je

$$-X\, a_{\overline{n}|} + Y\,{}_{n}|a_{\overline{m}|} = 0.$$

Dakle je

$$-X a_{\overline{n}|} + Y(a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{n}|}) = 0$$

(jasno, moguće je ovo izraziti i u terminima $\ddot{a}_k$ i slično).

U (b) imamo

$$Y a_{\overline{m+n}|} - (X+Y)a_{\overline{n}|} = 0\,, \quad \text{odnosno} \quad 2000a_{\overline{20}|} - 3000a_{\overline{10}|} = 0.$$

Linearnom interpolacijom slijedi $i = 7.19\%$.

Jasno je po zdravom razumu: ako je $n = 10$ fiksirano onda kako m raste, raste i prinos na transakciju. Za $m = 12$ prvi puta prijeđemo 8% , sad se vidi $m \in [12, 16]$.

6. Vrijednost u trenutku prve isplate je

$$\begin{aligned}
5\ddot{a}_{\overline{6}|} + 7\,{}_{6}|\ddot{a}_{\overline{9}|} + 10\,{}_{15}|\ddot{a}_{\overline{5}|} &= 5\ddot{a}_{\overline{6}|} + 7(\ddot{a}_{\overline{15}|} - \ddot{a}_{\overline{6}|}) + 10(\ddot{a}_{\overline{20}|} - \ddot{a}_{\overline{15}|}) \\
&= 10\ddot{a}_{\overline{20}|} - 3\ddot{a}_{\overline{15}|} - 2\ddot{a}_{\overline{6}|} \\
&= 10(1 + a_{\overline{19}|}) - 3(1 + a_{\overline{14}|}) - 2(1 + a_{\overline{5}|}) \\
&= 10a_{\overline{19}|} - 3a_{\overline{14}|} - 2a_{\overline{5}|} + 5\,.
\end{aligned}$$

7. Označimo traženu vrijednost s $\ddot{a}_{\overline{n}|,i,r}$, odnosno $a_{\overline{n}|,i,r}$. Vrijedi

$$\ddot{a}_{\overline{n}|,i,r} = 1 + (1+r)(1+i)^{-1} + (1+r)^2(1+i)^{-2} + \cdots + (1+r)^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}.$$

Označimo $\dfrac{1+i}{1+r} = 1+j$, dakle

$$\frac{1+i}{1+r} = \frac{1+i-r+r}{1+r} = 1 + \frac{i-r}{1+r} = 1+j,$$

dakle, $j = \dfrac{i-r}{1+r}$. Slijedi

$$\ddot{a}_{\overline{n}|,i,r} = 1 + (1+j)^{-1} + \cdots + (1+j)^{-(n-1)} = \ddot{a}_{\overline{n}|,j},$$
$$a_{\overline{n}|,i,r} = (1+i)^{-1} + (1+r)(1+i)^{-2} + \cdots + (1+r)^{-(n-1)}(1+i)^{-n} = \frac{1}{1+r} a_{\overline{n}|,j}.$$

Ovdje je izraz malo kompliciraniji od prethodnog, ali još uvijek je lagan.

Neka je prva isplata X. Jednadžba vrijednosti je

$$10000 = X\,\frac{1}{1,05} a_{\overline{20}|,j}, \quad 1+j = \frac{1+i}{1+r} = \frac{1,09}{1,05} = 1,0381, \quad j = 3,81\,.$$

Opet linearnom interpolacijom dobijemo rezultat $X = 758,95$.

8. Akumulacija nakon 5 godina $100\,\ddot{s}_{\overline{5}|,8\%}$, akumulacija nakon 12 godina

$$100\,\ddot{s}_{\overline{5}|,8\%} \cdot 1,06^7 + 100\,\ddot{s}_{\overline{7}|,6\%};$$

ukupna akumulacija

$$100(\ddot{s}_{\overline{5}|,8\%} \cdot 1,06^7 \cdot 1,05^8 + \ddot{s}_{\overline{7}|,6\%} \cdot 1,05^8 + \ddot{s}_{\overline{8}|,5\%}) = 3724,77.$$

Prinos na transakciju i dobijemo rješavanjem jednadžbe

$$100\,\ddot{s}_{\overline{20}|i} = 3724,77$$

(izjednačavanjem vrijednosti u trenutku isplate). Rezultat je $i = 5,59\%$.

3 Nominalne kamatne stope i necjelobrojne funkcije

3.1 Kamate plative p puta godišnje

Nadalje, opet pretpostavimo da je efektivna kamatna stopa i fiksna. Neka je p prirodan broj, gledat ćemo transakcije koje se odvijaju p puta godišnje u jednakim razmacima duljine $1/p$.

Definirali smo u 1. poglavlju nominalnu kamatnu stopu $i^{(p)}$ konvertibilnu (plativa) p puta godišnje relacijom

$$A\big(0,\frac{1}{p}\big) = A\big(t,t+\frac{1}{p}\big) = 1+\frac{1}{p}i^{(p)}, \quad \forall t.$$

Pokazali smo da vrijedi (1.3.4) tj.

$$\Big(1+\frac{i^{(p)}}{p}\Big)^p = 1+i\,, \quad \text{odnosno} \qquad i^{(p)} = p\big((1+i)^{\frac{1}{p}}-1\big).$$

Veličine $i^{(p)}$ možemo opisati i alternativno. Zamislimo da dužnik koji je uzeo zajam u iznosu 1 u trenutku 0 svoju kamatu želi platiti u p jednakih obroka u trenucima

$$\frac{1}{p},\frac{2}{p},...,\frac{p-1}{p},\frac{p}{p}=1.$$

Tvrdimo da je ukupni iznos $i^{(p)}$, tj. svaka "rata" je $\dfrac{1}{p}\,i^{(p)}$: tada bi trebalo vrijediti (izjednačavanjem vrijednosti u $t=1$)

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{i^{(p)}}{p}(1+i)^{\frac{p-j}{p}} = i, \tag{3.1.1}$$

a provjera je jednostavna

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{i^{(p)}}{p}(1+i)^{\frac{p-j}{p}} = \Big|p-j=k\Big| = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{i^{(p)}}{p}\Big((1+i)^{\frac{1}{p}}\Big)^k = \frac{i^{(p)}}{p}\frac{\big((1+i)^{\frac{1}{p}}\big)^p-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} = \frac{i^{(p)}}{p}\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} = i.$$

Sad možemo zamisliti i analogni manevar. Zamislimo da se kamata želi otplatiti u p jednakih obroka, ali u trenucima

$$0,\frac{1}{p},...,\frac{p-1}{p}.$$

Označimo ukupnu otplatu s $d^{(p)}$, tako da je svaka "rata" jednaka $\frac{1}{p}\,d^{(p)}$. Inače, sjetimo se da je, po našoj analizi, odnosno interpretaciji jednakosti $d=iv$, $d^{(1)}=d$. Izjednačimo vrijednosti u $t=0$ dobivamo

$$\frac{d^{(p)}}{p}(1+v^{\frac{1}{p}}+v^{\frac{2}{p}}+...+v^{\frac{p-1}{p}}) = d \tag{3.1.2}$$

$$\Longrightarrow \quad d = \frac{d^{(p)}}{p}\frac{1-(v^{\frac{1}{p}})^p}{1-v^{\frac{1}{p}}} = \frac{d^{(p)}}{p}\frac{1-v}{1-v^{1/p}} = \frac{d^{(p)}}{p}\frac{d}{1-(1-d)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\Longrightarrow \quad d^{(p)} = p\big[1-(1-d)^{1/p}\big] = \frac{i^{(p)}}{1+\frac{i^{(p)}}{p}} \tag{3.1.3}$$

$$\Big(1-\frac{d^{(p)}}{p}\Big)^p = 1-d.$$

$d^{(p)}$ se zove **nominalna diskontna (anticipativna) kamatna stopa plativa**(konvertibilna) **p puta godišnje.**

Uočimo da svake od veličina i, $i^{(p)}$, d, $d^{(p)}$ definira ostale. Iz svega što je rečeno sljedeća shema predstavlja ekvivalente načine plaćanja kamate.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & \frac{1}{p} & \frac{2}{p} & \frac{3}{p} & \frac{p-1}{p} & 1 \\
\hline
d & & & & & \\
\frac{d^{(p)}}{p} & \frac{d^{(p)}}{p} & \frac{d^{(p)}}{p} & \frac{d^{(p)}}{p} & \frac{d^{(p)}}{p} & \\
 & \frac{i^{(p)}}{p} & \frac{i^{(p)}}{p} & \frac{i^{(p)}}{p} & \frac{i^{(p)}}{p} & \frac{i^{(p)}}{p} \\
 & & & & & i \\
\multicolumn{6}{c}{\longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\;\delta\;-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow}
\end{array}$$

Primjer 3.1.1. *Neka je nominalna kamatna stopa* 12% *godišnje, plativa kvartalno. Tada je sadašnja vrijednost od iznosa* 1 *koji dospijeva za* t *godina jednak*

$$(1+i)^{-t} = [1 + \frac{i^{(4)}}{4}]^{-4t} = (1 + \frac{0,12}{4})^{-4t} = 1,03^{-4t}\,.$$

$\diamond$

Primjer 3.1.2. *Za dani* $\delta = 0,1$ *nađite vrijednosti:*

(i) $i, i^{(4)}, i^{(12)}, i^{(52)}, i^{(365)}$

(ii) $d, d^{(4)}, d^{(12)}, d^{(52)}, d^{(365)}$

Rješenje:

(i) $i^{(p)} = p[(1+i)^{1/p} - 1] = p[e^{\delta/p} - 1] = p[e^{0,1/p} - 1]$

(ii) $d^{(p)} = p[1 - (1-d)^{1/p}] = p[1 - e^{-\delta/p}] = p[1 - e^{-0,1/p}]$

p	1	4	12	52	365
$i^{(p)}$	$0,105171$	$---$	$0,100418$	$---$	$0,100014$
$d^{(p)}$	$0,095163$	$0,098760$	$---$	$---$	$0,099986$

$\diamond$

Sjetimo se da smo pokazali (vidi (1.4.11)) da vrijedi

$$i = i^{(1)} > i^{(2)} > i^{(3)} > \cdots\,.$$

Uočimo da je jasno $d^{(p)} < i^{(p)}, \forall p$ (jer se $\frac{d^{(p)}}{p}$ plaća ranije nego $\frac{i^{(p)}}{p}$, a jednak je broj plaćanja). Kako je $d = i\,v$ iz (3.1.1) i (3.1.2) slijedi da je

$$d^{(p)} = i^{(p)} \cdot v^{1/p}\,. \tag{3.1.4}$$

Dalje, sjetimo se da smo imali $v = e^{-\delta},\ d = 1 - v$,

$$i^{(p)} = p\left(e^{\delta/p} - 1\right), \tag{3.1.5}$$

a sad isto lagano dobijemo iz (3.1.3)

$$d^{(p)} = p\left(1 - e^{-\delta/p}\right). \tag{3.1.6}$$

Sad se može analizirati funkcija

$$g(x) = x(1 - e^{-\frac{\delta}{x}}), \quad x \geq 0,\ \delta = konst.$$

Pokazuje se da je rastuća i to odmah povlači

$$\cdots > d^{(3)} > d^{(2)} > d^{(1)} = d. \tag{3.1.7}$$

Dalje, kako je

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{\delta}{x}} - 1) = \delta \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} x(1 - e^{-\frac{\delta}{x}}) = \delta$$

(oboje ide L'Hospitalovim pravilom) slijedi

$$\lim_{p\to\infty} i^{(p)} = \delta, \quad \lim_{p\to\infty} d^{(p)} = \delta.$$

(prvu relaciju znamo otprije) i kako su to limesi padajućeg, odnosno rastućeg niza to su njihovi infimum, odnosno supremum.

Zaključujemo

$$i = i^{(1)} > i^{(2)} > i^{(3)} > \cdots > \delta > \cdots > d^{(p)} > \cdots > d^{(3)} > d^{(2)} > d^{(1)} = d. \tag{3.1.8}$$

Dalje,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d^{(p)}} - \frac{1}{i^{(p)}} &= \frac{1}{p(1-(1-d)^{\frac{1}{p}})} - \frac{1}{p((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1)} \\
&= \frac{1}{p(1-v^{\frac{1}{p}})} - \frac{1}{p((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1)} \\
&= \frac{1}{p(1-(1+i)^{-\frac{1}{p}})} - \frac{1}{p((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1)} \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{(1+i)^{\frac{1}{p}}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} - \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}\right) = \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Dakle je (iznenađujuće, neovisno o i)

$$\frac{1}{d^{(p)}} - \frac{1}{i^{(p)}} = \frac{1}{p}. \tag{3.1.9}$$

3.2 Rente koje se isplaćuju p puta godišnje

Uzmimo rentu koja se isplaćuje p puta godišnje, postnumerando, u godišnjem iznosu 1, tijekom n godina, dakle u intervalu $[0, n]$; dakle dijagram je

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \frac{1}{p} & \frac{1}{p} & \cdots & \frac{1}{p} & \frac{1}{p} & \cdots & \frac{1}{p} \\
\hline
0 & \frac{1}{p} & \frac{2}{p} & \cdots & 1 & \frac{p+1}{p} & \cdots & n
\end{array}$$

Sadašnja vrijednost je

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{i}{i^{(p)}}\, a_{\overline{n}|}. \tag{3.2.1}$$

Naime, uplate/isplate u trenucima $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}, 1$ u iznosu $\frac{i^{(p)}}{p}$ vrijede u $t = 1$ točno i (vidi (3.1.1)). Tada uplata/isplata u tim trenucima u iznosu $1/p$ u trenutku $t = 1$ vrijede točno $i/i^{(p)}$. Dakle, situaciju koju imamo vidimo iz sljedećeg dijagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & i/i^{(p)} & i/i^{(p)} & \cdots & i/i^{(p)} \\
\hline
0 & 1 & 2 & \cdots & n
\end{array}$$

Alternativno, koristeći osnovne principe možemo doći do jednakosti (3.2.1). Naime,

$$\begin{aligned}
a_{\overline{n}|}^{(p)} = \sum_{t=1}^{np} \frac{1}{p}\, v^{\frac{t}{p}} \quad &= \quad \frac{1}{p}\, v^{\frac{1}{p}} \frac{v^n - 1}{v^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{1 - v^n}{p\,(v^{-\frac{1}{p}} - 1)} = \frac{1 - v^n}{p\,((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1)} \\
&= \quad \frac{1 - v^n}{i^{(p)}} = \frac{1 - v^n}{i} \frac{i}{i^{(p)}} = \frac{i}{i^{(p)}}\, a_{\overline{n}|}.
\end{aligned}$$

Definicija simbola $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$ je analogna. Prvim principom dobijemo

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{i}{d^{(p)}} a_{\overline{n}|}\,. \tag{3.2.2}$$

Zapišimo i alternativne formule koje smo dobili putem

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1 - v^n}{i^{(p)}}\,, \tag{3.2.3}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1 - v^n}{d^{(p)}}\,. \tag{3.2.4}$$

Napomena: Ukoliko se isplaćuje p puta godišnje u godišnjem iznosu C, tada se s.v. svih uplata dobije tako da se s C pomnože jednakosti (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) i (3.2.4).

Iz dijagrama još vidimo $a_{\overline{n}|}^{(p)} = v^{\frac{1}{p}}\, \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$ i također

$$i\, a_{\overline{n}|} \overset{(3.2.1)}{=} i^{(p)} a_{\overline{n}|}^{(p)} = i^{(p)} v^{\frac{1}{p}}\, \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} = d^{(p)}\, \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} \overset{(3.2.4)}{=} 1 - v^n. \tag{3.2.5}$$

Nastavljajući dalje dobivamo

$$i\, a_{\overline{n}|} = 1 - v^n \overset{(2.3.2)}{=} d\, \ddot{a}_{\overline{n}|} \overset{(2.3.9)}{=} \delta\, \bar{a}_{\overline{n}|}\,. \tag{3.2.6}$$

Kad u prethodnim relacijama uvažimo $\lim\limits_{p\to\infty} i^{(p)} = \lim\limits_{p\to\infty} d^{(p)} = \delta$ slijedi

$$\lim_{p\to\infty} a^{(p)}_{\overline{n}|} = \lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \bar{a}_{\overline{n}|} \overset{(2.3.9)}{=} \frac{1-v^n}{\delta}\,, \tag{3.2.7}$$

što je i intuitivno jasno; kad $p \to \infty$ isplate se kontinuiraju. (Sjetimo se da je $\delta = \ln(1+i)$.)

Lako bi dobili i akumulacije a također i odgođene rente. Za vječne ispodgodišnje rente imamo:

$$a^{(p)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i^{(p)}}\,, \tag{3.2.8}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d^{(p)}}\,. \tag{3.2.9}$$

Specijalno,

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{\infty}|} - a^{(p)}_{\overline{\infty}|} \overset{(3.1.9)}{=} \frac{1}{p},$$

što je opet i intuitivno jasno.

3.3 Rente koje se isplaćuju u intervalima dužim od godišnjih

Ovdje ćemo opet primijeniti tehniku kojom smo izveli izraze za sadašnje vrijednosti $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ i $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$. Fiksirajmo $r \in \mathbf{N}$ i promotrimo seriju isplata koje se događaju svakih r godina, dakle u vremenskim točkama $r, 2r, 3r, \ldots, kr$, $k \in \mathbf{N}$ fiksan.

Ideja je da iznos koji se isplaćuje svakih r godina, recimo X, zamijenimo odgovarajućim iznosom Y koji bi se plaćao svake godine, ali tako da vrijednost bude ista.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & X & & & & X & & & & X \\
 & Y & Y & \cdots & Y & Y & \cdots & Y & Y & Y & \cdots & Y & Y \\
\hline
0 & 1 & 2 & \cdots & r & r+1 & \cdots & & 2r & & \cdots & & kr
\end{array}$$

Po definiciji akumulacije u trenutku $t = r$ (nakon r-te isplate iznosa Y) vrijedi:

$$X = s_{\overline{r}|} Y, \quad Y = \frac{1}{s_{\overline{r}|}} X$$

pa je

$$\text{s.v. (svih } k \text{ uplata u iznosu } X) = Y \cdot a_{\overline{kr}|},$$

tj.

$$\text{s.v.} = \frac{X}{s_{\overline{r}|}}\, a_{\overline{k\,r}|} = \frac{1-v^{rt}}{(1+i)^r - 1}\,. \tag{3.3.1}$$

($k\,r$ godina postnumeranto renta u iznosu $\frac{X}{s_{\overline{r}|}}$).

Za vječnu rentu u ovom slučaju imamo

$$\text{s.v.} = \frac{X}{s_{\overline{r}|}} \cdot \frac{1}{i} = \frac{X}{(1+i)^r - 1}.$$

Naravno, to se može dobiti i primjenjujući osnovne principe.

Primjer 3.3.1. *Kupujemo rentu koja će se u godišnjem iznosu 120 plaćati u jednakim iznosima na kraju svakog kvartala tokom 5 godina. Odredite sadašnju vrijednost ako je godišnja kamatna stopa 12%.*

(a) efektivna,

(b) nominalna, plativa polugodišnje,

(c) nominalna, plativa kvartalno,

(d) nominalna, plativa mjesečno.

Rješenje:

(a) Jedinica vremena je jedna godina. $i = 12\%$, $i^{(4)} = 4((1+i)^{1/4} - 1) = 0,1149494$, pa je

$$\text{s.v.} = 120\, a_{\overline{5}|}^{(4)} = 120\, \frac{i}{i^{(4)}}\, a_{\overline{5}|} = 120\, \frac{i}{i^{(4)}}\, \frac{1-v^5}{i} = 451,5795.$$

(b) Ovo je kao da imamo vremensku jedinicu $\frac{1}{2}$ godine i efektivnu kamatnu stopu 6% po jedinici vremena. U toj vremenskoj jedinici imamo postnumerando rentu u iznosu 60 po jedinici vremena koja se isplaćuje 2 puta po jedinici vremena tokom 10 vremenskih jedinica.

$$\text{s.v.} = 60\, a_{\overline{10}|}^{(2)} = 60 \frac{1-v^{10}}{i^{(2)}} = \Big(i = 0,06,\ i^{(2)} = 0,059126 \Big) = 448,1328.$$

(c)

$$30 a_{\overline{20}|}\ (\text{po } 3\%) = 30 \frac{1-v^{20}}{i} = 446,3243\,.$$

(d) Ovdje možemo iskoristiti (3.3.1) pa imamo (iz perspektive rezultata(c) iz kvartalne perspektive)

$$\frac{30}{s_{\overline{3}|}}\, a_{\overline{60}|}\ (\text{po } 1\%)\ = 445,0847\,.$$

$\diamond$

Zadaci i rješenja

Zadaci

Zadatak 1. *Neka je na snazi efektivna kamatna stopa j. Banka A nudi zajam koji se otplaćuje u jednakim godišnjim iznosima na kraju svake godine. Za isti zajam i na isti rok banke B traži iste godišnje iznose, ali zahtijeva da se uplate vrše svake godine u jednakim iznosima koji dospijevaju p puta godišnje, postnumerando. Pokažite da za efektivnu kamatnu stopu i koju koristi banka B vrijedi* $i > \hat{j} = (1 + \frac{j}{p})^p - 1$ *za svaki n (dakle neovisno o broju godina trajanja zajma).*
$\big[$*Uočimo da je* $\hat{j} > j$ *što i mora biti, naime po uvjetima zadatka banka B očito koristi veću kamatnu stopu - jer godišnja uplata je ista u iznosu, no u slučaju B dospijeva ranije.*$\big]$
Odredite i *ako je* $j = 0,08,\ p = 12,\ n = 10.$

Zadatak 2. *Svake 3 godine se uplati 100 na račun koji donosi kamatu po fiksnoj stopi. Nađite akumulirani iznos neposredno prije šeste uplate, ako je*

(a) *kamatna stopa efektivna,* 10% *godišnje,*

(b) *kamatna stopa nominalna,* 10% *godišnje, konvertibilna polugodišnje.*

Zadatak 3. *Neka je efektivna godišnja kamatna stopa* 12%. *Nađite sadašnju vrijednost rente koja se isplaćuje u godišnjem iznosu* 600, *tijekom* 20 *godina.*

(a) *godišnje, postnumerando,*

(b) *kvartalno, postnumerando,*

(c) *mjesečno, postnumerando,*

(d) *kontinuirano.*

Zadatak riješite i kada je zadana nominalna godišnja kamatna stopa 12%, *plativa kvartalno.*

Zadatak 4. *Renta se isplaćuje postnumerando 15 godina, polugodišnje prvih 5 godina, kvartalno idućih 5 godina i mjesečno zadnjih 5 godina. Svakih 5 godina godišnja isplate se udvostručuju. Na bazi nominalne kamatne stope* 8% *plative kvartalno za prve 4 godine, nominalne kamatne stope* 8% *plative polugodišnje za idućih 8 godina, te efektivne kamatne stope* 8% *za zadnje 3 godine, izračunata je sadašnja vrijednost u iznosu 2049. Odredite početni godišnji iznos rente.*

Zadatak 5. *Renta se isplaćuje* 20 *godina, iznos u godini* k *neka je* k^2, $k = 1, 2, \cdots, 20$. *Neka je efektivna kamatna stopa* 5%. *Nađite sadašnju vrijednost ako se renta plaća:*

(a) *godišnje unaprijed,*

(b) *kvartalno unaprijed u jednakim godišnjim iznosima,*

(c) *polugodišnje unatrag u jednakim godišnjim iznosima,*

(d) *kontinuirano uz konstantnu stopu isplate tokom svake godine.*

Zadatak 6. *Dana* 1.11.2005. *investitor je imao pravo na primitak triju renti (od istog društva).*

(1) 200 *godišnje, na dan* 1.2.2006. *do uključivo* 1.2.2027.

(2) 320 *godišnje, plativo kvartalno na dane* 1.1., 1.4., 1.7., 1.10. *svake godine s tim da zadnja isplata dospijeva* 1.1.2022.

(3) 180 *godišnje, plativo mjesečno, početkom svakog mjeseca i zadnjom isplatom na dan* 1.8.2024.

Neposredno nakon primitka mjesečne isplate 1.11.2005. *investitor je podnio zahtjev da se ove* 3 *rente objedine u rentu plativu polugodišnje na dane* 1.2. *i* 1.8. *svake godine s tim da isplata krene* 1.2.2006., *da zadnja isplata bude* 1.2.2027.. *Odredite iznos nove rente ako je* $i = 0.08$.

Rješenja

1. Jasno je da na rezultat ne utječe iznos kredita X već samo ev. broj godine n; to mora pokazati i račun.

Godišnji iznos otplate za oba društva je $\dfrac{X}{a_{\overline{n}|,j}}$; za banku A to daje račun, za banku B uvjet zadatka. Sada je dalje

$$a^{(p)}_{\overline{n}|,i} \cdot \frac{X}{a_{\overline{n}|,j}} = X$$

i ova strana određuje i. Lijeva strana je za zadane j, n, p padajuća funkcija od i jer kako i raste s.v. $a^{(p)}_{\overline{n}|,i}$ očito opada. Zato, ako hoćemo pokazati da vrijedi $i > \hat{j}$, dovoljno je pokazati

$$a^{(p)}_{\overline{n}|,\hat{j}} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|,j}} > 1, \quad \text{tj.} \quad a^{(p)}_{\overline{n}|,\hat{j}} > a_{\overline{n}|,j}.$$

Uočimo da je

$$\hat{j}^{(p)} = p((1+\hat{j})^{\frac{1}{p}} - 1) = j$$

(po definiciji od $\hat{j}$). Zato je

$$a^{(p)}_{\overline{n}|,\hat{j}} = \frac{1-(1+\hat{j})^{-n}}{\hat{j}^{(p)}} = \frac{1-((1+\hat{j})^{\frac{1}{p}})^{-np}}{\hat{j}^{(p)}} = \frac{1-(1+\frac{j}{p})^{-np}}{j}.$$

Sad koristimo

$$(1+\frac{j}{p})^{np} > (1+j)^n,$$

što dolazi od

$$(1+\frac{j}{p})^p > 1+j.$$

Zato, nastavljajući gornji račun nalazimo

$$a^{(p)}_{\overline{n}|,\hat{j}} > \frac{1-(1+j)^{-n}}{j} = a_{\overline{n}|,j}.$$

Posebno, za $j = 0,08$ imamo $a_{\overline{10}|} = 6,7101$ pa sad dakle tražimo i tako da bude $a^{(12)}_{\overline{10}|,i} = 6,7101$. Vidi se da lijeva strana gornje nejednakosti iznosi $6,95273$ za $i = 0,08$ i također 6,67826 za $i = 0,09$. Linearna interpolacija daje $i = 0,0887$.

2. Uplate su po 100 u točkama $t = 0, 3, 6, 9, 12, \ldots$.

(a) Ovdje računamo u godinama. Efekt je kao da računamo s godišnjim uplatama u iznosu $\frac{100}{s_{\overline{3}|}}$. Vrijednost na dan 5. uplate, usitnjeno 15, je

$$\frac{100}{s_{\overline{3}|}} \cdot s_{\overline{15}|};$$

vrijednost 3 godine kasnije - to je vrijeme neposredno prije šeste uplate je

$$\frac{100}{s_{\overline{3}|}} \cdot s_{\overline{15}|} \cdot (1+i)^3 = 100 \cdot (1+i)^3 \cdot \frac{(1+i)^{15}-1}{(1+i)^3-1} = 1277.62\,.$$

(b) Računamo polugodišnje, istim rezoniranjem dobivamo

$$\frac{100}{s_{\overline{6|}}} \cdot s_{\overline{30|}} \cdot (1+i)^6$$

samo što je ovdje $i = 0.05$. Rezultat je 1308.96.

3. $i = 0.12$

Ovdje računamo u kvartalima, stopa je 3%, vrijeme je 20 godina.

(a) $600 \cdot \dfrac{1-v^n}{i} = 4481.67$ $\qquad \dfrac{600}{s_{\overline{4|}}} \cdot a_{\overline{80|}} = 4331.28$

(b) $600 \cdot \dfrac{1-v^n}{i^{(4)}} = 4678.59$ $\qquad 150 \cdot a_{\overline{80|}} = 4530.11$

(c) $600 \cdot \dfrac{1-v^n}{i^{(12)}} = 4723.11$ $\qquad 150 \cdot a^{(3)}_{\overline{80|}} = 4575.13$

(d) $600 \cdot \dfrac{1-v^n}{\delta} = 4745.49$ $\qquad 150 \cdot \dfrac{1-v^{80}}{\delta} = 4597.33$

4. Neka je početni godišnji iznos rente X. Uočimo podintervale $[0,4]$, $(4,5]$, $(5,10]$, $(10,12]$, $(12,15]$.
Na $[0,4]$ jedinični interval je kvartal, a isplata iznosa $X/2$ je polugodišnja (X godišnja). Dakle, imamo rentu koja se isplaćuje svaka 2 jedinična intervala te koristimo (3.3.1), gdje je $r = 2$, a broj uplata $k = 8$. Kamatna stopa na jediničnom intervalu je 2%.
Na $(4,5]$ jedinični interval je polugodište i isplata iznosa $X/2$ je polugodišnja, te koristimo (2.3.1), gdje je $n = 2$. Kamatna stopa na jediničnom intervalu je 4%.
Na $(5,10]$ jedinični interval je polugodište. Na jediničnom intervalu isplačuje se iznos X (godišnje sada $2X$) tako da je isplata iznosa $X/2$ kvartalna. Dakle, imamo rentu koja se isplaćuje u intervalima upola manjim od jedinična intervala te koristimo (3.2.1), gdje je $p = 2$, a $n = 10$. Kamatna stopa na jediničnom intervalu je 4%.
Slično rezoniramo i za preostala dva intervala.
Na $(10,12]$ u jediničnom intervalu (polugodišnje) se isplati $2X$ ($4X$ godišnje) u 6 obroka po $X/3$; $p = 6$, $n = 4$, a $i = 4\%$.
Na $(12,15]$ u jediničnom intervalu (godinšnje) se isplati $4X$ u 12 obroka po $X/3$; $p = 12$, $n = 3$, a $i = 8\%$.
Jednadžba za sadašnju vrijednost glasi:

$$\begin{aligned}2049 &= \frac{X}{2} \cdot \frac{1}{s_{\overline{2|},2\%}} \cdot a_{\overline{16|},2\%} + \frac{1}{1.02^{16}} \cdot \frac{X}{2} \cdot a_{\overline{2|},4\%} + \frac{1}{1.02^{16}} \cdot \frac{1}{1.04^2} \cdot X \cdot a^{(2)}_{\overline{10|},4\%} \\ &\quad + \frac{1}{1.02^{16}} \cdot \frac{1}{1.04^{12}} \cdot 2 \cdot X \cdot a^{(6)}_{\overline{4|},4\%} + \frac{1}{1.02^{16}} \cdot \frac{1}{1.04^{16}} \cdot 4 \cdot X \cdot a^{(12)}_{\overline{3|},8\%} \\ &= X \cdot \Big(3,360819 + \frac{1}{1.02^{16}} \cdot 0,943047 + \frac{1}{1.02^{16}} \cdot \frac{1}{1.04^2} \cdot 8,191209 \\ &\quad + \frac{1}{1.02^{16}} \cdot \frac{1}{1.04^{12}} \cdot 7,379864 + \frac{1}{1.02^{16}} \cdot \frac{1}{1.04^{16}} 10,681110\Big) = 17,076328 \cdot X.\end{aligned}$$

Rješenje je $X = 119.99 \approx 200$.

5.

(a) U trenutku $k-1$ isplaćuje se k^2.

$$\begin{aligned}
\text{s.v} = X &= 1 + 4\cdot v + 9\cdot v^2 + ... + 361\cdot v^{18} + 400\cdot v^{19}\\
&\Longrightarrow \quad v\cdot X = v + 4\cdot v^2 + 9\cdot v^3 + ... + 361\cdot v^{19} + 400\cdot v^{20},\\
X - v\cdot X &= 1 + 3\cdot v + 5\cdot v^2 + ... + ((k+1)^2 - k^2)\cdot v^k + ... + 39\cdot v^{19} - 400\cdot v^{20}\\
&= 1 + v + v^2 + ... + v^{19} + 2\cdot(v + 2v^2 + 3v^3 + ... + kv^k + ... + 19v^{19})\\
&\quad - 400v^{20},\\
X(1-v) &= 1 + a_{\overline{19}|} + 2\cdot(Ia)_{\overline{19}|} - 400\cdot v^{20}\\
&\Longrightarrow \quad X = s.v. = 1452.26\,.
\end{aligned}$$

(b) Na $[k-1,\, k]$ isplaćuje se ukupno k^2; i to $\frac{k^2}{4}$ u trenucima $k-1,\, k-\frac{3}{4},\, k-\frac{1}{2},\, k-\frac{1}{4}$. Prema (3.2.4) za $n=1$ imamo da je ukupna vrijednost te 4 uplate na poćetku godine tj. u trenutku $k-1$ jednaka $\dfrac{d}{d^{(4)}}\cdot k^2$. Sada smo u situaciji kao u slučaju (a), samo se sve isplate množe s faktorom $\frac{d}{d^{(4)}}$, pa imamo da je

$$\text{s.v.} = \frac{d}{d^{(4)}}1452,26 = 1426,06.$$

(c) Rezoniramo kao u slučaju (b). Iznosi $\frac{k^2}{2}$ se isplaćuju u trenucima $k-\frac{1}{2}$ i k. Uvažavajući (3.2.3), za $n=1$ dobivamo

$$\text{s.v.} = \frac{d}{i^{(2)}}1452,26 = 1400,18.$$

(d)

$$\text{s.v.} = \frac{d}{\delta}1452,26 = 1417,40.$$

6. Neka je X godišnji iznos nove rente. Na dan podnošenja zahtjeva jednadžba vrijednosti je:

$$X\cdot(1+i)^{\frac{1}{4}}\cdot a^{(2)}_{\overline{21.25}|} \;=\; 200\cdot v^{\frac{1}{4}}\cdot \ddot{a}_{\overline{22}|} + 320\cdot(1+i)^{\frac{1}{12}}\cdot a^{(4)}_{\overline{16.25}|} + 180\cdot a^{(12)}_{\overline{18.75}|}$$

Alternativno, iz temeljnih principa

$$\begin{aligned}
X\cdot\frac{1}{2}\cdot(v^{\frac{1}{12}})^3\cdot\left(1 + v^{\frac{1}{2}} + (v^{\frac{1}{2}})^2 + ... + (v^{\frac{1}{2}})^{42}\right) &= 200\cdot(v^{\frac{1}{12}})^3\cdot\left(1 + v + v^2 + ... + v^{21}\right)\\
+ \frac{320}{4}\cdot(v^{\frac{1}{12}})^2\cdot\left(1 + v^{\frac{1}{4}} + (v^{\frac{1}{4}})^2 + ... + (v^{\frac{1}{4}})^{64}\right)&\\
+ \frac{180}{12}\cdot v^{\frac{1}{12}}\cdot\left(1 + v^{\frac{1}{12}} + (v^{\frac{1}{22}})^2 + ... + (v^{\frac{1}{22}})^{224}\right)&
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad X = 656.56.$$

4 Diskontirani tokovi novca i osiguranje otplate kapitala

4.1 Diskontirani tokovi novca

Često je potrebno procijeniti tokove novca povezane s nekom budućom investicijom i to s više strana, ponekad i uz korištenje raznih skupova pretpostavci, odnosno scenarija.

Sjetimo se da je neto tok novca u trenutku t_k bio definiran sa

$$c_k = \text{ dotok u } t_k \text{ - odljev u } t_k \ . \tag{4.1.1}$$

Ako je riječ o toku novca povezanom s nekom poslovnom investicijom onda se sadašnja vrijednost

$$NPV(i) = \sum_t c_t \, v^t = \sum_t c_t \, e^{-\delta t}, \quad v = \frac{1}{1+i}, \tag{4.1.2}$$

zove **sadašnja vrijednost** (*net present value*) **ulaganja pri efektivnoj kamatnoj stopi** i.

Kao i prije, jednadžba vrijednosti u $t = 0$ glasi

$$NPV(i) = 0,$$

a njezino rješenje i_0 (ako postoji i ako je jedinstveno) zove se **prinos od transakcije**. Jasno je da je projekt profitabilan ako i samo ako je

$$NPV(i_1) > 0,$$

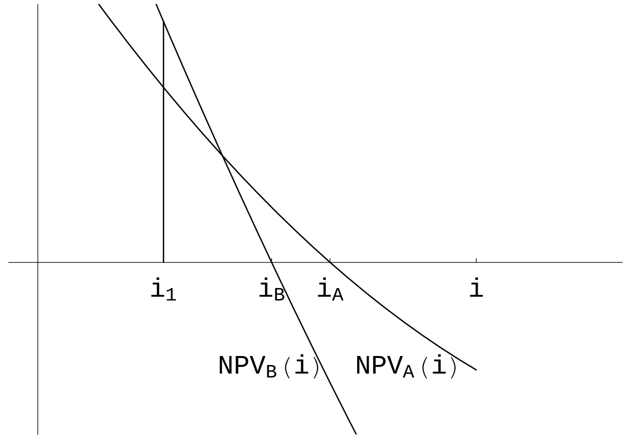
gdje je i_1 *ona efektivna kamatna stopa po kojoj se investitor može zaduživati, odnosno posuđivati svoj novac.* Tipična je sljedeća situacija: i_0 postoji; $NPV(i)$ je padajuća funkcija u okolini i_0. Tada je

$$\forall\, i < i_0, \qquad NPV(i) > NPV(i_0) = 0$$

pa će dakle projekt biti profitabilan ako je $i_1 < i_0$. Ovo pomaže pri usporedbi dva investicijska projekta.

Zamislimo dva potencijalna projekta A, B. Pretpostavimo da su ulagačke mogućnosti investitora neograničene. Neka su i_A, i_B prinosi od transakcija (recimo da postoje); zamislimo da su obje funkcije $NPV_A(i)$, $NPV_B(i)$ padajuće. Ako bi bilo $i_A > i_B$ to još uvijek ne znači da je projekt A bolji izbor. Relevantno je ono što se događa s $NPV_A(i_1)$, $NPV_B(i_1)$ za onu kamatnu stopu i_1 po kojoj investitor može ostvariti prihod od ulaganja i zaduživati se. Projekt B je profitabilniji ako je $NPV_B(i_1) > NPV_A(i_1)$, bez obzira da li je $i_A > i_B$ ili ne.

Zamislimo situaciju kao na slici. Očito je da je u danim okolnostima projekt B profitabilniji. Dok je projekt A fleksibilniji ili sigurniji; veći je raspon "dozvoljivih" vrijednosti za i_1 .
Neka je i' t.d. je $NPV_B(i') = NPV_A(i')$. Tada je za $i_1 < i'$ projekt B profitabilniji; za $i' < i_1 < i_A$ projekt A je profitabilniji, a za $i_1 > i_A$ oba projekta su neprofitabilna. Za $i_1 > i_B$ projekt B je neprofitaban. Za $i_1 < i_B < i_A$ oba projekta su profitabilna.



Pogledajte Primjer 2.2.4.

Primjer 4.1.1. *Investitor može odabrati jedan od sljedeća dva ulaganja (zajma)*

(A) Za uloženih 10000 dobit će 1000 godišnje plativo kvartalno unatrag kroz 15 godina;

(B) za uloženih 11000 dobit će 605 godišnje plativo godišnje unatrag kroz 18 godina te na kraju tog razdoblja povrat uloženog novca.

Kroz sve to vrijeme on se može zaduživati i posuđivati svoj novac po stopi 4% *efektivno godišnje. Da li bi trebao ući u neki od ovih projekata, ako da, u koji?*

Rješenje: Vrijedi

$$NPV_A(i) = -10000 + 1000\, a^{(4)}_{\overline{15}|}.$$

(Uočimo da funkcija $NPV_A(i)$ opada kako i raste.) Iz

$$NPV_A(i) = 0 \implies a^{(4)}_{\overline{15}|} = 10,$$

nalazi se da je

$$a^{(4)}_{\overline{15}|,5\%} = 10,57, \quad a^{(4)}_{\overline{15}|,6\%} = 9,93.$$

Interpolacijom dobijemo $i_A = 5,89$ i sad, jer $NPV_A(i)$ opada, znamo:

$$i < i_A \quad \implies \quad NPV_A(i) > 0$$

i projekt je profitabilan.

Također,

$$NPV_B(i) = -11000 + 605\, a_{\overline{18}|} + 11000\, v^{18}$$

(također opada) i $i_B = 5,50$. Kako je $i = 4\% < i_A$, i_B oba projekta su profitabilna.

Međutim, kako je $NPV_A(0,04) = 1284$, $NPV_B(0,04) = 2088,78$ treba birati projekt B, ako su svi ostali čimbenici neutralni. ◇

Treba naravno općenito razmatrati još koješta; efekte inflacije, različite kamatne stope pri zaduživanju i posuđivanju, i dr.

4.2 Police povratka kapitala

Polica povratka kapitala[5] je ugovor kojim se, u zamjenu za jednokratnu uplatu ili niz uplata u zadanom iznosu, osigurava isplata unaprijed utvrđene svota novca na kraju određenog poznatog razdoblja. Uplate, od strane nosioca police, se nazivaju **premije** a svota koja se isplaćuje na **datum dospijeća** zove se **osigurana svota**. Premije se u pravilu uplaćuju unaprijed.

Uplaćene premije osiguravajuće društvo investira kako bi na datum dospijeća moglo isplatiti ugovorenu osigurani svotu. Pri izračunu premije osiguravajuće društvo mora učiniti prikladnu pretpostavku o kamatnoj stopi, po kojoj će biti u mogućnosti investirati prikupljene premije tokom ugovorenog vremenskog razdoblja. Ono također mora voditi računa o troškovima vezanih uz policu i njih na neki način ukalkulirati u premije.
Jednadžba vrijednost je

$$\begin{pmatrix}\text{Vrijednost}\\ \text{svih premije}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Vrijednost}\\ \text{osigurane svote}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Vrijednost}\\ \text{troškova}\end{pmatrix}.$$

Premija u kojoj su uračunati troškovi naziva se bruto premija, a ukoliko troškovi nisu uračunati riječ je o neto premiji. Troškovi (administrativni i drugi) mogu biti početni i troškovi obnove, odnosno troškovi pri uplati premije (svi drugi nastaju pri plaćanju premija i ponekad se zovu *inkaso* troškovi).

Primjer 4.2.1. *Osigurana svota 10000, rok 15 godina, jednake godišnje premije plative unaprijed kroz čitavo razdoblje trajanja police. Kamatna stopa je 8 %, početni troškovi* 100 *plus* 10% *prve premije, troškovi obnove 4 %, od druge i daljnjih premija.*

Rješenje: $n = 15\,, i = 0,08$. Neka je P' godišnja premija. Jednadžba vrijednosti (u $t = 15$) je

$$(0.9P' - 100)(1+i)^{15} + \sum_{j=1}^{14} 0.96P'(1+i)^j = 10000.$$

Jednadžba vrijednosti u $t = 0$ bi se mogla ovako postaviti

$$P'\ddot{a}_{\overline{15}|} = 10000\,v^{15} + 0,1\,P' + 100 + 0,04\,P'a_{\overline{14}|}.$$

Dobiva se $P' = 368.99$.

Inače da nema troškova jednadžba vrijednosti bi bila $P\ddot{a}_{\overline{15}|} = 10000\,v^{15}$ i $P = 329,7662$. $\diamond$

Vrijednost police

Promatrajmo slučaj konstantne kamatne stope od investicije premija, tijekom ugovornog perioda u trajanju od n godina. Pretpostavimo da nema troškova vezanih uz policu. U tom slučaju govorimo o neto premiji, koja se u ovom kontekstu obično označava s $P_{\overline{n}|}$ (godišnje) odnosno $A_{\overline{n}|}$ (jednokratne) pri čemu je vrijednost osigurane svote 1. Tada imamo:

$$A_{\overline{n}|} = v^n = 1 - d\,\ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{4.2.1}$$

$$P_{\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} - d, \quad \text{godišnje unaprijed pa je} \quad P_{\overline{n}|}\,\ddot{s}_{\overline{n}|} = 1\,. \tag{4.2.2}$$

[5]Nekada su takve police bile česte u UK, no danas su vrlo rijetke. Bez obzira na to, korisno ih je proučavati kao uvod u neki od koncepta police životnog osiguranja, o čemu će biti riječi u poslije.

Uzmimo da se premije plaćaju godišnje unaprijed u jednakim iznosima tijekom n godina, neka je n i rok osiguranja. Uzmimo da je osigurana svota 1. Tada s ${}_tV_{\overline{n}|}$, $0 \le t \le n$ označimo akumulirani iznos premija plaćenih neposredno prije trenutka t, u trenutku t. To znači da premija koja dospijeva u t nije uključena u ${}_tV_{\overline{n}|}$. Jasno je da vrijedi

$$ {}_tV_{\overline{n}|} = P_{\overline{n}|}\, \ddot{s}_{\overline{t}|} \quad , \quad \forall\, t \in \mathbf{N} \qquad \text{(retrospektivno)} \tag{4.2.3}$$

pa slijedi

$$ {}_tV_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} = \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^n - 1}\,. \tag{4.2.4}$$

Množeći razlomak s v^n/v^n dobivamo

$$ {}_tV_{\overline{n}|} = \frac{v^{n-t} - v^n}{1 - v^n} = 1 - \frac{1 - v^{n-t}}{1 - v^n} = 1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\,. \tag{4.2.5}$$

Jasno se vidi da je alternativni zapis

$$ {}_tV_{\overline{n}|} = v^{n-t} - P_{\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n-t}|}\,. \tag{4.2.6}$$

A ovako ide tumačenje: vrijednost osigurane svote u trenutku t, v^{n-t} minus vrijednost (u t) svih premija koje dospijevaju u trenutku t i svih kasnijih. Zbog toga je formula (4.2.6) prospektivna.

Cilmerizirana rezerva (pričuva)

Opet neka je osigurana svota 1 na rok od n godina i neka se premije uplaćuju početkom godine, neto premija godišnja neka je $P_{\overline{n}|}$, a bruto premija $P'_{\overline{n}|}$ s tim da su uračunati inicijalni troškovi I i troškovi pri svakoj uplati premije e; oboje može biti izraženo bilo u apsolutnom iznosu, bilo u postotku premije ili osiguranog iznosa. Godišnja bruto premija (kada su e i I dane u apsolutnom iznosu) je dana jednadžbom

$$ P'_{\overline{n}|}\, \ddot{a}_{\overline{n}|} - e\, \ddot{a}_{\overline{n}|} - I = v^n \quad \Longrightarrow \quad P'_{\overline{n}|} = \frac{v^n}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} + \frac{I}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} + e. $$

Iz (4.2.2) i $1 - d\, \ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n$ slijedi

$$ P_{\overline{n}|}\, \ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n \quad \Longrightarrow \quad P'_{\overline{n}|} = P_{\overline{n}|} + \frac{I}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} + e \tag{4.2.7}$$

Rezerva u trenutku $t \in \mathbf{N}$, ${}_tV^*_{\overline{n}|}$ se može izračunati prospektivno kao vrijednost osigurane svote v^{n-t} i budućih troškova $e\, \ddot{a}_{\overline{n-t}|}$, umanjene za vrijednost nedospjelih bruto premija $P'_{\overline{n}|}\, \ddot{a}_{\overline{n-t}|}$; (sve iskazano u trenutku t). Dakle je

$$ \begin{aligned} {}_tV^*_{\overline{n}|} &= v^{n-t} + e\, \ddot{a}_{\overline{n-t}|} - P'_{\overline{n}|}\, \ddot{a}_{\overline{n-t}|} \\ &= v^{n-t} + e\, \ddot{a}_{\overline{n-t}|} - (P_{\overline{n}|} + \frac{I}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} + e)\, \ddot{a}_{\overline{n-t}|} \\ &= v^{n-t} - P_{\overline{n}|}\, \ddot{a}_{\overline{n-t}|} - I\, \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} \\ &\overset{(4.2.6)}{=} {}_tV_{\overline{n}|} - I\, \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} \\ &\overset{(4.2.5)}{=} (1 + I)\, {}_tV_{\overline{n}|} - I \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Ovo se zove **Cilmerizirana**[6] **rezerva (pričuva)**. Primijetimo da je ${}_0V^*_{\overline{n}|} = -I$.

Alternativno, retrospektivno:

$$ {}_tV^*_{\overline{n}|} = P'_{\overline{n}|}\, \ddot{s}_{\overline{t}|} - I\,(1+i)^t - e\,\ddot{s}_{\overline{t}|}. $$

Tumačenje: naplaćivali smo bruto i prvi član odaje kao da je cijeli bruto čuvan, no nije, nego smo trošili na režije; tih novaca nema pa ih moramo odbiti baš na isti način kako su u račun i ušli; dakle akumulirane u ovisnosti kad i kako su dospjeli.

Primjer 4.2.2. *Iznos je 10000, $n = 15$, premije godišnje unaprijed, $i = 4\%$, troškovi 3% svake bruto premije + 1% osigurane svote. Odredite godišnju bruto premiju i Cilmeriziranu rezervu neposredno <u>nakon</u> pete godišnje uplate.*

Rješenje: $t = 4$, $n = 15$, $i = 0,04$, $I = 1\%$ od $10000 = 100$, $e = 3\%$ od premije.

Bruto premija je P' godišnja;

$$ 0.97\,P'\,\ddot{s}_{\overline{15}|} - 100(1+i)^{15} = 10000 \quad\Longrightarrow\quad P' = 503,9702. $$

Uočimo da za godišnju neto premiju P imamo:

$$ P\,\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n 10000 \quad\Longrightarrow\quad P = 480,20. $$

Prema (4.2.7) je

$$ 503,9702 = 480,2029 + 8,6482 + 15,1191. $$

Cilmerizirana rezerva neposredno prije pete uplate je

$$ \begin{aligned} {}_4V^*_{\overline{15}|} &\overset{(4.2.8)}{=} (1+I)\,{}_4V_{\overline{15}|} - I, \\ {}_4V_{\overline{15}|} &\overset{(4.2.5)}{=} 0,2120731, \end{aligned} $$

tj. ovdje je

$$ 10000{}_4V^*_{\overline{15}|} = 10000((1+0,01)\,{}_4V_{\overline{15}|} - 0,01) = 2041,94 $$

(I uđe u postotku jer ${}_tV_{\overline{n}|}$ su simboli koji odgovaraju svoti 1). Rezerva neposredno nakon pete uplate je :

$$ 2041,94 + 503,97 \cdot 0,97 = 2530,79. $$

$(0,97) \longrightarrow 3\%$ premije je odmah umanjeno (potrošeno) za troškove. $\diamond$

[6] prema njemačkom aktuaristi Augustu Zillmeru 1831-1893.

5 Tablica smrtnosti

Kao i u izlaganju osnova financijske matematike i ovdje ćemo slijediti deterministički pristup. Iako je zapravo riječ o distribuciji dobi umiranja unutar određene populacije, ovo je uglavnom zadovoljavajuće jer u stvarnosti često drugi momenti (inflacija, administrativni troškovi, diskontinuiteti u industriji i zakonodavstvu) budu utjecajniji od smrtnosti.

5.1 Vjerojatnosti doživljenja i umiranja

Promatramo grupu od l_0 novorođenih individua (dakle u dobi 0). Zamislimo da u toj skupini nema novih rađanja, ni useljavanja, ni iseljavanja. Kako vrijeme prolazi grupa se postepeno smanjuje, jer njeni članovi umiru. Tablica smrtnosti je reprezentacija smrtnosti takve grupe. To je ustvari, model doživljenja izražen pomoću očekivanog broja preživjelih od početnog broja l_0.

Prvu tablicu smrtnosti konstruirao je engleski astronom Sir Edmond Halley 1693. Danas su one sveprisutne u djelovanju osiguravajućih društava. Izdaju se i u Hrvatskoj. Često se za potrebe životnog osiguranja konstruiraju tablice odvojene po spolovima jer praksa pokazuje različite stope smrtnosti za žene u odnosu na muškarce. Za naše potrebe u ovom kolegiju to nije bitno. U našim primjerima koristit ćemo LAT A 1967-70 ("Life Assurance table").

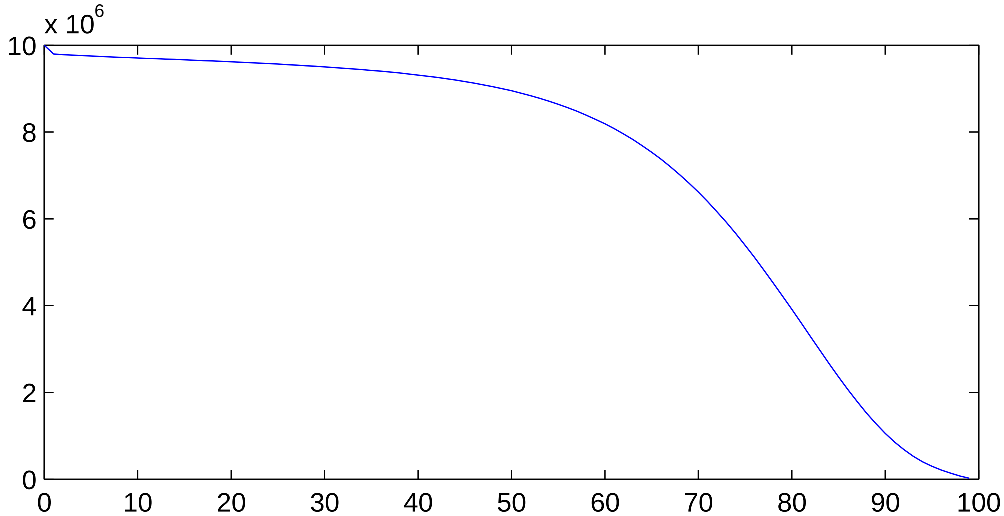
Početni broj l_0 se naziva korijen tablice i obično se uzme da je $l_0 = 100000$. No to nije bitno; LAT A 1967-70 ima $l_0 = 34489$. U svakoj tablici x označava dob (ponekad se y uzme kao oznaka dobi za žene). Obično se tabeliraju samo veličine za $x \in \mathbf{N}$. Sad veličina l_x označava broj svih osoba, odnosno članova promatrane skupine, koji su doživjeli dob x (tj. koji će doživjeti najmanje dob x). Broj onih individua koji će doživjeti dob x; l_x se nađe iz prakse, a onda to koristimo za predviđanje smanjenja populacije za koju vjerujemo da je podvrgnuta istim stopama smrtnosti kao ona čijim smo promatranjem dobili brojeve l_x. Kako i koliko dobro to činimo drugo je pitanje.

l_x je fundamentalna funkcija, no važno je razumjeti da brojevi l_x sami za sebe nemaju nekakvog korisnog smisla. Oni smisao dobivaju samo u usporedbi s početnim l_0, odnosno, svaki l_x u usporedbi sa prethodnim l_{x-1}. To je razlog zbog kojeg neke tablice počinju s nekom drugom dobi x_0, $x_0 > 0$ - takav je npr. slučaj kod nekih primjena u mirovinskom osiguranju.

U svijetlu činjenice da l_x ima samo relativni smisao - uglavnom kao međusobni omjeri - nije niti važno da oni budu cijeli brojevi. Najčešće jesu, jer empirijski podaci se podvrgnu zaokruživanju, tako da ne moramo govoriti o 3,18 osoba. Primjer LAT A 1967-70.

Granična dob tablice smrtnosti označava se s ω i definira se kao ona dob za koju vrijednost l_x postaje zanemarivo mala (u odnosu na l_0), te se proglašava $l_\omega = 0$. U LAT A1967-70 imamo $\omega = 110$, a u stvari $\omega = 112$ kako pokazuje ekspandirana verzija tih tablica. U Hrvatskoj je običaj bio uzeti $\omega = 101$.

Za necjelobrojne x funkcija l_x se obično odredi nekom interpolacijom tako da l u stvari postane neprekidna funkcija. U stvari, u teorijskim razmatranjima se pretpostavlja da je $l_x := l(x)$ čak glatka, tj. derivabilna funkcija. I mi ćemo tako pretpostavljati. Pritom je važno da mi zamišljamo da je riječ o derivabilnoj funkciji, bez da je nužno poznajemo. Što je poznato to su: njezine vrijednosti u cjelobrojnim točkama $x \in [0, \infty) \cap \mathbf{N}_0$. Kada se l_x interpolira, njezin graf obično izgleda ovako (uočimo dvije točke infleksije).



Sljedeća veličina u tablici smrtnosti je d_x; po definiciji je d_x = broj smrti u dobnom intervalu $[x, x+1)$;

$$d_x = l_x - l_{x+1}; \tag{5.1.1}$$

dakle d_x je broj onih osoba koje su doživjele dob x no ne i dob $x+1$. Kako uzimamo da je $l_\omega = 0$ to je $d_{\omega-1} = l_{\omega-1}$ i takodjer je $d_\omega = 0$. Zato je

$$l_x = \sum_{k=x}^{\omega-1} d_k \,. \tag{5.1.2}$$

Ova formula, kao i mnoge koje slijede, može se dobiti i općim, zdravorazumskim rezoniranjem (l_x je broj svih onih koji su doživjeli dob x, a umrli su bilo kada kasnije; ili prije $x+1$, njih d_x, ili prije $x+2$, njih d_{x+1}, ...) ili pak analitički/aritmetički. Ovdje npr. imamo

$$\sum_{k=x}^{\omega-1} d_k = \sum_{k=x}^{\omega-1} (l_k - l_{k+1}) = l_x - l_{x+1} + l_{x+1} - l_{x+2} + \ldots + l_{\omega-1} - l_\omega = l_x \,.$$

Nadalje, definira se **stopa smrtnosti osobe u dobi** x, q_x, kao *uvjetna vjerojatnost smrti u dobnom intervalu* $[x, x+1)$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x. Dakle,

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} \,. \tag{5.1.3}$$

Analogno, p_x je *uvjetna vjerojatnost doživljenja dobi* $x+1$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x. Zato je

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x \,. \tag{5.1.4}$$

Uočimo da je jednakost $l_{x+1} = p_x\, l_x$ možemo interpretirati i ovako:

$$\begin{pmatrix}\text{očekivani broj onih koji}\\ \text{će doživjeti dob} \quad x+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{očekivani broj onih koji}\\ \text{su doživjeli dob} \quad x\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{uvjetna vjerojatnost}\\ \text{doživljenja dobi} \quad x+1\end{pmatrix} .$$

Ovdje još možemo primijetiti da tablice mogu biti generirane i tako da se pored korijena l_0 zadaju i ove prijelazne vjerojatnosti (uvjetne vjerojatnosti doživljenja) pa se brojevi l_{x+1} definiraju jednakošću (5.1.4); tada naravno nema nade (a niti potrebe) da rezultati budu cijeli brojevi.

Dalje se definira ${}_np_x$ kao *uvjetna vjerojatnost doživljenja dobi* $x+n$ uz uvjet da je osoba doživljela dob x; dakle je

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+1+n-1}}{l_x}\frac{l_{x+1}}{l_{x+1}} = p_x\, {}_{n-1}p_{x+1} = p_x\, p_{x+1}\cdots p_{x+n-1}\,. \tag{5.1.5} $$

Analogno se definira ${}_nq_x$, kao *uvjetna vjerojatnost smrti u dobnom intervalu* $[x, x+n)$

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}\,. \tag{5.1.6} $$

Nadalje primijetimo da je ${}_1p_x = p_x$ i ${}_1q_x = q_x$.

Još definiramo

$$ {}_{m/n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = {}_mp_x - {}_{m+n}p_x \quad (= {}_mp_x \cdot {}_nq_{x+m}) \tag{5.1.7} $$

Što je *uvjetna vjerojatnost smrti u dobnom intervalu* $[x+m, x+m+n)$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x? Za $m=0$ imamo ${}_{0/n}q_x = {}_nq_x$. Za $n=1$ pišemo ${}_{m/}q_x ={}_{m/1}q_x$ i imamo

$$ {}_{m/}q_x = {}_mp_x - {}_{m+1}p_x = {}_mp_x\, q_{x+m}\,. \tag{5.1.8} $$

Zaista,

$$ {}_{m/}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} = \frac{l_{x+m}}{l_x}\left(1 - \frac{l_{x+m+1}}{l_{x+m}}\right) \overset{\substack{(5.1.5)\\(5.1.3)}}{=} {}_mp_x\, q_{x+m}\,. $$

Primjer 5.1.1. *Izrazite formulom i onda izračunajte (koristeći LAT A 1967-70) vjerojatnost da će osoba koja doživi dob 30*

(a) doživjeti dob 40,

(b) umrijeti prije dobi 40,

(c) umrijeti nakon navršenja dobi 60 ali prije dobi 80.

Rješenje: Vidi tablice na str. 416, stupac l_{x+2}, za $x+2 = 30, 40, \ldots$.

(a) ${}_{10}p_{30} = \dfrac{l_{40}}{l_{30}} = \dfrac{33542.311}{33839.370} = 0.99122,$

(b) ${}_{10}q_{30} = \dfrac{l_{30} - l_{40}}{l_{30}} = \dfrac{33839.370 - 33542.311}{33839.370} = 0.00878,$

(c) ${}_{30/20}q_{30} = \dfrac{l_{60} - l_{80}}{l_{30}} = \dfrac{30039.787 - 12522.890}{33839.370} = 0.51765.$

◇

5.2 Intenzitet smrtnosti

Pogledajmo funkciju $l_x := l(x)$, smatrajući da smo interpolirali necjelobrojne vrijednosti. Pretpostavimo i da je tako dobivena funkcija derivabilna. **Intenzitet smrtnosti** se definira kao funkcija $\mu_x := \mu(x),\ x \in (0, \omega)$, zadana s

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\,\frac{d}{dx}\,l_x = -\frac{d}{dx}\,\ln(l_x) = -[\ln(l_x)]' . \tag{5.2.1}$$

Kako je funkcija l_x padajuća, derivacija joj je negativna pa će predznak minus osigurati $\mu_x > 0$. Faktor $\frac{1}{l_x}$ osigurava neovisnost o korijenu l_0. Ako se naime uzme neki drugi korijen s istim uvjetnim vjerojatnostima doživljenja dobit ćemo funkciju proporcionalnu s l_x i μ_x će ostati isti.

Pišemo formalno varijablu t umjesto x i integrirajmo $l_t\mu_t$ po $[x, \omega]$:

$$\int_x^\omega l_t\mu_t\,dt = \int_x^\omega -l_t' dt = -l_t\Big|_x^\omega = l_x - l_\omega = l_x,$$

dakle je

$$l_x = \int_x^\omega l_t\,\mu_t\,dt\,. \tag{5.2.2}$$

(Ponekad se napiše i gornja granica ∞, no to nema efekta jer je $l_t = 0\,,\ \forall t \geq \omega$.) Prethodna formula odmah daje

$$d_x = l_x - l_{x+1} = \int_x^{x+1} l_t\,\mu_t\,dt\,. \tag{5.2.3}$$

Dalje

$$\int_0^x \mu_t dt = -\int_0^x \frac{d}{dt}(\ln(l_t))dt = -\ln l_t\Big|_0^x = -\ln\frac{l_x}{l_o} \quad\Rightarrow\quad \frac{l_x}{l_o} = e^{-\int_0^x \mu_t dt}$$

$$\Longrightarrow\quad l_x = l_0\,\exp(-\int_0^x \mu_t\,dt). \tag{5.2.4}$$

Uočimo analogiju s intenzitetom kamate; prethodna formula je potpuno analogna formuli za akumulaciju - treba samo primijetiti da je ovaj proces padajući za razliku od akumulacije.

Formula (5.2.4) inače vrijedi $\forall x \geq 0$; uzmimo sada $x, n \in \mathbf{N}$ pa imamo

$$l_{x+n} = l_0\exp(-\int_0^{x+n}\mu_t dt).$$

Dijeljenjem s (5.2.4) dobivamo

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = \exp(-\int_0^{x+n}\mu_t dt + \int_0^x \mu_t dt) = \exp(-\int_x^{x+n}\mu_t dt)$$

pa je

$$ {}_np_x = \exp(-\int\limits_x^{x+n} \mu_t \, dt), \tag{5.2.5} $$

odnosno

$$ {}_np_x = \exp(-\int\limits_0^{n} \mu_{x+t} \, dt). \tag{5.2.5'} $$

Primijetimo da i ova formula, kao i (5.2.4) ima smisla i za necjelobrojne $x\,, n$.
Dalje,

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - \exp(-\int\limits_x^{x+n} \mu_t dt). $$

Alternativno,

$$ \int\limits_x^{x+n} l_t \mu_t dt = -\int\limits_x^{x+n} l_t' dt = l_x - l_{x+n} $$

povlači

$$ {}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x}\int\limits_x^{x+n} l_t \mu_t dt = \int\limits_x^{x+n} \frac{l_t}{l_x}\mu_t dt = \int\limits_x^{x+n} {}_{t-x}p_x \mu_t dt. $$

Nakon zamjene $y = t - x$ dobivamo

$$ {}_nq_x = \int\limits_0^{n} {}_yp_x \, \mu_{x+y} \, dy, \tag{5.2.6} $$

a specijalno za $n = 1$ je

$$ q_x = \int\limits_0^{1} {}_yp_x \, \mu_{x+y} \, dy\,. \tag{5.2.7} $$

Naravno, sve postaje bitno jednostavnije kada je $\mu_t = \text{const} = \mu$ (kao i u slučaju konstantnog intenziteta kamate). Realni život nije takav, ali takva aproksimacija je često dovoljno dobra. U tom slučaju je npr.

$$ \begin{aligned} {}_np_x &\overset{(5.2.5)}{=} e^{-n\mu}, \\ {}_nq_x &\overset{(5.2.6)}{=} \int\limits_0^{n} e^{-t\mu}\mu dt = -e^{-t\mu}\Big|_0^n = 1 - e^{-n\mu}, \end{aligned} $$

kako i mora biti.

5.3 Procjene intenziteta smrtnosti i interpolacija

U praksi naravno nisu poznate vrijednosti funkcije l_x u necjelobrojnim točkama x tako da niti funkcija μ_x nije poznata niti je možemo eksplicitno rekonstruirati. Ostaje nam na raspolaganju

procjenjivanje:
Prvo, iz (5.2.5),

$$ {}_np_x = \exp(-\int_x^{x+n} \mu_t dt) $$

za $n = 1$ imamo

$$ p_x = \exp(-\int_x^{x+1} \mu_t dt), $$

a odavde je

$$ \ln\, p_x = -\int_x^{x+1} \mu_t dt \approx -\mu_{x+\frac{1}{2}}, $$

ako smo μ_t na segmentu $[x, x+1]$ aproksimirali njenom vrijednošću u sredini intervala, u točki $x + \frac{1}{2}$.

Slično,

$$ -\frac{1}{2}(\ln p_x + \ln p_{x-1}) = \frac{1}{2}(\int_x^{x+1} \mu_t dt + \int_{x-1}^{x} \mu_t dt) = \frac{1}{2}(\int_{x-1}^{x+1} \mu_t dt) \approx \frac{1}{2} \cdot 2\mu_x $$

pa je

$$ \mu_x \approx -\frac{1}{2}(\ln p_x + \ln p_{x-1})\,. \tag{5.3.1} $$

Nadalje, ako pretpostavimo da je l_x kvadratna funkcija na $[x-1, x+1]$ onda se dobije,

$$ \mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x}. $$

Općenito međutim l_x nije kvadratna, pa imamo približnu formulu

$$ \mu_x \approx \frac{1}{2}\, \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{l_x}\,. \tag{5.3.2} $$

Slično dobivamo aproksimaciju polinomom četvrtog stupnja. Uz pretpostavku da je l_x dovoljno puta derivabilna funkcija, Taylorov razvoj daje

$$ l_{x+h} \approx l_x + h\, l_x' + \frac{h^2}{2!}\, l_x'' + \frac{h^3}{3!}\, l_x''' + \frac{h^4}{4!}\, l_x^{(iv)}. $$

Odavde je

$$ \begin{aligned} l_{x-2} &\approx l_x - 2\, l_x' + 2\, l_x'' - \tfrac{8}{6}\, l_x''' + \tfrac{16}{24}\, l_x^{(iv)} \\ l_{x-1} &\approx l_x - l_x' + \tfrac{1}{2}\, l_x'' - \tfrac{1}{6}\, l_x''' + \tfrac{1}{24}\, l_x^{(iv)} \\ l_{x+1} &\approx l_x + l_x' + \tfrac{1}{2}\, l_x'' + \tfrac{1}{6}\, l_x''' + \tfrac{1}{24}\, l_x^{(iv)} \\ l_{x+2} &\approx l_x + 2\, l_x' + 2\, l_x'' + \tfrac{8}{6}\, l_x''' + \tfrac{16}{24}\, l_x^{(iv)} \end{aligned} $$

Oduzmemo li od prve jednakosti četvrtu, od druge treću pa slijedi

$$l_{x-2} - l_{x+2} \approx -(4\,l_x^{'} + \frac{8}{3}\,l_x^{'''}),$$
$$l_{x-1} - l_{x+1} \approx -(2\,l_x^{'} + \frac{1}{3}\,l_x^{'''})$$

Eliminiranjem $l_x^{'''}$ dobivamo

$$l_{x-2} - l_{x+2} - 8\,(l_{x-1} - l_{x+1}) \approx 12\,l_x^{'}.$$

Iz $\mu_x = -\frac{l_x^{'}}{l_x}$, slijedi

$$\mu_x \approx \frac{1}{12\,l_x}\left(8\,(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})\right). \tag{5.3.3}$$

Primjer 5.3.1. *Nađite* l_x *ako je* $\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$.

Rješenje: $-\mu_x = (\ln\,l_x)^{'}$ povlači

$$-\int_0^x \mu_t dt = \int_0^x (\ln\,l_t)^{'} dt = \ln\,l_t\Big|_0^x = \ln\,\frac{l_x}{l_0}.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$\ln\,\frac{l_x}{l_0} = -\int_0^x \frac{1}{100-t}dt = \ln\,(100-t)\Big|_0^x = \ln\,(100-x) - \ln\,100 = \ln\,\frac{100-x}{100},$$

pa je

$$\frac{l_x}{l_0} = \frac{100-x}{100} \quad \Rightarrow \quad l_x = l_0\,\frac{100-x}{100}.$$

◇

Primjer 5.3.2. *Život u dobi 60 podvrgnut je konstantnom intenzitetu smrtnosti od* $\mu = 0.05$. *Nađite vjerojatnost smrti u dobi između 65 i 75 godina.*

Rješenje:

$${}_{5/10}q_{60} \overset{(5.1.7)}{=} {}_5p_{60} - {}_{15}p_{60} \overset{(5.2.5)}{=} \exp(-\int_{60}^{65} \mu_t dt) - \exp(-\int_{60}^{75} \mu_t dt) = e^{-5\mu} - e^{-15\mu} = 0.30643\,.$$

◇

Primjer 5.3.3. *Odredite* μ_{90} *približno iz LAT 1967-70.*

Rješenje:

(a) $\mu_{90} \approx -\frac{1}{2}(\ln\,p_{90} + \ln\,p_{89}) = 0.23422$

(b) $\mu_{90} \approx \frac{1}{2}\frac{l_{x-1}-l_{x+1}}{l_x} = 0.23407$

(c) $\mu_{90} \approx \frac{1}{12\,l_x}\big(8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})\big) = 0.23399,.$

(Tabelirano je 0.23398.) $\diamond$

Sličan problem predstavlja i rekonstrukcija funkcije l_x, tj. njezinih vrijednosti u necjelobrojnim točkama x. Jedna je mogućnost linearna interpolacije, tj. za $0 \leq t \leq 1$ imamo:

$$l_{x+t} \approx (1-t)\, l_x + t\, l_{x+1} = l_x - t\,(l_x - l_{x+1}) = l_x - t\, d_x\,. \tag{5.3.4}$$

Zadnja jednakost sugerira da su smrti uniformno raspoređene unutar dobnog intervala $[x, x+1)$. Od ukupnog broja koji će tokom tog dobnog intervala umrijeti, a taj je d_x, do trenutka/dobi $x+t$ nastupit će $t\,d_x$ smrti (konkretno, ako je $t = \frac{1}{k}\,, k \in \mathbf{N}$ onda do $x + \frac{1}{k}$ nastupi $\frac{1}{k}\, d_x$ smrti) Posebno, za $t = \frac{1}{2}$ imamo

$$l_{x+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}\, l_x + \frac{1}{2}\, l_{x+1} = l_x - \frac{1}{2}\, d_x\,. \tag{5.3.5}$$

Načinjena interpolacija čini funkciju l_x po dijelovima linearnom. Primijetimo da ovo implicira i linearnu interpolaciju za funkciju d_x, ako d_{x+t} i ovdje označava broj smrti tokom jedne godine, tj. u dobnom intervalu $[x+t, x+1+t)$. Zaista, tada je
$d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+1+t} \approx (1-t)\, l_x + t\, l_{x+1} - (1-t)\, l_{x+1} - t\, l_{x+2} = (1-t)(l_x - l_{x+1}) + t\,(l_{x+1} - l_{x+2})$
pa je

$$d_{x+t} \approx (1-t)\, d_x + t\, d_{x+1}\,. \tag{5.3.6}$$

Za funkcije ${}_tp_x$ i ${}_tq_x$ imamo

$${}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \overset{(5.3.4)}{\approx} \frac{t\, d_x}{l_x} = t\, q_x, \qquad \text{(što se uklapa s } t = 1) \tag{5.3.7}$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x \approx 1 - t\, q_x\,. \tag{5.3.8}$$

Primijetimo još da linearna interpolacija (dakle linearni pad funkcije l_x u dobnom intervalu $[x, x+1)$) ne znači da je tada intenzitet smrtnosti konstantan. Vrijedi

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{{}_tp_x} = \frac{q_x}{1 - t\, q_x}.$$

Fiksirajmo $y \in \mathbf{N}$ i pogledajmo $x \in [y, y+1]$ te pretpostavimo da je

$$l_x = l_y - (x-y)(l_y - l_{y+1})\,, \quad \forall x \in [y, y+1].$$

Tada je

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\,\frac{d}{dx}\, l_x = \frac{l_y - l_{y+1}}{l_y - (x-y)(l_y - l_{y+1})}\,. \tag{5.3.9}$$

Odatle je prema formuli (5.2.5)

$${}_hp_y = \exp\big(-\int_y^{y+h} \mu_x dx\big)\,, \quad h \leq 1.$$

Slijedi

$${}_hp_y = \exp\Big(-\int_y^{y+h} \frac{l_y - l_{y+1}}{l_y - (x-y)(l_y - l_{y+1})} dx\Big) = \exp\Big(\ln\left(l_y - (x-y)(l_y - l_{y+1})\right)\Big|_y^{y+h}\Big),$$

dakle

$$ {}_hp_y = \exp\Big(\ln\ \frac{l_y - h\,(l_y - l_{y+1})}{l_y}\Big) = \frac{l_y - h\,(l_y - l_{y+1})}{l_y} $$

i zato

$$ {}_hp_y\ \mu_{y+h} = \frac{l_y - h\,(l_y - l_{y+1})}{l_y} \cdot \frac{l_y - l_{y+1}}{l_y - h\,(l_y - l_{y+1})} = \frac{l_y - l_{y+1}}{l_y} = \text{const (neovisno o } h). $$

Drugim riječima dokazali smo da je

$$ {}_hp_y \cdot \mu_{y+h} = q_y\ . $$

5.4 Zakoni smrtnosti

Postoje mnogi pokušaji da se iz tabeliranih vrijednosti l_x funkcija l (ili možda funkcija μ) pokuša odrediti eksplicitno, tj. da se nađe analitički opis za l. Koliko god su takvi pokušaji bili nedovoljno precizni, ponekad su dobiveni rezultati imali prilično veliku praktičnu važnost.

Općenito pod zakonom smrtnosti podrazumijeva se matematički izraz za neku od tabeliranih funkcija l_x, q_x, p_x ili μ_x. Najpoznatiji su sljedeći:

(1) **De Moivreov** (1725) :

$$ l_x = k(\omega - x). \tag{5.4.1} $$

Ovdje izlazi

$$ \mu_x = -\frac{1}{l_x}(l_x)' = \frac{k}{k(\omega - x)} = \frac{1}{\omega - x} $$

(2) **Gompertz** (1825) :

$$ \mu_x = B\,c^x. \tag{5.4.2} $$

Ovdje je

$$ \int_0^x \mu_t dt = \int_0^x Bc^t dt = \frac{1}{\ln c}Bc^t\Big|_0^x = \frac{B(c^x - 1)}{\ln c} = \Big(g = const,\ \ln g = \frac{-B}{\ln c}\Big) = -(c^x - 1)\ln g. $$

Sada je

$$ \frac{l_x}{l_0} = \exp(-\int_0^x \mu_t dt) \Rightarrow \frac{l_x}{l_0} = g^{c^x} - 1 $$

i ako još uvedemo $k = \dfrac{l_0}{g}$ imamo $l_x = k\,g^{c^x}$.

(3) **Makeham** (1860)

$$ \mu_x = A + Bc^x. \tag{5.4.3} $$

Sličnim računom se ovdje dobije $l_x = ks^x g^{c^x}$ gdje su g i k kao gore, a $s = e^{-A}$.

Uočimo da niti jedan od ovih zakona ne specificira konstante; one se moraju pripisati empirijskim podacima. Obično je u praksi (da se dobiju kakve takve valjane aproksimacije) $0,001 < A < 0,003$, $10^{-6} < B < 10^{-3}$ i $1,08 < c < 1,12$.

Spomenimo još i sljedeće zakone:

(4) **Dvostruki geometrijski** (1867)

$$\mu_x = A + Bc^x + Mn^x\,, \qquad x > 0, \tag{5.4.4}$$

(5) **Makeham II.** (1889)

$$\mu_x = A + H\,x + Bc^x\,, \qquad x > 0, \tag{5.4.5}$$

(6) **Perk** (1931)

$$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{Kc^{-x} + 1 + Dc^x}\,, \qquad x > 0, \tag{5.4.6}$$

(7) **Weibull** (1939)

$$\mu_x = K\,x^{\alpha}\,, \qquad x > 0, \alpha \geq 0, K > 0\,. \tag{5.4.7}$$

5.5 Odabrane (select), krajnje (ultimate) i složene tablice smrtnosti

Do sada smo vjerovali da su svi potencijalni osiguranici podložni istom intenzitetu smrtnosti. Općenito, nije tako. Naravno, jasno je da osoba bitno narušenog zdravlja ne bi mogla participirati u grupi (pool-u) koju čine sve osobe iste dobi koje su pristupile osiguranju života.

U praksi, osiguravajuće kompanije poduzimaju mjere da se zaštite od takvih osiguranika, drugim riječima da osiguraju da svi osigurani životi budu razumno dobrog zdravlja. Najčešće se radi o zahtjevu za posebnim liječničkim pregledom. Povezan s tim je problem osiguranja renti - samo na drugu stranu. Rente kupuju samo oni osiguranici koji imaju razloga vjerovati da su natprosječno dobrog zdravlja (u biti ovdje je riječ o tipičnom primjeru negativnog, odnosno nepovoljnog izbora). Bilo kako bilo osiguravajuće društvo ima pravo vjerovati da su obje skupine osiguranika podložne nižim stopama smrtnosti nego je to slučaj s ostatkom populacije ili čak s ostalim članovima unutar grupe (pool-a) osiguranika.

U praksi se obično uzima da osobe koje pristupaju osiguranju podlijžu nižim stopama smrtnosti nego osobe iste dobi koje su već u pool-u osiguranika. No nakon nekog vremena, recimo s godina taj period se zove **period odabira**, smatra se da ove osobe podliježu istim, općim stopama smrtnosti.

Tablice smrtnosti u kojima je posvećena pažnja trajanju članstva u grupi zovu se **tablice s odabirom (select)**. Nakon što protekne period odabira (kad dakle osiguranici potpadnu pod opće pravilo) za život se kaže da je krajnji i koriste se krajnje (ultimate) tablice. Tablice u kojima se ovaj fenomen ignorira zovu se skupne (agregatne).

Opišimo tablice s odabirom. U tu svrhu proširit ćemo svoju notaciju. Sa s označimo period odabira. Za $r < s$, tj. kada period odabira još nije prošao, pišemo[7]

$${}_tq_{[x]+r}$$

je vjerojatnost za osobu koja je pristupila osiguranju u dobi x, a doživjela je $x + r$ godina, da će umrijeti do dobi $x + r + t$. Analogno je značenje simbola

$${}_tp_{[x]+r}\,.$$

[7] [x] znači da se osoba priključila osiguranju u životnoj dobi x. Za više informacija vidi Gupta-Varga "An Introduction to Actuarial Mathematics" str. 103 [8].

Za $t = 1$ lijevi indeks ispuštamo i pišemo kao i ranije

$$q_{[x]+r}, \quad p_{[x]+r} \,.$$

Ako je $r = 0$ i njega ispuštamo i pišemo

$$_tq_{[x]}, \quad _tp_{[x]} \,.$$

Neka je $r = s$, gdje s označava period odabira. Deklariramo da je

$$_tq_{[x]+s} = {}_tq_{[x-1]+s+1} = {}_tq_{[x-2]+s+2} = \cdots = {}_tq_{x+s} \,. \tag{5.5.1}$$

Drugim riječima, svaka osoba koja ima z godina, a provela je u grupi barem s godina podliježe istoj smrtnosti;

$$z = x + s = x - 1 + s + 1 = x - 2 + s + 2 = \cdots \quad .$$

Dakle, $_tq_z$ je uobičajena oznaka za vjerovatnost smrti u danom intervalu $[z, z+t)$, ali uz uvjet da je osoba u članstvu s ili više godina. Drugim riječima, za $r \geq s$ imamo stare oznake $_tq_{x+r}$ za vjerojatnost da osoba koja je pristupila u dobi x, a doživi $x+r$, da će umrijeti do dobi $x+r+t$. Konkretno, to znači: ako je npr. $s = 2$— za izgradnju tablice nam trebaju brojevi

$$q_{[x]},\, q_{[x]+1},\, q_x, \forall x.$$

Sada se može pristupiti izgradnji tablice. $l_{[0]}$ je proizvoljno određen.

$$l_{[0]+1} = l_{[0]} \cdot {}_1p_{[0]} = l_{[0]}p_{[0]},$$

$$l_{0+2} = l_2 = l_{[0]+1}p_{[0]+1} = l_1\, p_1,$$

$$l_{0+3} = l_3 = l_2p_2,$$

Općenito $l_{0+r} = l_r = l_{r-1}p_{r-1}, \quad$ za $r \geq 2$.
Za $x > 0$ stavi se

$$l_{[x]+1} - d_{[x]+1} = l_{x+2}$$

$$l_{[x]} = \frac{l_{x+2}}{_2p_{[x]}}$$

$$l_{[x]+1} = \frac{l_{x+2}}{_1p_{[x]+1}} = l_{[x]}p_{[x]}$$

$$l_{[x]+2} = l_{x+2}$$

itd.

Primijetimo također da je

$$l_{[x]} - d_{[x]} = l_{[x]+1}, \quad l_{[x]+1} - d_{[x]+1} = l_{x+2}.$$

Konkretno, u tablicama osobu koja pristupi najprije čitamo horizontalno. Relevantni brojevi su $q_{[x]}$, $q_{[x]+1}$, q_{x+2} pa onda niže,

$$q_{[50]} = 0.00286243,\ q_{[50]+1} = 0.00388866,\ q_{[50]+2} = 0.00603064.$$

Uočimo još, da je

$$q_{[50]} = 0.00286243,\ q_{[49]+1} = 0.00351979,\ q_{50} = 0.00478880.$$

Slično dalje: kada se budemo referirali na ove tablice uvijek ćemo za osobu u dobi x morati označiti x ili $[x]$ (krajnji ili odabrani).

Zadaci i rješenja

Zadaci

Zadatak 1. *Pretpostavimo da grupa osoba podliježe smrtnosti koja se između dobi 80 i 90 može predstaviti krajnjom (ultimate) tablicom LAT A1967-70 uz odbitak od intenziteta smrtnosti u iznosu od 0.05 u dobi od 80 godina koji se (taj odobitak) povećava linearno do iznosa 0.15 u dobi od 90 godina. Izračunajte $_{5/5}q_{80}$ (vjerojatnost smrti u $[85, 90)$).*

Zadatak 2. *Koristeći pretpostavke o uniformnoj distribuciji smrti kroz godinu izračunajte na temelju LAT A 1967-70 $_{0.25}q_{38.5}$ (krajnje/ultimate).*

Zadatak 3. *Uz pretpostavku da LAT A 1967-70 slijedi Gompertzovu formulu $\mu_x = B\,c^x$ izračunajte vrijednost c koristeći tabelirane l_{60}, l_{70}, l_{80}.*

Zadatak 4. *Koristeći pretpostavku o uniformnoj distribuciji smrti kroz godinu, izračunaj na temelju LAT A 1967-70 vrijednosti za $_{0.25}q_{38.5}$ i $\mu_{65.5}$.*

Zadatak 5. *Za osobu u dobi od 55 pretpostavljamo da je izložena konstantnom intenzitetu smrtnosti $\mu = 0,02$ do dobi od 62 godine nakon čega se pretpostavlja da je izložena intenzitetu smrtnosti prema LAT A1967-7$_0$. Izračunajte*

(a) *Vjerojatnost smrti prije navršene 60-te godine*

(b) *Vjerojatnost doživljene dobi 70 godina*

(c) *Vjerojatnost smrti između 60-te i 65-te godine.*

Zadatak 6. *Ako je $_np_x = \dfrac{x}{x+n}$, nađite μ_x.*

Zadatak 7. *Neka je $l_x = 100\sqrt{100-x}$. Odredite μ_{84} egzaktno i približno.*

Rješenja

1. Neka je novi intenzitet smrtnosti označen s $\mu'_{x+t},\ x=80,\ 0 \leq t \leq 10$ i neka je originalni intenzitet smrtnosti označen s μ_{x+t}. Vrijedi

$$\underset{80}{\mu'_{x+t}} = \underset{80}{\mu_{x+t}} - \underbrace{(0.05 + 0.01 \cdot t)}_{\text{linearna funkcija iz početnih uvjeta}}, \quad 0 \leq t \leq 10$$

Znamo prema (5.1.7) da je

$${}_{5/5}q'_{80} = {}_5p'_{80} - {}_{10}p'_{80}.$$

Za $n \leq 10$ prema (5.2.5') vrijedi

$$\begin{aligned}
{}_np'_{80} &= \exp\Big(-\int_0^n \mu'_{80+t}dt\Big) = \exp\Big(-\int_0^n (\mu_{80+t} - 0.05 - 0.01t)dt\Big) \\
&= \exp\Big(-\int_0^n \mu_{80+t}dt\Big) \cdot \exp\Big(\int_0^n (0.05 + 0.01t)dt\Big) \\
&= \big((5.1.5), (5.2.5)\big) = {}_np_{80} \cdot \exp\big(0.05n + 0.005n^2\big).
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
{}_5p'_{80} &= \frac{l_{85}}{l_{80}} \cdot e^{0.25+0.125} = \frac{6766.5922}{12522.890} \cdot e^{0.375} \\
{}_{10}p'_{80} &= \frac{l_{90}}{l_{80}} \cdot e^{0.5+0.5} = \frac{2608.5274}{12522.890} \cdot e
\end{aligned}$$

i slijedi ${}_{5/5}q'_{80} = (\text{razlika}) = 0.219967.$

2.

$$\begin{aligned}
{}_{0.25}q_{38.5} =& 1 - {}_{0.25}p_{38.5} = \Big({}_{t+s}p_x = \frac{l_{x+t+s}}{l_x} = \frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} \\
& \Longrightarrow \quad {}_{t+s}p_x = {}_sp_{x+t} \cdot {}_tp_x \Rightarrow {}_sp_{x+t} = \frac{{}_{t+s}p_x}{{}_tp_x}\Big) \\
& (x = 38,\ t = 0.5,\ s = 0.25) \\
=& 1 - \frac{{}_{0.75}p_{38}}{{}_{0.5}p_{38}} \\
=& 1 - \frac{1 - {}_{0.75}q_{38}}{1 - {}_{0.5}q_{38}}.
\end{aligned}$$

Sad znamo da pretpostavka o uniformnoj distribuciji smrti, linearna interpolacija za l_x (od ukupnog broja smrti u $[x, x+1)$, a to je d_x do $x+t$ nastupit će td_x smrti) povlači ${}_hq_x = h\,q_x$ (vidi (5.3.7)).

S obzirom da je $q_{38} = 0.00114973$ slijedi

$${}_{0.25}q_{38.5} = 0.0002876.$$

3.

$$(\ln l_x)' = -\mu_x = -B\,c^x \Rightarrow \int_\alpha^\beta (\ln l_x)'\,dx = -B\int_\alpha^\beta c^x\,dx$$
$$\Longrightarrow \quad \ln\frac{l_\beta}{l_\alpha} = -\frac{B}{\ln c}(c^\beta - c^\alpha) = -\frac{B\,c^\alpha}{\ln c}(c^{\beta-\alpha}-1),$$

$\alpha = 60,\ \beta = 70$ daje $0.24034 = \dfrac{Bc^{60}}{\ln c}(c^{10}-1)$; $\alpha = 70,\ \beta = 80$ daje $0.634625 = \dfrac{Bc^{70}}{\ln c}(c^{10}-1)$, i podijelimo

$$c^{10} = \frac{0.634625}{0.2403399} \quad \Longrightarrow \quad c = 1.10194.$$

4.

$${}_{0.25}q_{38.5} = 1 - {}_{0.25}p_{38.5} = 1 - \frac{{}_{0.75}p_{38}}{{}_{0.5}p_{38}} = 1 - \frac{1-{}_{0.75}q_{38}}{1-{}_{0.5}q_{38}},$$

jer

$${}_{t+s}p_x = {}_tp_x \cdot {}_sp_{x+t},$$

gdje je $x = 38, t = 0.5, s = 0.25$ i

$${}_{t+s}p_x = \frac{l_{x+t+s}}{l_x} = \frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}}\cdot\frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

Pretpostavka o uniformnoj distribuciji smrti u $[38, 39]$ (vidi (5.3.7) i (5.3.9)) daje

$${}_sq_{38} = s\cdot q_{38}, \quad 0 \le s \le 1; \quad q_{38} = 0.0011497 \quad \Rightarrow \quad {}_{0.25}q_{38.5} = 0.00029,$$
$$\mu_{65.5} = \frac{l_{65}-l_{66}}{l_{65}-(65.5-65)\cdot(l_{65}-l_{66})} = \frac{l_{65}-l_{66}}{\frac{1}{2}\cdot(l_{65}+l_{66})} = 0.02432.$$

5. (a) ${}_5q_{55} = 1 - {}_5p_{55} = 1 - \exp\Big(-\int\limits_0^5 \mu_{55+t}dt\Big) = 1 - e^{-0,1} = 0,0951626,.$

(b) ${}_{15}p_{55} = {}_7p_{55}\cdot{}_8p_{62} = e^{-7\cdot 0,02}\cdot\dfrac{l_{70}}{l_{62}} = e^{-0,14}\cdot\dfrac{23622,102}{29132,138} = 0,70493,$

(c) ${}_{5/5}q_{55} = |(5.1.7)| = {}_5p_{55} - {}_{10}p_{55} = e^{-0,1} - e^{-0,14}\cdot\dfrac{l_{65}}{l_{62}} = 0,08590.$

6. Prema (5.2.5) je

$${}_sp_x = \exp\Big(-\int\limits_x^{x+s}\mu_t dt\Big)$$

pa je

$$\ln{}_sp_x = -\int\limits_x^{x+s}\mu_t dt = \big(\text{supstitucija: } u = t-x;\ du = dt\big)$$
$$= -\int\limits_0^s \mu_{x+u}du = \{u \to t\} = -\int\limits_0^s \mu_{x+t}dt$$
$$\Longrightarrow \quad \mu_{x+s} = -\frac{\partial}{\partial s}\ln{}_sp_x = -\frac{\partial}{\partial s}\ln\frac{x}{x+s} = -\frac{\partial}{\partial s}\big(\ln x - \ln(x+s)\big) = \frac{1}{x+s}$$

Dakle je $\mu_x = \dfrac{1}{x}$.

7.

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}(l_x)' = \frac{-1}{100\sqrt{100-x}} \cdot \frac{-100}{2\sqrt{100-x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100-x},$$

posebno $\mu_{84} = 0,03125$.

Možemo još koristiti i npr.

(a) $\mu_x \approx -\dfrac{1}{2}\big(\ln p_x + \ln p_{x-1}\big) = -\dfrac{1}{2}\Big(\ln\dfrac{l_{85}}{l_{84}} + \ln\dfrac{l_{84}}{l_{83}}\Big)$
$= -\dfrac{1}{2}(\ln l_{85} - \ln l_{84} + \ln l_{84} - \ln l_{83}) = -\dfrac{1}{2}(\ln l_{85} - \ln l_{83}) = 0,03129,$

(b) $\mu_{84} \approx \dfrac{l_{83} - l_{85}}{2l_{84}} = 0,03127.$

6 Osiguranje života i osobne rente - osnove

Ovo poglavlje bavi se formulama za (sadašnje) vrijednosti isplata koje ovise o doživljenju ili o smrti neke osobe. Zato će funkcije koje ćemo uvesti uključivati i kamatne stope i smrtnosti.

Osnovni princip: Ako je $F(t)$ iznos koji dospijeva na naplatu u trenutku t pri čemu obveza isplate ovisi o doživljenju ili smrti neke osobe, onda je

$$\text{(s.v. od } F(t)) = F(t)I(t)P(t),$$

gdje je:

$I(t)$ sadašnja vrijednost iznosa 1 koji dospijeva u trenutku t,

$P(t)$ vjerojatnost isplate u trenutku t (tj. vjerojatnost nastupanja ugovorenog događaja).

Ukoliko se radi o nizu isplata, onda je

$$\text{s.v.} = \sum_t F(t)I(t)P(t).$$

$I(t)$ može ovisiti o promjenjivoj kamatnoj stopi. Mi ćemo se međutim ovdje ograničiti na fiksnu kamatnu stopu i. Tada je jednostavno

$$I(t) = v^t.$$

Naravno, izbor adekvatne kamatne stope kao i izbor adekvatnih stopa smrtnosti, odnosno tablica smrtnosti, su teška pitanja u koja ovdje ne ulazimo. Najčešće će $P(t)$ biti ${}_tp_x$ ili ${}_tq_x$ ili nešto drugo.

Vremenska jedinica će u općem razmatranju biti neodređena, ali ćemo radi lakše formulacije ponekad eksplicitno reći da se radi o godini. U problemima to naravno nije tako pa ćemo vremensku jedinicu birati ovisno o prirodi zadatka.

6.1 Osiguranje doživljenja *(Pure endowment)*

Osiguranje doživljenja[8] se sastoji od jednokratne isplate na određeni datum u budućnosti pod uvjetom da je osigurana osoba (osiguranik) u tom trenutku živa. Jednokratna isplata se naziva osigurana ili ugovorena svota, a interval od dana ugovaranja osiguranja do dana isplate osigurane svote naziva se period osiguranja ili ugovoreni period.

Osigurana osoba neka je u dobi x, osigurana svota 1, ugovoreni period neka je n godina. Sadašnja[9] vrijednost takvog osiguranja se označava simbolom[10] $\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$. Iz osnovnog principa slijedi

$$\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = 1 \cdot v^n \cdot {}_np_x = v^n \, \frac{l_{x+n}}{l_x}. \tag{6.1.1}$$

[8] Osiguranje jednokratnog prihoda u nekoj dobi za slučaj doživljenja te dobi.

[9] U trenutku kada je osigurana osoba u dobi x, tj. na početku perioda osiguranja

[10] U simbolu broj 1 iznad n u u indeksu označava da će osigurana svota (u iznosu 1) biti isplaćena ako period osiguranja od n godina prođe prije nego što smrt dođe. Za više informacija vidi Gupta-Varga "An Intoduction to Acturial Mathematics" str. 130 [8]. U nekoj literaturi se koristi i nešto jednostavnija oznaka ${}_nE_x$.

Sadašnja vrijednost osiguranja $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ naziva se i (jednokratna) **neto premija osigurane jedinične svote na** n **godina** za osobu u dobi x. U slučaju kada je vrijednost osigurane svote jednaka S, neto premija je $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \cdot S$. Ona predstavlja jednokratnu premiju koju osiguravajuća kuća (osiguravatelj) traži u zamjenu za obavezu plaćanja ugovorene svote u iznosu S nakon n godina, ukoliko osiguranik tada bude živ. Riječ "neto" govori da osiguravatelj nije u iznos premije uračunao svoje troškove ni ostale naknade. U protivnom govori se o bruto premiji. Uplaćene neto premije osiguravajuće društvo investira kako bi moglo isplatiti ugovorenu osigurani svotu. Pri izračunu premije osiguravajuće društvo mora učiniti prikladnu pretpostavku o kamatnoj stopi, po kojoj će biti u mogućnosti investirati prikupljene premije tokom ugovorenog vremenskog razdoblja.

Prethodnu jednakost (6.1.1) možemo zapisati i kao

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}, \tag{6.1.2}$$

što sugerira uvođenje zamjenske funkcije D_x formulom

$$D_x = v^x l_x, \tag{6.1.3}$$

pa sada imamo

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{6.1.4}$$

Vrijednosti funkcije D_x standardno se tabeliraju, tako je i u LAT A1967-70.

Primijetimo da je za kreiranje tabela nužno prethodno fiksirati kamatnu stopu[11]. Tabeliranje je naravno bilo neusporedivo važnije u prošlim vremenima prije upotrebe računala.

Primjer 6.1.1. *Treba naći sadašnju vrijednost osiguranja, tj. premiju osiguranja doživljenja osobe u dobi 30 na period od 25 godina na osiguranu svotu od 1000. Pretpostavlja se g.k.s od 4% i da je na snazi A1967-70 ultimate (krajnja).*

Rješenje: $i = 0.04, S = 1000, x = 30, n = 25$, A1967-70 ultimate .

$$\text{s.v.} = A_{30:\overset{1000}{\overline{25|}}} = 1000 A_{30:\overset{1}{\overline{25|}}} \overset{(6.1.1)}{=} 1000\, v^{25}\, {}_{25}p_{30} \overset{(6.1.4)}{=} 1000\, \frac{D_{55}}{D_{30}} = 1000 \frac{3664,568}{10433,310} = 351,24.$$

Primijetimo da bi u financijskoj matematici bilo $s.v. = v^{25} 1000 = 375.12$. ◇

Uočimo da jednakost u (6.1.1) možemo zapisati i kao

$$l_x\, A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n\, l_{x+n},$$

što smo mogli uzeti i kao početnu jednadžbu vrijednosti za određivanje nepoznate veličine $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$. Prethodnu jednakost možemo interpretirati ovako : l_x osoba (sada u dobi x) položi tu svotu (tj. $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$) s idejom da svi koji dožive dob $x + n$, a njih će biti l_{x+n}, imaju pravo na isplatu iznosa

[11] U tabelama koje mi koristimo kamatna stopa $i = 4\%$. Dakle tako će biti i u svim primjerima vezanih za ovakav tip problema.

1. Možda ovom osiguranju neće pristupiti l_x osoba, nego manje, recimo $\lambda \cdot l_x$ gdje je $\lambda < 1$ no dok god ta populacija biva podložena stopama mortaliteta iz naših tablica broj onih koji će doživjeti isplatu biti će $\lambda \cdot l_{x+n}$.

Primijetimo da je akumulirana vrijednost od 1 u trenutku n , ako djeluje samo kamata jednaka $(1+i)^n = \dfrac{1}{v^n}$. Ovdje je akumulirana vrijednost od $\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ u trenutku n jednaka 1!
Po proporcionalnosti je dakle akumulirana vrijednost od 1 u trenutku n jednaka $\dfrac{1}{\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}$ što je veće od $\dfrac{1}{v^n}$. Zaista, zbog $l_{x+n} < l_x$ vrijedi

$$\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} < v^n.$$

Dakle, uz pretpostavku jednake primjene kamatne stope, više se dobije takvim osiguranjem nego oročenom štednjom, ukoliko se naravno poživi dovoljno dugo. Akumulacija je veća jer benefit dolazi i od kamate i od doživljavanja. (Radi se dakle o horizontalnoj solidarnosti , odnosno o solidarnom udruživanju rizika.)

Teoretski, moguće je promatrati i slučaj kada je $i = 0$. Tada bi akumulacija iznosa 1 u trenutku n iznosila $\dfrac{D_x}{D_{x+n}} = \dfrac{l_x}{l_{x+n}} v^n = \dfrac{l_x}{l_{x+n}}$. To je slučaj kada ljudi, sada u dobi x, polože svi po 1 novčanu jedinicu, stave na hrpu, zakopaju to u zemlju, oni koji su preživjeli, vrate se nakon n godina i podijele među sobom iskopano blago tako da svaki dobije l_x/l_{x+n}.

Primjer 6.1.2. *Treba naći (neto) premiju P za 20-godišnje osiguranje doživljenja u iznosu 100 za život u 50-oj koristeći tabelu smrtnosti A1967-70 ultimate u kojoj se pretpostavlja 4% kamatna stopa. Kolika bi bila premija uz g.k.s. od* 6%*?*

Rješenje:

$$P = 100\frac{D_{70}}{D_{50}} = 100 \cdot \frac{1517.00}{4597.06} = 33.00.$$

Dakle premija je 33.00!

Zanimljivo je provjeriti ovaj rezultat na sljedeći način. Pretpostavimo da je isto osiguranje u isto vrijeme uzeo veliki broj osoba u dobi 50. Uzmimo npr. da je taj broj $l_{50} = 32670$, tada će ukupna uplaćena premija za sve njih biti $32670 \cdot 33,00 = 1078110$ čija će akumulacija (prirast) tokom sljedećih 20 godina uz k.s. od 4% biti $1078110 \cdot (1.04)^{20} = 1078110 \cdot 2.19112 = 2362268$. Podijelimo li taj iznos na raspolaganju nakon 20 godina s brojem tada živih iz skupine $l_{70} = 23622$ vidimo da svako od preživjelih dobije po 100, koliko je bilo ugovoreno i očekivano.

U slučaju k.s. od 6% ne raspolažemo s izrađenim tablicama za vrijednosti D_x te računamo direktno iz poznatih jednakosti (vidi (6.1.1)).

$$P = 100\mathrm{A}_{50:\overset{1}{\overline{20|}}} = 100(1,06)^{-20} \frac{l_{70}}{l_{50}} = 100 \cdot 3,11804727 \cdot \frac{23622,102}{32669,855} = 22,5452.$$

Očito uz veću k.s. premija je niža. ◇

6.2 Životne rente *(Life annuities)*

Za razliku od financijskih ove se rente nazivaju osobne (životne) rente. Mi ćemo kratko govoriti rente kad neće biti opasnosti od zabune.

Životna renta je općenito niz isplata u jednakim vremenskim intervalima čija isplata je uvjetovana doživljenjem određene osobe. Renta može biti neposredna ili odgođena (deffered), doživotna ili privremena, plativa unatrag, tj. na kraju intervala (immediate annuity) ili unaprijed, tj. na početku intervala (annuity-due). (Kod nas se kaže postnumerando/prenumerando.) Iznos koji se isplaćuje može biti konstantan ili varijabilan. Ako je konstantan, dovoljno je izvesti izraz za sadašnju vrijednost rente koja se isplaćuje u iznosu 1, ostale vrijednosti su proporcionalne.

Praktično je ovdje kao vremensku jedinicu fiksirati 1 godinu. Oznake za sadašnje vrijednosti su analogne s oznakama kod financijskih renti.

Neposredne doživotne rente (Whole life annuities)
Neka a_x označava sadašnju vrijednost (vrijednost u trenutku x) neposredne doživotne godišnje rente u iznosu 1, plative unatrag (postnumerando). Tada je

$$a_x = \mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{1|}}} + \mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{2|}}} + \mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{3|}}} + \cdots + \mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{\omega-x|}}} \tag{6.2.1}$$

pa slijedi

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} \mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{t|}}} = \sum_{t=1}^{\omega-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{1}{D_x}(D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{\omega-1})$$

(suma zapravo ide do $\omega - x - 1$ jer $D_\omega = v^\omega l_\omega = 0$).
Uvedimo novu funkciju N_x formulom

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-1} D_{x+t} = D_x + D_{x+1} + \cdots \tag{6.2.2}$$

tako da možemo pisati

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}\,. \tag{6.2.3}$$

Sadašnja vrijednost neposredne doživotne godišnje prenumerando rente je očito

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}\,. \tag{6.2.4}$$

Vrijednosti N_x su također tabelirane. Uočimo da je $N_{x+1} + D_x = N_x$, također $N_{\omega-1} = D_{\omega-1}$ ($N_\omega = 0$). Još uočimo da mi uvijek operiramo s pozitivnom kamatnom stopom i .

Teoretski, moguće je promatrati i slučaj ako bi bilo $i = 0$. Tada bismo imali
$D_x = v^x l_x = l_x$ i $N_x = D_x + D_{x+1} + \cdots = l_x + l_{x+1} + \cdots$.
Uočimo da bismo ovdje imali

$$\frac{N_x}{D_x} = \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x} = 1 + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots}{l_x}\,. \tag{6.2.5}$$

Primijetimo da se ovaj zadnji razlomak može interpretirati kao srednja vrijednost (aritmetička sredina) preostalog trajanja života "svih" osoba koje su sada u dobi x. Naime, od svih njih l_x, l_{x+1} će preživjeti cijelu jednu godinu, njih l_{x+2} još jednu godinu, samo njih l_{x+3} još jednu ... – tako da je u brojniku ukupan broj godina koje će proživjeti sve osobe sada u dobi x.

U ovom razmatranju ignorirali smo sve smrti tokom godine - kao da su sve smrti nastupile na početku godine pa je doprinos svih života koji su prestali tokom godine jednak 0. Ako bismo sve smrti koncentrirali u točke $x+\frac{1}{2}, x+1+\frac{1}{2}, \ldots$ tada bismo još u brojniku imali

$$\frac{1}{2}(l_x - l_{x+1}) + \frac{1}{2}(l_{x+1} - l_{x+2}) + \ldots = \frac{1}{2} l_x \ ,$$

tj. gornjem razlomku bi trebalo dodati $\frac{1}{2}$. Ako bi sve smrti nasupile na kraju godine, onda bi gornjem razlomku trebali dodati 1. Inače, razlomak u (6.2.5) se može zapisati i kao

$${}_1p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \cdots .$$

Neposredne privremene rente (Temporary life annuities)
Ako se radi o rentama čije plaćanje prestaje nakon n godina[12] (ili naravno ranije ako osiguranik umre), onda je sadašnja vrijednost rente

$$a_{x:\overline{n}|} = \mathrm{A}_{x:\overset{\;1}{\overline{1}|}} + \mathrm{A}_{x:\overset{\;1}{\overline{2}|}} + \cdots + \mathrm{A}_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}, \quad (6.2.6)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|} = \frac{D_x}{D_x} + \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. \quad (6.2.7)$$

Odgođene doživotne rente (Deferred whole life annuities)
Odgođena doživotna godišnja postnumerando renta s rokom odgode m godina (u godišnjem iznosu 1, kao i sve ostale)

$${}_{m|}a_x = a_x - a_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+m+1}}{D_x} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} \ . \quad (6.2.8)$$

Isti rezultat možemo dobiti i drugačije: neposredna renta koja starta u dobi $x+m$ tada vrijedi $\dfrac{N_{x+m}}{D_{x+m}}$ s tim da se to plaća u dobi x; akumulacijski faktor je $\dfrac{D_x}{D_{x+m}}$, zato je diskontni faktor $\dfrac{D_{x+m}}{D_x}$ i rezultat kao dolje.
Također je jasno

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+m}}{D_x} \ . \quad (6.2.9)$$

Odgođene privremene rente (Deferred temporary life annuities)
Lako se vidi i da za privremene rente u trajanju od n godina s odgodom od m godina vrijedi

$${}_{m|n}a_x = a_{x:\overline{m+n}|} - a_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}, \quad (6.2.10)$$

$${}_{m|n}\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} \ . \quad (6.2.11)$$

[12](neposredna privremena godišnja postnumerandu/prenumerando renta s iznosima isplate 1)

Primijetimo da zadnja formula za $n = 1$ glasi

$$ {}_{m|1}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+1}}{D_x} = \frac{D_{x+m}}{D_x} = \mathrm{A}_{x:\overset{\;1}{\overline{m|}}} \,, $$

kako i treba biti jer ${}_{m|1}\ddot{a}_x$ znači upravo to: isplatu u iznosu 1, jednu jedinu, u dobi $x+m$ za osobu sada u dobi x.

Dalje, još primijetimo

$$ a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+1}}{D_{x+1}} = \frac{v^{x+1} l_{x+1}}{v^x l_x}\, \ddot{a}_{x+1} = v\, p_x\, \ddot{a}_{x+1}. $$

Slično se pokaže da vrijedi

$$ a_{x:\overline{n|}} = v\, p_x\, \ddot{a}_{x+1:\overline{n|}} \,. $$

Na kraju definirajmo oznake za tablice s odabirom (select)

$$ \begin{aligned} D_{[x]} &= v^x\, l_{[x]}, \\ D_{[x]+t} &= v^{x+t}\, l_{[x]+t}, \\ N_{[x]} &= \sum_{t=0}^{\infty} D_{[x]+t}, \end{aligned} $$

pri čemu je jasno $D_{[x]+t} = D_{x+t}$, odnosno $N_{[x]+t} = N_{x+t}$, kad god je $t \geq s$, gdje je s period odabira. Ponekad se vrijednosti za a_x i $\ddot{a}_x$ čak i tabeliraju.

Pogledajmo sljedeće primjere:

Primjer 6.2.1.

$$ \ddot{a}_{[60]:\overline{5|}} = \frac{N_{[60]} - N_{[60]+5}}{D_{[60]}} = \frac{N_{[60]} - N_{65}}{D_{[60]}} = \frac{35783.721 - 23021.434}{2815.3028} = 4.533\,. $$

Ako to računamo iz ultimativnog dijela imamo:

$$ \ddot{a}_{60:\overline{5|}} = \frac{N_{60} - N_{65}}{D_{60}} = \frac{35841.261 - 23021.434}{2855.5942} = 4.489\,. $$

Drugi iznos je manji jer tu ima više kandidata za umiranje. Zašto?

Primjer 6.2.2. *Koristeći* $A1967-70$ *(dakle, pretpostavlja se g.k.s. od* 4%*), izračunajte:*

$$ \ddot{a}_{40},\; a_{40},\; \ddot{a}_{[40]},\; a_{[40]},\; a_{40:\overline{30|}},\; {}_{5|}a_{45},\; \ddot{a}_{50:\overline{10|}},\; {}_{10|15}\ddot{a}_{[30]}. $$

Rješenje:

$$ \begin{aligned} \ddot{a}_{40} &= \frac{N_{40}}{D_{40}} = 18.894, \\ a_{40} &= \frac{N_{40+1}}{D_{40}} = 17.894, \\ \ddot{a}_{[40]} &= \frac{N_{[40]}}{D_{[40]}} = 18.906, \end{aligned} $$

($\ddot{a}_{[40]}$ je malo više od $\ddot{a}_{40}$, jer je mortalitet ovdje u prvoj godini "lakši").

$$a_{[40]} = \frac{N_{[40]+1}}{D_{[40]}} = \frac{N_{[40]} - D_{[40]}}{D_{[40]}} = \frac{131995.19 - 6981.5977}{6981.5977} = 17.906,$$

($N_{[40]+1}$ nije tabelirano, ali to je $N_{[40]} - D_{[40]}$). Primijetimo da ovdje nije $N_{[40]+1} = N_{[40]} - D_{[40]} = 125013.59$ isto što i $N_{[41]} = 125007.87$.

$$a_{40:\overline{30}|} = \frac{N_{41} - N_{71}}{D_{40}} = \frac{125015.435 - 12070.8963}{6986.4959} = 16.166,$$

$$_{5|}a_{45} = \frac{N_{51}}{D_{45}} = \frac{68970.0761}{5689.1776} = 12.123,$$

$$\ddot{a}_{50:\overline{10}|} = \frac{N_{[50]} - N_{[50]+10}}{D_{[50]}} = \frac{N_{[50]} - N_{60}}{D_{[50]}} = \frac{73544,8 - 35841,3}{4581,32} = 8,232,$$

$$_{10|15}\ddot{a}_{[30]} = \frac{N_{40} - N_{55}}{D_{[30]}} = \frac{132001.9309 - 52502.7524}{10430.039} = 7.622.$$

Primijetimo još da je

$$D_{[40]+1} = v^{41}\, l_{[40]+1} = v^{41} \cdot 33484,739 = 6706,2542.$$

Sada je

$$N_{[40]+2} = N_{[40]+1} - D_{[40]+1} = 125013,59 - 6706,2542 = 118307,34 = N_{42},$$

što i treba biti jer $N_{[40]+2} = N_{42}$ pošto po isteku 2 godine efekt odabira nestaje (kopni). ◇

Primjer 6.2.3. *Dokaži: (zdravorazumski i računski)*

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} = 1 - A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\,.$$

6.3 Akumulacije

Neka svaki član velike grupe osoba sada u dobi x uplaćuje 1 u fond na kraju svake godine (koji preživi). (Ukupan iznos dijele preživjeli.) Uplate se akumuliraju n godina. Udio svake osobe koja preživi do kraja n-te godine je

$$s_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{A_{x+1:\overset{1}{\overline{n-1}|}}} + \frac{1}{A_{x+2:\overset{1}{\overline{n-2}|}}} + \ldots + 1 = \frac{D_{x+1}}{D_{x+n}} + \frac{D_{x+2}}{D_{x+n}} + \ldots + 1 \overset{(6.2.2)}{\underset{(6.2.6)}{=}} \frac{D_x}{D_{x+n}} \cdot a_{x:\overline{n}|} \quad (6.3.1)$$

Alternativno, zamislimo da participira l_x osoba. Označimo $r = 1 + i$. Tada je jednadžba vrijednosti u trenutku $x + n$ (udio svakog člana)

$$\frac{1}{l_{x+n}}\left(r^{n-1} l_{x+1} + r^{n-2} l_{x+2} + \ldots + 1 \cdot l_{x+n}\right) \qquad \Big/ \frac{v^{x+n}}{v^{x+n}} \quad \Longrightarrow$$

(štednja je počela efektivno u dobi $x+1$, pa samo l_{x+1} osoba participira)

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{D_{x+n}}(D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n}) = \frac{1}{D_{x+n}}(N_{x+1} - N_{x+n+1}) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\, a_{x:\overline{n}|}\,.$$

Analogno, ukoliko se uplaćuje na početku svake godine, imamo

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}} + \frac{1}{\mathrm{A}_{x+1:\overset{1}{\overline{n-1}|}}} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{A}_{x+n-1:\overset{1}{\overline{1}|}}} = \ldots \overset{(6.2.2)}{\underset{(6.2.7)}{=}} \frac{D_x}{D_{x+n}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{6.3.2}$$

Primjer 6.3.1. *Grupa osoba u dobi 30 započne ulagati u početku svake godine tokom 20-godišnjeg perioda iznos 10 svaki. Nađite udio svakog od preživjelih članova nakon 20 godina.*

Rješenje:

$$\frac{1}{l_{x+n}} \left(r^n l_x + r^{n-1} l_{x+1} + \ldots + r \cdot l_{x+n-1}\right) \Bigg/ \frac{v^{x+n}}{v^{x+n}}$$

Analogno se pokaže

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{D_x}{D_{x+n}} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{6.3.3}$$

Ovdje je (ultimativno, A1967-70)

$$\ddot{s}_{30:\overline{20}|} \cdot 10 = \frac{N_{30} - N_{50}}{D_{50}} \cdot 10 = 317.96.$$

◇

6.4 Osiguranje života *(Life insurance)*

Osiguranje života[13] je obveza da se određenu svotu novca isplati po smrti osigurane osobe. Ova isplata u praksi dospijeva odmah po smrti. Mi ćemo za početak uzeti radi jednostavnosti da isplata dospijeva na kraju godine u kojoj je smrt nastupila.

Doživotno osiguranje života (Whole life insurance)

Promotrimo najprije doživotno osiguranje života osobe sada u dobi x. U slučaju smrti u dobnom intervalu $[x+t, x+t+1)$ naknada je 1 i isplaćuje se u trenutku $x+t+1$ tj. na kraju godine u kojoj je nastupila smrt. Vjerojatnost smrti u tom intervalu je ${}_{t/1}q_x$. Znamo da je

$${}_{t/1}q_x = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} = \frac{d_{x+t}}{l_x}.$$

Ako dakle smrt nastupi između dobi $x+t$ i $x+t+1$ sadašnja vrijednost obveza je $\frac{d_{x+t}}{l_x} v^{t+1} \cdot 1$. Sada je ukupna sadašnja vrijednost obaveze osiguravajućeg društva

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \cdot {}_{t/1}q_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \cdot \frac{d_{x+t}}{l_x} = \frac{1}{v^x\, l_x} \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{x+t+1} \cdot d_{x+t}. \tag{6.4.1}$$

Sad definiramo nove zamjenske (komutacijske) funkcije

$$C_x = v^{x+1} \cdot d_x,$$
$$M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{\omega-1},$$
$$A_x = \frac{M_x}{D_x}. \tag{6.4.2}$$

[13] Osiguranje (prihoda - novčane naknade) za slučaju smrti.

Zašto se gore ovo zbraja možemo opet obrazložiti "heuristički"

$$l_x A_x = v\, d_x + v^2 d_{x+1} + \cdots \quad /v^x \quad \Rightarrow \quad D_x A_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} \cdots .$$

Za doživotno osiguranje života s odgodom od m godina imamo

$$_{m/}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} \ . \tag{6.4.3}$$

Osiguranje života na određeno vrijeme (Term life insurance)
Lagano se sada izvede formula za osiguranje života s određenim trajanje (privremeno osig.) Uvedimo oznaku[14] $\mathrm{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|}$ za s.v. obaveze osiguravajućeg društva u slučaju privremenog osiguranja života (osigurani iznos je 1).

$$\mathrm{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|} = (\text{kao gore}) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \ _{t/}q_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \ . \tag{6.4.4}$$

Za privremeno osiguranje života s odgodom imamo

$$_{m/}\mathrm{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} \ . \tag{6.4.5}$$

Mješovito osiguranje života i doživljenja (Endowment)
Važno je i mješovito osiguranje (privremeno osiguranje života u vremenu od dobi x do dobi $x+n$ i osiguranje doživljenja dobi $x+n$). Za osigurani iznos 1 u oba slučaja imamo:

$$A_{x:\overline{n}|} = \mathrm{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|} + \mathrm{A}_{\,x:\,\overline{n}|}^{\ \ \ 1} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{6.4.6}$$

U slučaju da je ugovoreni osigurani iznos, tj. naknada različita od 1, gornje sadašnje vrijednosti množimo s tim iznosom.

Primjer 6.4.1. *(A 1967-70)*

$$A_{[30]} = \frac{M_{[30]}}{D_{[30]}} = \frac{1978,8483}{10430,039} = 0,189726, \qquad (\textit{"lighter mortality"})$$
$$A_{30} = \frac{M_{30}}{D_{30}} = \frac{1981,9552}{10433,310} = 0,189964.$$

◇

Definirajmo još dvije zamjenske funkcije koje ćemo koristiti poslije,

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots \tag{6.4.7}$$
$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots . \tag{6.4.8}$$

[14]Vidi [8], Gupta-Varga str.133. Oznaka '1' iznad x znači da će se iznos osigurane svote isplatiti ako smrt nastupi prije isteka perioda osiguranja.

6.5 Neto premije

Iznosi koje osigurana osoba (osiguranik) plaća osiguravajućem društva (osiguravatelju), u zamjenu za osigurani iznos u slučaju smrti ili doživljenja, nazivaju se premije. Za premije kažemo da su neto premije ako je suma njihovih sadašnjih vrijednosti jednaka sadašnjoj vrijednosti obaveza (naknada osiguraniku, odnosno ugovorenih osiguranih iznosa) osiguravatelja. Neto premija, prema tome, ne sadrži nikakve dodatne troškove.

Malo kada se premija plaća u cijelosti jednokratno - izuzetak su naravno neposredne rente. Kod osiguranja smrti ili osiguranja doživljenja ili odgođenih renti obično se premije plaćaju u pravilnim vremenskim razmacima u jednakim iznosima; ali uvijek unaprijed. Ovdje ćemo promatrati godišnje premije i to u neto iznosu.
Jednadžba vrijednosti je

$$\begin{pmatrix} \text{Očekivana sadašnja} \\ \text{vrijednost svih neto premija} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Očekivana sadašnja} \\ \text{vrijednost naknade} \end{pmatrix}.$$

Oznake koje se koriste su analogne prethodnima, samo se umjesto simbola A koristi simbol P.

Najprije razmotrimo doživotno osiguranje života za osobe u dobi x i godišnja premija P_x koja se plaća unaprijed. Jednadžba vrijednosti je očito

$$\ddot{a}_x \cdot P_x = A_x \quad \Longrightarrow$$
$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}\,. \tag{6.5.1}$$

Kod osiguranje života (osiguranja u slučaju smrti) na određeno vrijeme[15] od n godina za premiju koju označimo s $\mathrm{P}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|}$, očito vrijedi $\mathrm{P}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathrm{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|}$, te je

$$\mathrm{P}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{\mathrm{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\,. \tag{6.5.2}$$

Analogno premije za mješovito osiguranje na rok od n godina je

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\,. \tag{6.5.3}$$

Ako se premije uplaćuju kroz kraći vremenski period nego što je trajanje osiguranja oznakama za premiju se dodaje prefiks t na način ${}_tP_x$ koji inducira da se premija plaća samo kroz prvih t godina/obroka. Tada za premiju u slučaju doživotnog osiguranja imamo

$${}_tP_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} = A_x \quad \Longrightarrow \qquad {}_tP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+t}}\,.$$

Primijetimo da za $t = 1$ imamo u nazivniku $N_x - N_{x+1} = D_x$ pa je rezultat $\dfrac{M_x}{D_x}$ kako i mora biti.
Analogno se zaključi da je

$${}_tP^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\mathrm{A}^{\,1}_{x:\,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}\,,$$

[15] Kaže se i privremeno osiguranje života.

$$ {}_tP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} \,. $$

Primjer 6.5.1. $x = 35$*, imamo 20-godišnje mješovito osiguranje sa svotom za slučaj smrti 2000 i svotom 4000 za slučaj doživljenja. Odredite godišnju neto premiju.*

Rješenje: Jednadžba vrijednosti je

$$ \begin{aligned} P\,\ddot{a}_{35:\overline{20}|} &= 2000A^1_{35:\overline{20}|} + 4000\mathrm{A}_{35:\,\overset{1}{\overline{20}|}} \,, \\ P\frac{N_{35} - N_{55}}{D_{35}} &= 2000\left(\frac{M_{35} - M_{55}}{D_{35}} + 2\frac{D_{55}}{D_{35}}\right), \\ P &= 128,30. \end{aligned} $$

Ovo je bio ultimate slučaj. Select varijanta daje

$$ P\,\frac{N_{[35]} - N_{55}}{D_{[35]}} = 2000\left(\frac{M_{[35]} - M_{55}}{D_{[35]}} + 2\frac{D_{55}}{D_{[35]}}\right) \quad \Longrightarrow \quad P = 128,25. $$

◇

6.6 Bruto premije

Bruto premija uključuje sve troškove koje osiguravajuće društvo može imati u vezi s osiguranim slučajem. Oni se dijele na <u>početne troškove</u> i na <u>troškove obnove</u>. Podrazumijeva se da troškovi obnove nastaju u drugoj godini i dalje se protežu do kraja; zato se oni vrednuju kao postnumerando (simbolom a_x). Obje vrste mogu biti dane u postotku nečega ili u fiksnom iznosu. I ovdje imamo jednadžbu vrijednosti:

$$ \begin{pmatrix} \text{Očekivana} \\ \text{sadašnja vrijednost} \\ \text{svih bruto premija} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Očekivana} \\ \text{adašnja vrijednost} \\ \text{naknade (obaveze)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Očekivana} \\ \text{sadašnja vrijednost} \\ \text{troškova} \end{pmatrix}. $$

Pretpostavljamo sljedeće troškove:

$\underline{k}$ po jedinici svake bruto premije $P"$,

$\underline{c}$ po jedinici osigurane svote (svake godine),

$\underline{I}$ dodatni početni troškovi.

Neka je A sadašnja vrijednost naknade. Tada je jednadžba vrijednosti

$$ P"\ddot{a}_x \quad = \quad A + \underbrace{kP"\ddot{a}_x + c\,\ddot{a}_x + I}_{\text{sadašnja vrijednost troškova}} \,. $$

Jer je $A = P\,\ddot{a}_x$, gdje je P neto premija, godišnja.

$$ P"\ddot{a}_x(1-k) = (P+c)\,\ddot{a}_x + I \quad \Longrightarrow \quad P" = \frac{1}{1-k}\Big(P + \frac{I}{\ddot{a}_x} + c\Big). \tag{6.6.1} $$

Razlika $P" - P$ se obično zove opterećenje (loading).

Primjer 6.6.1. *Na bazi* $A1967-70$ *select izračunajte godišnju bruto premiju u postotku osigurane svote za mješovito osiguranje osobe* $x = 40$ *na period od 25 godina uz početne troškove u iznosu* 2% *osigurane svote i troškove obnove koji se sastoje od* 5% *svake premije (uključujući prvu)* $+0,3\%$ *osigurane svote s tim da se uzme još* 50% *prve premije.*

Rješenje: Neka je osigurana svota S, neka je $A_{[x]:\overline{n}|}$ sadašnja vrijednost naknade, $P^{"}$ bruto premija. Jednadžba vrijednosti je sada

$$P^{"}\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|} = A_{[40]:\overline{25}|}\cdot S + \frac{5}{100}P^{"}\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|} + \frac{0,3}{100}\cdot S\cdot \ddot{a}_{[40]:\overline{25}|} + \frac{2}{100}S + 0,5P^{"},$$

$$P^{"}(0,95\,\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|} - 0,5) = \big(A_{[40]:\overline{25}|}\cdot 100 + 0,3\cdot \ddot{a}_{[40]:\overline{25}|} + 2\big)\frac{S}{100}.$$

Kako je

$$\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|} = \frac{N_{[40]} - N_{65}}{D_{[40]}},\ A_{[40]:\overline{25}|} = \frac{M_{[40]} - M_{65} + D_{65}}{D_{[40]}}$$

dobivamo (vidi tablice str. 425)

$$\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|} = 15,6087,\ A_{[40]:\overline{25}|} = 0,399665,$$

a odavde je

$$P^{"} = \frac{100\cdot 0,399665 + 0,3\cdot 15,609 + 2}{0,95\cdot 15,609 - 0,5}\cdot\frac{S}{100} = 3,25568\cdot\frac{S}{100}.$$

U postotku izraženo to znači da je godišnja premija izračunata kao $3,25568\%$ osigurane svote.

Uočimo da je premija u neto iznosu dana jednadžbom

$$P\,\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|} = A_{[40]:\overline{25}|}\cdot S$$

što daje

$$P = \frac{100A_{[40]:\overline{25}|}}{\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|}}\frac{S}{100} = 2,56048\frac{S}{100},$$

što znači da je $\dfrac{P^{"}}{P} = 1,27!$ ◇

Primjer 6.6.2. *Osoba u dobi* $x = 30$ *kupuje 10-godišnje osiguranje života na svotu u iznosu 500. Pogodba je takva da se u slučaju štete (smrti) osim osigurane svote vraća i uplaćena premija. Troškovi su* 3% *osigurane svote te fiksni u iznosu 1 svake godine. Izračunajte jednokratnu premiju (A1967-70 select). Nađite premiju istog osiguranja za osobu u dobi* $x = 60$.

Rješenje:

$$P^{"} = (500 + P^{"})A^{1}_{[30]:\overline{10}|} + \frac{3}{100}500 + 1\cdot \ddot{a}_{[30]:\overline{10}|}$$

$(A^{1}_{[30]:\overline{10}|} = 0,00665\,,\ \ddot{a}_{[30]:\overline{10}|} = 8,411)$, $P^{"} = 26,91$. Za $x = 60$, $P^{"} = 120,95\,.$ ◇

6.7 Relacije izmedu funkcija smrtnosti

Vrijedi

$$C_x = v^{x+1}\, d_x = v^{x+1}\,(l_x - l_{x+1}) \quad \Longrightarrow \quad C_x = v\, D_x - D_{x+1}. \tag{6.7.1}$$

Sumiranjem od x do ∞ (ili do ω ili do $\omega - 1$) dobivamo

$$\begin{aligned} M_x &= vN_x - N_{x+1} = vN_x - (N_x - D_x) = D_x + (v-1)N_x \\ &\Longrightarrow \quad M_x = D_x - d\, N_x\,. \end{aligned} \tag{6.7.2}$$

Sada dijeljenjem s D_x slijedi

$$A_x = 1 - d\, \ddot{a}_x\,. \tag{6.7.3}$$

Da smo umjesto do ∞ sumirali do $x + n - 1$ dobili bismo

$$A^1_{x:\overline{n}|} = 1 - \mathrm{A}_{x:\,\overline{n}|}^{\;\;1} \; - d\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|},$$

dakle

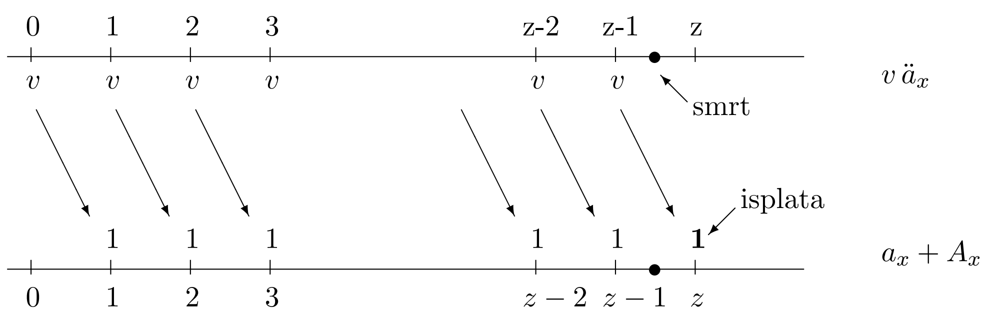
$$A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\,. \tag{6.7.4}$$

Slično bismo dobili (ili provjerili)

$$A_{x:\overline{n}|} = v\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}, \tag{6.7.5}$$

$$A_x = v\, \ddot{a}_x - a_x\,. \tag{6.7.6}$$

Neke od ovih formula se mogu i jednostavno opravdati. Npr. ova zadnja:



Slično, $A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x$ ima sljedeću interpretaciju. Osoba u dobi x uzme zajam u iznosu 1; sadašnja vrijednost je očito 1. Vraća ga ovako: kamatu za svaku godinu plati godišnje unaprijed - to je točno anticipativna kamata u iznosu d. U godini smrti je kamata već plaćena na početku (jer renta je prenumerando) i samo na kraju preostaje vratiti glavnicu što se upravo naplati osiguravanjem života u iznosu 1 koje dospije na kraju godine smrti.

Ovo opravdava lukavo dospijeće osiguranja života na kraju godine.

Zadaci i rješenja

Zadaci

Zadatak 1. *Osoba stara 40 godina ugovara 20-godišnje mješovito osiguranje na svotu 6000. Troškovi: početni 2% osigurane svote i 50% prve premije, a zatim 5% svake sljedeće premije te 100 pri isplati - bez obzira da li u trenutku smrti ili po isteku ugovorenog roka. Odredite godišnju premiju (A 1967-70, select).*

Zadatak 2. *Osoba stara 65 godina sklapa posebno osiguranje rastuće doživotne rente. Renta će se isplaćivati godišnje unatrag. Iznos prve isplate je 1000, a iznos isplate se povećava svake godine za 9.62% iznosa prethodne godine. Odredite cijenu ove rente ako su na snazi stope mortaliteta iz A 1967-70 (ultimate), s kamatnom stopom 14% . (Uputa:* $\frac{1.14}{1.0962} = 1.04$*.)*

Zadatak 3. *Osoba stara 40 godina ugovara posebnu odgođenu prenumerando rentu godišnjeg iznosa 1000 kad se navrši 60 godina. Ako osoba umre nakon navršenih 60 godina ali prije nego joj je isplaćeno ukupno 15000, razlika (između isplaćenog iznosa i 15000) se plaća na kraju godine u kojoj je nastupila smrt. Izračunajte godišnju neto premiju (A 1967-70, select).*

Zadatak 4. *Prije* 30 *godina društvo je zaključilo veliki broj 30-godišnjih osiguranja za slučaj doživljenja u svoti* 4000 *za osobe tada u dobi* 30 *s godišnjim plaćanjem premije. Pretpostavlja se A1967-70, ultimate,* 4%*, uz troškove* 3% *od svake premije. Pokazalo se da je pretpostavka bila ispravna, što se tiče kamate od* 4%*; ali su troškovi iznosili* 20% *od prve i* 2% *od ostalih premija, a pretpostavka o smrtnosti je slijedila vrijednosti u tablici A1967-70 , ali tako da se osiguraniku nadoda* 5 *godina na njegovu stvarnu dob. Izračunajte prosječnu dobit ili gubitak osiguravajućeg društva po polici.*

Zadatak 5. *Nađite sadašnju vrijednost uz kamatnu stopu i prenumerando godišnje rente u iznosu* 1 *koja se akumulira za vrijeme života osobe koja je ušla u osiguranje u dobi* x *do kraja godine u kojoj ta osoba umre, po kamatnoj stopi* j.

Zadatak 6. *Kupuje se godišnja postnumerando renta u iznosu* 100 *za osobu u dobi* $x = 60$*. Nakon smrti, ako isplate nisu premašile uplaćenu svotu, razlika će se uplatiti na kraju godine u kojoj ta osoba umre. Odredite cijenu na temelju A1967-70 ultimate uz zaračunate troškove u iznosu od* 5% *od cijene.*

Rješenja

1. Neka je P' tražena premija. Tada je

$$\begin{aligned}
P'\,\ddot{a}_{[40]:\overline{20}|} &= 6000A_{[40]:\overline{20}|} + 120 + 0.5P' + 0.05P'\,a_{[40],\overline{19}|} + 100A_{[40]:\overline{20}|},\\
P'\,\ddot{a}_{[40]:\overline{20}|} &= 6100A_{[40]:\overline{20}|} + 120 + 0.5P' + 0.05P'\,(\ddot{a}_{[40]:\overline{20}|} - 1),\\
P'(0.95\,\ddot{a}_{[40]:\overline{20}|} - 0.45) &= 6100\,A_{[40]:\overline{20}|} + 120,\\
P'(12.633858) &= 6100 \cdot 0,4702891 + 120,\\
P' &= 236.5678.
\end{aligned}$$

2. $i = 0.14,\ v = \frac{1}{1.14},\ \rho = 1.0962.$ Imamo sljedeći niz isplata

$$v\,1000, v^2\rho\,1000, v^3\rho^2 1000, \ldots,$$

dakle

$$\begin{aligned}\text{s.v.} &= \frac{1000}{\rho}\Big((\rho\,v)p_{65} + (\rho v)^2{}_2p_{65} + (\rho v)^3{}_3p_{65} + \cdots\Big)\\ &= (\text{vidi } (6.1.1)) = \frac{1000}{\rho}\,a_{65} = \cdots = 8882,5,\end{aligned}$$

pri čemu se a_{65} treba izračunati uz k. s. j za koju vrijedi $\rho\,v = \frac{1}{1+j}$, tj. uz k.s. $j = 4\%$.

$$\begin{aligned}\text{s.v.} &= 1000\Big(v^1{}_{1|}p_{65} + v^2\rho^1{}_{2|}p_{65} + \cdots + v^n\,\rho^{n-1}{}_{n|}p_{65} + \cdots\Big)\\ &= \frac{1000}{\rho}\Big((\rho v)^1{}_{1|}p_{65} + (\rho v)^2{}_{2|}p_{65} + \cdots + (\rho\,v)^n{}_{n|}p_{65} + \ldots\Big)\\ &\quad(\rho\,v =: v')\\ &= \frac{1000}{\rho}\Big(v'{}_{1|}p_{65} + v'^2{}_{2|}p_{65} + \cdots + v'^n{}_{n|}p_{65} + \cdots\Big)\\ &= \frac{1000}{\rho}a_{65}.\end{aligned}$$

Uz $v' = \rho\,v,\ v' = \frac{1}{1+i'}$ slijedi $i' = 4\%.$

3. Sadašnja vrijednost premija:

$$P\,\ddot{a}_{[40]:\overline{20}|} = P\frac{N_{[40]} - N_{60}}{D_{[40]}} = 13.772\,P.$$

Sadašnja vrijednost obećane razlike:

$$\begin{aligned}&14000\,v^{21}{}_{20|}q_{[40]} + 13000\,v^{22}{}_{21|}q_{[40]} + \cdots + 1000\,v^{34}{}_{33|}q_{[40]}\\ &= 1000\Big(14\,v^{21}\frac{d_{60}}{l_{[40]}} + 13\,v^{22}\frac{d_{61}}{l_{[40]}} + \cdots + v^{34}\frac{d_{73}}{l_{[40]}}\Big)\frac{v^{40}}{v^{40}}\\ &= \frac{1000}{D_{[40]}}\Big(14C_{60} + 13C_{61} + \cdots + C_{73}\Big)\\ &= \frac{1000}{D_{[40]}}\Big((C_{60} + C_{61} + \cdots + C_{73}) + (C_{60} + C_{61} + \cdots + C_{72}) + \cdots + (C_{60} + C_{61}) + C_{60}\Big)\\ &= \frac{1000}{D_{[40]}}\Big((M_{60} - M_{74}) + (M_{60} - M_{73}) + \cdots + (M_{60} - M_{62}) + (M_{60} - M_{61})\Big) = (6.4.7)\\ &= \frac{1000}{D_{[40]}}\Big(14M_{60} - (R_{61} - R_{75})\Big) = 717.9863572.\end{aligned}$$

Sadašnja vrijednost rente:

$$1000\,{}_{20|}\ddot{a}_{[40]} = 1000\,\frac{N_{60}}{D_{[40]}} = 5133.676.$$

Dakle je, $13.772\,P = 717.986 + 5133.673$ pa je $P = 424.90$.

4. Bilo je

$$P\,\ddot{a}_{30:\overline{30}|} = 4000\mathrm{A}_{30:\overset{1}{\overline{30}|}} + 0.03\,P\,\ddot{a}_{30:\overline{30}|} \quad\Longrightarrow\quad P = 64.03498456.$$

Stvarni akumulirani iznos je

$$\begin{aligned}
0.80P\frac{1}{\mathrm{A}_{35:\overset{1}{\overline{30}|}}} &+ 0.98P\frac{1}{\mathrm{A}_{36:\overset{1}{\overline{29}|}}} + \cdots + 0.98P\frac{1}{\mathrm{A}_{64:\overset{1}{\overline{1}|}}} \\
&= -0.18P\frac{1}{\mathrm{A}_{35:\overset{1}{\overline{30}|}}} + 0.98P\Big(\frac{1}{\mathrm{A}_{35:\overset{1}{\overline{30}|}}} + \frac{1}{\mathrm{A}_{36:\overset{1}{\overline{29}|}}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{A}_{64:\overset{1}{\overline{1}|}}}\Big) \\
&= -0.18P\frac{D_{35}}{D_{65}} + 0.98P\,\ddot{s}_{35:\overline{30}|} = (6.3.3) = -0.18P\frac{D_{35}}{D_{65}} + 0.98P\frac{N_{35}-N_{65}}{D_{65}} \\
&= 4299.44.
\end{aligned}$$

Profit po polici je stvarna akumulacija umanjena za obavezu isplate, tj. profit je $4299.44 - 4000 = 299.44$.

5. Ova naknada, iako se radi o renti, nije dostupna za života osigurane osobe. Ako osoba umre u dobi unutar $[x+t, x+t+1)$ sadašnja vrijednost akumulacije je

$$v^{t+1}\ddot{s}_{\overline{t+1}|,j} = \frac{1}{(1+i)^{t+1}}\,.$$

(akumulacija po stopi j).

Ukupna sadašnja vrijednost naknade je

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\ddot{s}_{\overline{t+1}|,j}\ {}_{t|}q_x &= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\frac{(1+j)^{t+1}-1}{d(j)}\ \frac{d_{x+t}}{l_x} = \\
&= \frac{1}{d(j)}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{(v\cdot(1+j))^{t+1}\,d_{x+t}}{l_x} - \frac{v^{t+1}d_{x+t}}{l_x}\right) = \\
&\ (\text{uz oznaku } \widetilde{v} = v\cdot(1+j)) \\
&= \frac{1}{d(j)}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{\widetilde{v}^{t+1}d_{x+t}}{l_x} - \frac{v^{t+1}d_{x+t}}{l_x}\right) = \frac{1+j}{j}\left(\widetilde{A_x} - A_x\right),
\end{aligned}$$

gdje je

$$A_x = \frac{M_x}{D_x},\ M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots, \qquad C_x = v^{x+1}\,d_x\,.$$

$\widetilde{A_x}$ je izračunat uz kamatnu stopu $\bar{j}$ takvu da je $\dfrac{1}{1+\bar{j}} = \widetilde{v} = v\cdot(1+j) = \dfrac{1+j}{1+i}$.

6. Označimo bruto premiju s P'. Tada imamo: Ako bismo ignorirali naknadu kod smrti bila bi riječ o običnoj renti i vrijedilo bi

$$0,95P' = 100\,a_{60} \quad\Longrightarrow\quad P' = 1215,92 \quad (a_{60} = 11,551).$$

Stvarna cijena je veća od toga; recimo da će stvarna cijena biti između 1400 i 1500 (raspon mora biti iznos godišnje premije) i tada uz tu pretpostavku rezimiramo kao u Zadatku 3.

Dakle imamo:

s.v. naknada kod smrti

$$
\begin{aligned}
&= P'vq_{60} + (P'-100)v^2{}_{1|}q_(60) + (P'-200)v^3{}_{2|}q_(60) + \cdots + (P'-1400)v^{15}{}_{14|}q_{(60)} \\
&= [P'v\frac{d_{60}}{l_{60}} + (P'-100)v^2\frac{d_{61}}{l_{60}} + (P'-200)v^3\frac{d_{62}}{l_{60}} + \cdots + (P'-1400)v^{15}\frac{d_{74}}{l_{60}}] \cdot \frac{v^{60}}{v^{60}} \\
&= P'\frac{C_{60}}{D_{60}} + (P'-100)\frac{C_{61}}{D_{60}} + (P'-200)\frac{C_{62}}{D_{60}} + \cdots + (P'-1400)\frac{C_{74}}{D_{60}} \\
&= P'\frac{M_{60}-M_{75}}{D_{60}} - 100(C_{61} + 2C_{62} + \cdots + 14C_{74}) \\
&= P'\frac{M_{60}-M_{75}}{D_{60}} - 100\left([C_{61} + C_{62} + \cdots + C_{74}] + [C_{62} + C_{63} + \cdots + C_{74}] + \right. \\
&+ \left. [C_{63} + C_{64} + \cdots + C_{74}] + \cdots + [C_{73} + C_{74}] + [C_{74}]\right)\frac{1}{D_{60}} \\
&= P'\frac{M_{60}-M_{75}}{D_{60}} - 100(M_{61} - M_{75} + M_{62} - M_{75} + M_{63} - M_{75} + \cdots + \\
&+ M_{73} - M_{75} + M_{74} - M_{75})\frac{1}{D_{60}} \\
&= P'\frac{M_{60}-M_{75}}{D_{60}} - 100(R_{61} - R_{75} - 14M_{75})\frac{1}{D_{60}}\,.
\end{aligned}
$$

Dakle je

$$0,95P' = 100a_{60} + P'\frac{M_{60}-M_{75}}{D_{60}} - 100(R_{61} - R_{75} - 14M_{75})\frac{1}{D_{60}},$$

tj.

$$P' = \frac{100}{0,95 - 0,27106}(11,551 - 2,03946) = 1400,94.$$

7 Ispodgodišnje funkcije

7.1 Životne rente koje se isplaćuju m puta godišnje

Ovdje ćemo odrediti približne vrijednosti takvih renti.

Neka je m prirodan broj. Promotrimo doživotnu postnumerando rentu u godišnjem iznosu 1 koja se plaća u iznosima $\frac{1}{m}$. Ti iznosi dospijevaju u dobi osiguranika

$$x+\frac{1}{m}, x+\frac{2}{m}, \quad \ldots \quad , x+1, x+1+\frac{1}{m}, \cdots .$$

S obzirom da je diskontni faktor za period duljine $\frac{1}{m}$ upravo $v^{\frac{1}{m}}$ i s obzirom da je vjerojatnost doživljene dobi $x+\frac{1}{m}$ za osobu sada u dobi x jednaka ${}_{\frac{1}{m}}p_x$, sadašnja vrijednost[16] prve isplate je

$$\frac{1}{m} \cdot v^{\frac{1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}}\, p_x .$$

Sadašnja vrijednost druge isplate je

$$\frac{1}{m} \cdot v^{\frac{2}{m}} \cdot {}_{\frac{2}{m}}\, p_x .$$

Ukupna sadašnja vrijednost je

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} \;{}_{\frac{t}{m}}p_x = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} \frac{l_{x+\frac{t}{m}}}{l_x} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+\frac{t}{m}}}{D_x} . \tag{7.1.1}$$

Ne moramo se brinuti jer je suma sigurno konačna.

Analogno se vidi da je sadašnja vrijednost odgovarajuće prenumerando rente.

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_{x+t/m}}{D_x}, \tag{7.1.2}$$

jer je

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)} . \tag{7.1.3}$$

Sličnim rezoniranjem se dobiju formule za rente s privremenim trajanjem. Primijetimo da u slučaju trajanja n godina imamo ukupno (bolje rečeno najviše) nm isplata.

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{nm} \frac{D_{x+t/m}}{D_x} \tag{7.1.4}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{nm-1} \frac{D_{x+t/m}}{D_x} \tag{7.1.5}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} - a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m}\frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) . \tag{7.1.6}$$

Jasno je da je prenumerando skuplje. Štoviše i čitava zadnja formula je osim algebarski jasna i zdravorazumski.

[16] misli se na vrijednost u trenutku x

Problem je u određivanju vrijednosti $D_{x+t/m}$. To se radi samo približno, a aproksimacija se zasniva na Woolhousevoj formuli.

Ako je $u(t) = u_t$ dovoljno puta derivabilna funkcija onda vrijedi

$$\frac{1}{m}\sum_{t=0}^{nm-1} u_{\frac{t}{m}} \approx \sum_{t=0}^{n-1} u_t + \frac{m-1}{2\,m}\,(u_n - u_0) - \frac{m^2-1}{12\,m^2}\left(u_n' - u_0'\right) + \frac{m^4-1}{720\,m^4}\left(u_n''' - u_0'''\right) - \cdots \tag{7.1.7}$$

Najčešće se i zadnji član zanemaruje. U toj formi ćemo Woolhouseovu formulu primijeniti na funkciju $u_t = \dfrac{D_{x+t}}{D_x}$. Tada je lijeva strana

$$\frac{1}{m}\sum_{t=0}^{nm-1}\frac{D_{x+t/m}}{D_x} \overset{(7.1.5)}{=} \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}}.$$

Dalje, prvi član s desne strane je

$$\sum_{t=0}^{n-1}\frac{D_{x+t}}{D_x} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}}.$$

Dalje iz $D_{x+t} = v^{x+t}\, l_{x+t}$ uviđamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}D_{x+t} &= (\ln v)\; v^{x+t}\; l_{x+t} \;+\; v^{x+t}\frac{\partial}{\partial t}\; l_{x+t}\\ &= \ln v\cdot v^{x+t}\; l_{x+t} + v^{x+t}\,(-\mu_{x+t}\; l_{x+t})\\ &= -\delta\; D_{x+t} - \mu_{x+t}D_{x+t} = -D_{x+t}(\mu_{x+t}+\delta).\end{aligned}$$

Sada smo spremni primijeniti formulu (7.1.7).

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m}\left(\frac{D_{x+n}}{D_x} - 1\right) - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(-\frac{D_{x+n}}{D_x}(\mu_{x+n}+\delta) + (\mu_x+\delta)\right). \tag{7.1.8}$$

Sada možemo pustiti $n \to \infty$, odnosno stavimo $n = \omega$, uvažimo $D_\omega = D_{\omega+1} = 0$.
Slijedi

$$\ddot{a}^{(m)}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\;(\mu_x+\delta) \tag{7.1.9}$$

Konačno, i δ i μ su obično nule veličine; u normalnim okolnostima su manji od $\frac{1}{10}$, kako je m barem 2 to je zadnji član uvijek u praksi manji od $\frac{3}{12\cdot 4}\cdot\frac{2}{10} = \frac{1}{80} = 0.0125$ pa i njega zanemarimo. Dobivamo

$$\ddot{a}^{(m)}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\;. \tag{7.1.10}$$

Sad pak (7.1.3) daje

$$a^{(m)}_x = \ddot{a}^{(m)}_x - \frac{1}{m} \cong \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{1}{m} = a_x + 1 - \frac{m-1}{2m} - \frac{1}{m} = a_x + \frac{m-1}{2m}\;.$$

Dakle

$$a^{(m)}_x \approx a_x + \frac{m-1}{2m}\;. \tag{7.1.11}$$

Uočimo da je $\ddot{a}^{(m)}_x$ manje od $\ddot{a}_x$ te da je $a^{(m)}_x$ veće od a_x kao što i mora biti (usporedbom obveze u godini smrti slijedi zaključak).

Vratimo se formuli (7.1.8) te i u njoj ispustimo zadnji član, imamo

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) . \tag{7.1.12}$$

Sada uvažimo da je

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} + 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

(oduzimanjem (6.2.6) od (6.2.7)), još uvažimo (7.1.6)

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

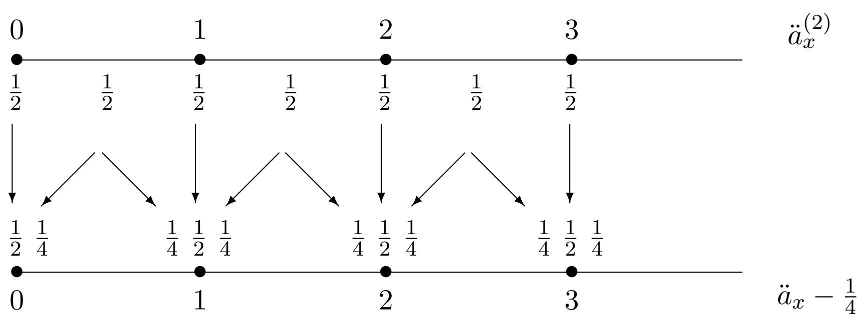
pa slijedi

$$\begin{aligned} a^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - \tfrac{1}{m}\left(1 - \tfrac{D_{x+n}}{D_x}\right) \\ &\approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \tfrac{m-1}{2m}\left(1 - \tfrac{D_{x+n}}{D_x}\right) - \tfrac{1}{m}\left(1 - \tfrac{D_{x+n}}{D_x}\right) \\ &= a_{x:\overline{n}|} + \left(1 - \tfrac{1}{m} - \tfrac{m-1}{2m}\right)\left(1 - \tfrac{D_{x+n}}{D_x}\right) \end{aligned}$$

pa dobivamo

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx a_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) . \tag{7.1.13}$$

Već smo dali objašnjenje za činjenicu $\ddot{a}^{(m)}_x < \ddot{a}_x$ (no ne radi se samo u razlici u godini u kojoj osigurana osoba umre već i o razlici u kamatama u "cijelim" godinama : skuplje je platiti 1 na početku nego m puta $\frac{1}{m}$ tokom godine).
Inače, formula $\ddot{a}^{(m)}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$ za $m = 2$ daje $\ddot{a}^{(2)}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{1}{4}$, te ima jednostavno objašnjenje.



Primjer 7.1.1. *Opišite i nađite vrijednosti od* $a^{(2)}_{60}, \ddot{a}^{(4)}_{60}, a^{(12)}_{[65]}, a^{(2)}_{70:\overline{10}|}$ *(A1967 – 70).*

Rješenje: Obično se uzima

	$m=2$	$m=4$	$m=6$	$m=12$
$\frac{m-1}{2m}$	0.25	0.375	0.417	0.458

$$
\begin{aligned}
a_{60}^{(2)} &\approx a_{60} + \frac{1}{4} = (\ddot{a}_{60} - 1) + \frac{1}{4} = 11.551 + 0.25 = 11.801 \\
\ddot{a}_{60}^{(4)} &\approx \ddot{a}_{60} - \frac{3}{8} = 12.551 - 0.375 = 12.176 \\
a_{[65]}^{(12)} &\approx a_{[65]} + \frac{11}{24} = (\ddot{a}_{[65]} - 1) + \frac{11}{24} = 9,989 + 0,458 = 10,447 \\
a_{70:\overline{10}|}^{(2)} &\approx a_{70:\overline{10}|} + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{D_{80}}{D_{70}}\Big) = \frac{N_{71} - N_{81}}{D_{70}} + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{543,297}{1516,997}\Big) = \\
&\quad \frac{12070,896 - 2608,0176}{1516,997} + 0,160465 = 6,398\,.
\end{aligned}
$$

◇

Primjer 7.1.2. *(Vrlo važan jer se u njemu uvode dva nova pojma: mjesečne ili općenito ispodgodišnje premije i odgođene ispodgodišnje rente.) Nađite tromjesečnu premiju koja se plaća (unaprijed) kroz* 20 *godina za osobu u dobi* 40 *za odgođenu rentu od* 500 *godišnje koje će se isplaćivati mjesečno unaprijed počevši od dobi 60, doživotno. Troškovi su* 0.20 *za svaku isplatu i* 5% *svake premije (A* 1967 − 70 *ultimate).*

Rješenje: Neka je P bruto premija. Jednadžba vrijednosti

$$0.95\ P\ \ddot{a}_{40:\overline{20}|}^{(4)} = (500 + 12 \cdot 0.2)\ {}_{20|}\ \ddot{a}_{40}^{(12)}\,.$$

Oduzimanjem (7.1.12) od (7.1.10) slijedi

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\right) \\
&= \Big(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n|}\ddot{a}_x = N_{x+n}/D_x\Big) = \frac{N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m}\frac{D_{x+n}}{D_x}\,.
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{40:\overline{20}|}^{(m)} &\approx \ddot{a}_{40:\overline{20}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - \frac{D_{40+20}}{D_{40}}), \\
\ddot{a}_{40:\overline{20}|} &= \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}}
\end{aligned}
$$

za $m = 4$ slijedi

$$0.95\ P\left(\frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} - \frac{3}{8}\left(1 - \frac{D_{60}}{D_{40}}\right)\right) = 502.4\ \frac{D_{60}}{D_{40}}\left(\frac{N_{60}}{D_{60}} - \frac{11}{24}\right)\,.$$

Rezultat: 193.03. Kako je ovo godišnji iznos premije, naš rezultat je $\frac{1}{4} \cdot 193.3 = 48.26$. ◇

7.2 Neprekidne životne rente

Pretpostavimo da se rente u godišnjem iznosu 1 isplaćuju m puta godišnje pri čemu je m jako velik. Ako je tako, gubi se razlika između prenumerando i postnumerando isplate (zamislimo $m = 365$ ili $m = 730$). To očito na limesu daje neprekidnu rentu. Sadašnja vrijednost se označava s $\bar{a}_x$ i dobije se puštanjem $m \to \infty$ u relacijama (7.1.10) odnosno (7.1.11). Bolju preciznost dobijemo kad se vratimo formuli (7.1.9)

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\ (\mu_x + \delta)$$

Slijedi

$$\bar{a}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\,(\mu_x + \delta)\,. \tag{7.2.1}$$

Ovo je moguće pisati i kao

$$\bar{a}_x \approx a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\,(\mu_x + \delta)\,. \tag{7.2.2}$$

Pokazuje se da je točna vrijednost

$$\bar{a}_x = \int\limits_0^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x\ dt = \int\limits_0^{\omega-x} \frac{D_{x+t}}{D_x}\ dt\,. \tag{7.2.3}$$

Ako se definira

$$\overline{D}_x = \int\limits_0^1 D_{x+t}\ dt \qquad \text{i} \qquad \overline{N}_x = \int\limits_0^\infty D_{x+t}\ dt = \overline{D}_x + \overline{D}_{x+1} + \cdots\,, \tag{7.2.4}$$

očito dobivamo

$$\bar{a}_x = \frac{\overline{N}_x}{D_x}\,. \tag{7.2.5}$$

Ako aproksimiramo

$$\int\limits_0^1 D_{x+t}\ dt \approx \frac{1}{2}\,(D_x + D_{x+1}) \qquad \text{tj.} \qquad \overline{D}_x \approx \frac{1}{2}\,(D_x + D_{x+1}),$$

onda bi slijedilo

$$\overline{N}_x \approx \frac{1}{2}N_x + \frac{1}{2}N_{x+1} = N_x - \frac{1}{2}D_x\,,$$

a ako je tako onda (7.2.5) daje

$$\tilde{a}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{1}{2}$$

točno isto što u limesu dolazi iz (7.1.10) .

Pogledajmo što bi se dogodilo da ovdje uzmemo $i = 0$ tj. $v = 1,\ \delta = 0$. Tada se formula

$$\bar{a}_x = \int\limits_0^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x\ dt$$

svodi na

$$\dot{e}_x = \int\limits_0^{\omega-x} {}_tp_x\ dt \tag{7.2.6}$$

što je očekivano buduće, preostalo trajanje života osobe sada u dobi x.

Uočimo da aproksimacija (7.2.2) ovdje daje

$$\dot{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\ \mu_x, \tag{7.2.7}$$

jer $\delta = 0$, a kad zanemarimo zadnji član, kako se to često čini, dobivamo

$$\dot{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}\,. \tag{7.2.8}$$

Preostaje uočiti da je u ovom slučaju e_x vrijednost doživotne postnumerando rente bez kamate; dakle

$$e_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+2}}{l_x} + \frac{l_{x+3}}{l_x} + \cdots \tag{7.2.9}$$

(suma je konačna) što je izraz koji smo prepoznali u (6.2.5) kao srednju vrijednost preostalog trajanja života osobe sada u dobi x. Često se e_x zove skraćeno, odnosno cjelobrojno (preostalo) trajanje života osobe koja je sada u dobi x.

Vidimo da aproksimacija (7.2.8) znači da je $\dot{e}_x$ približno isto što i modificirani e_x u kojem se pretpostavlja da se sve smrti događaju na polovici godine. Tada bi bilo da je

$$\begin{aligned}\text{modificirani } e_x &= \frac{l_{x+1} + \frac{1}{2}\,(l_x - l_{x+1}) + l_{x+1} + \frac{1}{2}\,(l_{x+1} - l_{x+2}) + \cdots + l_{\omega-1} + \frac{1}{2}\,(l_{\omega-1} - l_\omega)}{l_x} \\ &= \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_{\omega-1}}{l_x} + \frac{1}{2} = e_x + \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Primjer 7.2.1. *Udovica u dobi 40 dobiva tjednu rentu u iznosu 100 s dodatkom za dijete u iznosu 50 tjedno sve dok dijete ne navrši 18 godina, 5 godina od sada. Nađite sadašnju vrijednost naknade uz pretpostavku da je smrtnost djeteta (sada u dobi 13) toliko mala da se može zanemariti (A 1967-70 ultimate).*

Rješenje: Zbog učestalosti isplate pretpostavljamo da su isplate neprekidne. Uzimamo da godina ima 52.18 tjedana (jer svaka četvrta je prestupna pa 4 godine imaju 5 dana viška, dakle na svaku godinu još dođe $5 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} = 0.18$ tjedna). Dakle, radi se o godišnjem iznosu $100 \cdot 52.18$, odnosno $50 \cdot 52.18$. Dakle je

$$\text{s.v.} = 100 \cdot 52.18 \cdot \bar{a}_{40} + 50 \cdot 52.18 \cdot \bar{a}_{40:\overline{5|}} = 5218 \cdot \frac{\overline{N}_{40}}{D_{40}} + 2609 \cdot \frac{\overline{N}_{40} - \overline{N}_{45}}{D_{40}},$$

ovo drugo znamo iz općih principa

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{\overline{N}_x}{D_x} - \frac{D_{x+n}}{D_x}\,\frac{\overline{N}_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{\overline{N}_x - \overline{N}_{x+n}}{D_x}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\overline{N}_{40} &\approx N_{40} - \frac{1}{2}D_{40} = 132001.93 - \frac{1}{2}\;6986.4959 = \ldots = 128508.6821, \\ \overline{N}_{45} &\approx N_{45} - \frac{1}{2}D_{45} = 99756.536 - \frac{1}{2}\;5689.1776 = \ldots = 96911.9476\end{aligned}$$

pa se dobije 107778.52.

Ako bismo računali starim formulama, onda bi rezultat za prenumerando slučaj bio

$$\text{s.v.} = 5218\left(\frac{N_{40}}{D_{40}} - \frac{51}{104}\right) + 2609\left(\frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} - \frac{51}{104}\left(1 - \frac{D_{45}}{D_{40}}\right)\right) = 107833.35,$$

a slično, samo s razlikom na drugu stranu, za postnumerando slučaj imamo s.v. = 107723.68. ◇

Primjer 7.2.2. *Ako su smrti tokom godine uniformno distribuirane između dobi x i $x+1$, onda vrijedi*

$$\bar{a}_{x:\overline{1|}} = \frac{1}{\delta} - \frac{i\,v}{\delta^2} - p_x\left(\frac{v}{\delta} - \frac{i\,v}{\delta^2}\right)\,.$$

Rješenje: Pretpostavka znači

$$ {}_tq_x = tq_x, \quad \forall t \in [0,1]. $$

Sada imamo

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{1}|} &= \int_0^1 v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_0^1 v^t\,(1 - {}_tq_x)\, dt = \int_0^1 v^t\,(1 - t\cdot q_x)\, dt = \text{(parcijalna integracija)} \\
&= \left[\frac{v^t}{\ln v} - q_x\left(\frac{tv^t}{\ln v} - \frac{v^t}{(\ln v)^2}\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{v}{\ln v} - \frac{1}{\ln v} - q_x\left(\frac{v}{\ln v} - \frac{v}{(\ln v)^2} + \frac{1}{(\ln v)^2}\right) \\
&= \Big/\delta = -\ln v\Big/ = -\frac{v}{\delta} + \frac{1}{\delta} - (1 - p_x)\left(-\frac{v}{\delta} - \frac{v}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2}\right) \\
&= \frac{1}{\delta} - \frac{1-v}{\delta^2} - p_x\left(\frac{v}{\delta} - \frac{1-v}{\delta^2}\right) = \frac{1}{\delta} - \frac{i\,v}{\delta^2} - p_x\left(\frac{v}{\delta} - \frac{i\,v}{\delta^2}\right).
\end{aligned}
$$

◇

Primjer 7.2.3. *Uzmimo približnu relaciju* $\dot{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}$ *. Uočimo*

$$
\begin{aligned}
& e_{x-1} = \frac{1}{l_{x-1}}\,(l_x + l_{x+1} + \cdots) = \frac{l_x}{l_{x-1}} + \frac{1}{l_{x-1}}\frac{l_x}{l_x}\,(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots) \\
\Longrightarrow\quad & e_{x-1} = \frac{l_x}{l_{x-1}}\,(1 + e_x) = p_{x-1}(1 + e_x), \\
& \dot{e}_{x-1} \approx e_{x-1} + \frac{1}{2} = p_{x-1}\,(1 + e_x) + \frac{1}{2} = p_{x-1}\left(\dot{e}_x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Zadaci i rješenja

Zadaci

Zadatak 1. *Zadano je* $a_x = 20$, $a_{x:\overline{n}|} = 18$, $a_{x+n} = 8$, $A_x = 0,475$. *Izračunajte:* $a_x^{(4)}$, $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$, $P^{(4)}_{x:\overline{n}|}$, $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$.

Zadatak 2. *Osoba je u dobi 60 voljna je platiti iznos 20000 za doživotnu rentu. Početni troškovi su* 2% *premije, a troškovi obnove 0,5 po isplati. Renta je doživotna i isplaćuje se*

(a) tromjesečno unatrag,

(b) mjesečno unatrag.

Izračunajte godišnje iznose dviju renti koristeći A1967-70 ultimate.

Zadatak 3. *Osoba stara 30 godina ima pravo na odgođenu rentu od 1000 godišnje za razdoblje od 5 godina. Renta se isplaćuje u godišnjim obrocima od kojih prvi dospijeva za 11 godina. Ova osoba želi sklopiti ugovor o osiguranju života kojim bi isplata rente po datumima dospijeća bila zajamčena u slučaju da zbog smrti izgubi pravo na rentu. Izračunajte godišnju bruto premiju ograničenu na 10 godišnjih uplata (A1967-70 select). Početni troškovi su* 25% *bruto premije, a troškovi obnove su* 5% *od svake premije (uključujući prvu).*

Zadatak 4. *Izračunajte godišnju premiju za 20 godišnje mješovito osiguranje s osiguranom svotom 10000 za osobu staru 40 godina. Troškovi su* 2% *osigurane svote na početku, i* 2,5% *svake premije (uklju. prvu). Također izračunajte odgovarajuću polugodišnju i mjesečnu premiju (A1967-70 ultimate).*

Rješenja

1. (6.7.3)

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x \quad\Longrightarrow\quad d = \frac{1-A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{1-A_x}{1+1+a_x} = 0,025$$

$$\Longrightarrow\quad \delta = -\ln(1-d) = 0,0253178$$

$$a_x - a_{x:\overline{n}|} = {}_n a_x = v^n\ {}_nP_x a_{x+n} \quad\Longrightarrow\quad v^n\ {}_nP_x = \frac{a_x - a_{x:\overline{n}|}}{a_{x+n}}$$

drugim riječima

$$\begin{aligned}
v^n\ {}_np_x &= A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{20-18}{8} = 0,25,\\
a_x^{(4)} &= a_x + \frac{3}{8} = 20,375\\
A_{x:\overline{n}|} &\overset{(6.7.4)}{=} 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = (\text{Pr. } 6.2.3)\\
&= 1 - d(1 + a_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}) = 1 - d(1+18-0,25) = 0,53125,\\
A^1_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = 0,28125,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{a}^{(4)}_{x:\overline{n}|} &\simeq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{3}{8}(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}) = (1+18-0,25) - \frac{3}{8}(1-0,25) = 18,46125,\\
P_{x:\overline{n}|} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}} = \frac{0,53125}{18,75} = 0,0283,\\
P^{(4)}_{x:\overline{n}|} &= P_{x:\overline{n}|}\ \frac{a_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(4)}_{x:\overline{n}|}} = 0,02878,\\
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &\simeq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}(1 - A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}) = 18,375.
\end{aligned}$$

2. Ako je S godišnji iznos rente, onda je

$$20000 = S\ a^{(m)}_{60} + 400 + 0,5\ a^{(m)}_{60}.$$

$$a^{(m)}_{60} = a_{60} + \frac{m-1}{2m} = 11,551245 + \frac{m-1}{2m}$$

pa dobivamo jednadžbu

$$19600 = S(11,551245 + \frac{m-1}{2m}) + 0,5(11,551245 + \frac{m-1}{2m})$$

$m = 4 \implies S = 1642,93,$

$m = 12 \implies S = 1631,53\,.$

3. s.v. isplata kojih osoba ne doživi (obaveze osiguravajuće kuće) + s.v. troškova = s.v. premije, gdje je

s.v. isplata kojih osoba ne doživi

= s.v. izvjesnih isplata ($1000\,{}_{11|}\ddot{a}_{\overline{5}|}$) – s.v. isplata koje osoba doživi ($1000\,{}_{11|}\ddot{a}_{[30]:\overline{5}|}$).

$$\begin{aligned}
1000({}_{11|}\ddot{a}_{\overline{5}|} - {}_{11|}\ddot{a}_{[30]:\overline{5}|}) + 0,25P + 0,05P\,\ddot{a}_{[30]:\overline{10}|} &= P\,\ddot{a}_{[30]:\overline{10}|},\\
\ddot{a}_{[30]:\overline{10}|} &= \frac{N_{[30]} - N_{40}}{D_{[30]}} = 8.41119,\\
{}_{11|}\ddot{a}_{\overline{5}|} &= v^{11}\frac{1-v^5}{1-v} = |v = 1/1,04| = 3,00749,\\
{}_{11|}\ddot{a}_{[30]:\overline{5}|} &= \frac{D_{41}}{D_{[30]}}\frac{N_{41} - N_{46}}{D_{41}} = 2,96721\\
&\Longrightarrow \quad P = 5,20037.
\end{aligned}$$

4. Jednadžba vrijednosti je

$$P\ddot{a}_{40:\overline{20}|} = 10000A_{40:\overline{20}|} + 200 + 0,025P\ddot{a}_{40:\overline{20}|}.$$

Nađe se

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{40:\overline{20}|} &= \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = 13,7638, \quad A_{40:\overline{20}|} = \frac{M_{40} - M_{60} + D_{60}}{D_{40}} = 0,4706\\
\Longrightarrow \quad P &= \frac{4706 + 200}{0,975 \cdot 13,7638} = 365,58.
\end{aligned}$$

Označimo godišnje iznose polugodišnje premije s $P^{(2)}$, a mjesečne s $P^{(12)}$.
Jednadžbe vrijednosti su:

$$\begin{aligned}
P^{(2)}\ddot{a}^{(2)}_{40:\overline{20}|} &= 10000\,A_{40:\overline{20}|} + 200 + 0,025P^{(2)}\ddot{a}^{(2)}_{40:\overline{20}|},\\
P^{(12)}\ddot{a}^{(12)}_{40:\overline{20}|} &= 10000\,A_{40:\overline{20}|} + 200 + 0,025P^{(12)}\ddot{a}^{(12)}_{40:\overline{20}|}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\ddot{a}^{(m)}_{40:\overline{20}|} = \ddot{a}_{40:\overline{20}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - \frac{D_{60}}{D_{40}}), \quad \frac{D_{60}}{D_{40}} = \frac{2855,5942}{6986,4959},$$

imamo da je $P^{(2)} = 369,55$, i $P^{(12)} = 372,92$.

8 Vrijednost police (rezerva)

8.1 Uvod

Promotrimo osiguranje života, u momentu zanemarimo troškove. U trenutku sklapanja ugovora sadašnja vrijednost naknade (koju osiguranje očekuje da će isplatiti) je jednaka sadašnjoj vrijednosti premija (koje se očekuju da će biti uplaćene). Kako vrijeme prolazi vrijednost naknade raste dok vrijednost premija koje tek trebaju biti uplaćene pada. Osiguratelj stoga mora držati u svom posjedu u svakom trenutku **razliku** sadašnje vrijednosti naknade i premije. Taj iznos se zove **vrijednost police ili rezerva**.

Zamislimo da velik broj osoba u dobi x, njih $\lambda \cdot l_x$ kupi doživotno osiguranje za slučaj smrti i svi neka uplaćuju godišnju premiju P_x. Pretpostavit ćemo da osiguratelj na sredstva u svom posjedu ostvaruje točno onu kamatnu stopu i na temelju koje su premije obračunate (koja je ugrađena u tablice pri računanju simbola D_x i C_x). Pretpostavit ćemo također da je smrtnost promatrane skupine točno u skladu s našom tablicom smrtnosti - to dakle znači da bi i tablica trebala biti korektna i λ dovoljno velik.

Rizik smrti je rastuća funkcija dok su premije konstantne. Posljedica je da na kraju godine t akumulirani iznos uplaćenih premija premašuje akumulirani iznos isplaćenih svota. Osiguratelj dakle posjeduje svotu novca koja se naziva **ukupna neto premijska rezerva**. Ukupna rezerva na kraju godine t podijeljena brojem polica tog trenutka na snazi zove se **neto premijska rezerva** po slučajno odabranoj polici.

Primjer 8.1.1. *Zamislimo 1000 polica koje počinju u isto vrijeme za osobe točno u dobi 60 godina. Neka je riječ o mješovitom osiguranju na rok od 5 godina, osigurana svota neka je 100 (plativa na kraju godine u kojoj osiguranik umre, odnosno po isteku ugovorenog perioda u slučaju doživljenja). Neka se premija uplaćuje godišnje (prenumerando). Nađite godišnju premiju po polici, te ukupnu premijsku rezervi i vrijednost police (rezervu po polici) na kraju svake godine. (A 1967-70 ultimate).*

Rješenje: S $P_{x:\overline{n}|}$ označimo neto vrijednost premije po polici. Izjednačavanjem sadašnjih vrijednosti svih premija i naknada imamo jednadžbu

$$P_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = 100 \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.$$

Za $x = 60$ i $n = 5$ imamo

$$P_{60:\overline{5}|} = 100 \cdot \frac{M_{60} - M_{65} + D_{65}}{N_{60} - N_{65}} = 18,42867.$$

Sad pogledajmo situaciju nakon točno 1 godine (neposredno prije uplate 2. premije). Razlike sadašnjih vrijednosti budućih naknada (obaveza osiguravatelja) i budućih premija (obaveza osiguranika) je

$$100 \cdot A_{61:\overline{4}|} - P_{60:\overline{5}|} \cdot \ddot{a}_{61:\overline{4}|} = 100 \cdot \frac{M_{61} - M_{65} + D_{65}}{D_{61}} - 18,42867 \cdot \frac{N_{61} - N_{65}}{D_{61}} = 17,982106\,.$$

Kako smo osigurali 1000 osoba (od kojih je nakon 1 godine ostalo živih $1000\frac{l_{61}}{l_{60}}$ - onih koji će plaćati buduće premije i primati buduće naknade) osiguravatelj u rezervi moramo imati ukupno

$$1000 \cdot 17,982106 \cdot \frac{l_{61}}{l_{60}} = 17982,106 \cdot \frac{29606,239}{30039,787} = 17722,57.$$

Nakon točno 2 godine (neposredno prije uplate 3. premije) imamo

$$1000\left(100\,A_{62:\overline{3}|} - P_{60:\overline{5}|} \cdot \ddot{a}_{62:\overline{3}|}\right) \cdot \frac{l_{62}}{l_{60}} = 1000\,(89,09704 - 18,42867 \cdot 2,83477) \cdot 0,969785 = 35742,44.$$

Dakle, na kraju 2. godine u rezervi treba biti iznos 35742,44. Itd., da bi na kraju 5. godine u rezervi bilo $91354,446$ koliko je potrebno za isplatu doživljenja ugovorenog iznosa 100 svakom od, prema tablici smrtnosti, očekivanih $913,54$ preživjelih osiguranika (vidi tabelu).

S druge strane, na početku 1. godine, naplačeno je $1000 \cdot 18,42867 = 18428,67$ (premije), i ukamatačeno po stopi od 4% , tako da je to naraslo na 19165,82. Na kraju 1. godine za štetu se isplatio iznos $100 \cdot \frac{d_{60}}{l_{60}} \cdot 1000 = 1443,25$ i ostalo je $17722,57$. Dakle

$$1000\left(P_{60:\overline{5}|} \cdot (1 + 0,04) - 100 \cdot \frac{d_{60}}{l_{60}}\right) = 17722,57.$$

Upravo kolika je i potrebna rezerva na kraju 1. godine. Na samom početku 2. godine naplati se $1000 \cdot \frac{l_{61}}{l_{60}} \cdot 18,42867 = 18162,701$, što zajedno s prethodniim iznosom od $17722,57$, uz kamatnu stopu od 4% na kraju 2. godine iznosi $37320,685$. Na kraju 2. godine za štetu se isplatilo $1000 \cdot 100 \cdot \frac{d_{61}}{l_{60}} = 1578,244$ i akumulirani iznos je $35742,44$. Dakle imamo

$$1000 \cdot P_{60:\overline{5}|} \cdot \left((1 + 0,04)^2 + \frac{l_{61}}{l_{60}}(1 + 0,04)\right) - 1000 \cdot 100 \cdot \left(\frac{d_{60}}{l_{60}}(1 + 0,04) + \frac{d_{61}}{l_{60}}\right) = 35742,442,$$

tj. ostaje $35742,44$. Itd., kako je dano u donjoj tabeli, na kraju 5. godine ostaje potrebnih $91354,45$. U posljednjem redu su iznosi neposredno nakon isplate osiguranja zbog doživljenja.

godine	prispjele premije na početku godine	naknade krajem godine	ukupna premije ukamačena na kraju godine	ukupna ukamačena naknade na kraju godine	ukupna rezerva na kraju godine	broj preživjelih na kraju godine	vrijednost jedne police na kraju godine
1	18 428,672	1 443,246	19 165,819	1 443,246	17 722,573	985,568	17,982
2	18 162,701	1 578,244	38 821,661	3 079,219	35 742,442	969,785	36,856
3	17 871,852	1 721,340	58 961,254	4 923,729	54 037,525	952,572	56,728
4	17 554,632	1 872,247	79 576,521	6 992,925	72 583,596	933,849	77,725
5	17 209,601	2 030,477	100 657,567	9 303,119	91 354,448	913,544	100,000
	-	91 354,448	-	100 657,567	0,000	-	0,000

Inače je običaj da se u ovakvim računima na "*kraju godine*" zamisli trenutak neposredno po svim izvršenim isplatama i prije svih uplata godišnje premije.

◇

8.2 Prospektivna i retrospektivna rezerva

Ove dvije vrste rezervi računali smo maloprije (primjer 8.1.1) u konkretnoj situaciji.

Uzmimo sada općenito da se osiguralo $\lambda \cdot l_x$ osoba svi u dobi x, svima je obračunata premija P_x. Promotrimo situaciju t godina poslije. Tada je ukupna vrijednost police osiguranja života, po definiciji, (osigurana svota = 1)

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \text{akumulirana} \\ \text{vrijednost premije} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{akumulirana vrijednost} \\ \text{dospjelih šteta} \end{pmatrix} \\
&= P_x \Big(\lambda\, l_x (1+i)^t + \lambda\, l_{x+1} (1+i)^{t-1} + \cdots + \lambda\, l_{x+t-1}(1+i) \Big) \\
&\quad - 1 \cdot \Big(\lambda\, d_x (1+i)^{t-1} + \lambda\, d_{x+1}(1+i)^{t-2} + \cdots + \lambda\, d_{x+t-1} \Big) \\
&:= \ {}_tV_x \cdot \lambda\, l_{x+t}
\end{aligned}
$$

Drugim riječima: gornjom relacijom je uveden simbol ${}_tV_x$ koji predstavlja **vrijednost police po osiguranoj osobi koja je živa u trenutku** t. Dakle je

$$
{}_tV_x = \frac{1}{\lambda\, l_{x+t}} \lambda P_x \Big(l_x (1+i)^t + \ldots + l_{x+t-1}(1+i) \Big) - \frac{1}{\lambda\, l_{x+t}} \lambda \Big(d_x (1+i)^{t-1} + \ldots + d_{x+t-1} \Big) \Longrightarrow
$$

$$
{}_tV_x = P_x \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} \,. \tag{8.2.1}
$$

Odatle se lako pokaže da vrijedi sljedeća zanimljiva formula

$$
{}_tV_x = \frac{1}{\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{t|}}}} \Big[P_x\, \ddot{a}_{x:\overline{t|}} - A^{1}_{x:\overline{t|}} \Big] \,.
$$

Ova metoda za računanje rezerve zove se **retrospektivna**. Uočimo da je formula točna i za doživotno i privremeno osiguranje života, kao i za mješovito osiguranje (kada je $t < n =$ osigurani period). Ako je S osigurana svota (jednaka za oba slučaja u mješovitom osiguranju) izvedeni izraz treba množiti sa S. Još se može primijetiti da je prvi član točno ono što daje formula za akumulaciju uplaćenih premija do trenutka t (vidi 6.3.3).

Pogledajmo konkretne rezultate koje daje formula (8.2.1) u pojedinim slučajevima.

(a) Doživotno osiguranje života,

$$
\begin{aligned}
P_x &= \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}, \\
{}_tV_x &= \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} \,.
\end{aligned} \tag{8.2.2}
$$

(b) Privremeno osiguranje života,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}^{1}_{x:\overline{n|}} &= \frac{\mathrm{A}^{1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}, \\
{}_t\mathrm{V}^{1}_{x:\overline{n|}} &= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} \,.
\end{aligned} \tag{8.2.3}
$$

(c) Privremeno mješovito osiguranje,

$$
\begin{aligned}
P_{x:\overline{n|}} &= \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}, \\
{}_t\mathrm{V}_{x:\,\overline{n|}} &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}\,. \qquad (8.2.4)
\end{aligned}
$$

Alternativna metoda računanja rezerve je **prospektivna**: vrijednost police je ovdje vrijednost u trenutku t razlika između vrijednosti budućih isplata i nedospjelih uplata premija. Ovdje moramo posebno računati svaki pojedini slučaj:

(a) Doživotno osiguranje života:

$$
{}_tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}\,. \qquad (8.2.2')
$$

(b) Privremeno osiguranje života:

$$
{}_t\mathrm{V}^1_{x:\,\overline{n|}} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - P^1_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}\,. \qquad (8.2.3')
$$

(c) Mješovito osiguranje:

$$
{}_tV_{x:\overline{n|}} = A_{x+t:\overline{n-t|}} - P_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}\,. \qquad (8.2.4')
$$

Naravno u sva tri slučaja moramo dobiti isto. Konkretno u slučaju (a) imamo $P_x = \frac{M_x}{N_x}$ pa (8.2.2') daje

$$
\frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} + \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{D_{x+t}} = (8.2.2)\,.
$$

Također je lagano vidjeti i slučajeve (b) i (c). Pokažimo (c); pođimo od (8.2.4') po kojoj je

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x:\overline{n|}} &= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \\
&= \frac{(M_x - M_{x+n} + D_{x+n}) + (M_{x+t} - M_x)}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+n} \pm N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} \\
&\quad - \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} = (8.2.4).
\end{aligned}
$$

Na kraju uočimo da se ove formule i dalje mogu preoblikovati. Najprije, iz (6.7.2), vidi i izvod, znamo da je

$$
M_x = vN_x - N_{x+1}
$$

pa dijeljenjem s D_x dobivamo poznatu formulu

$$
A_x = \frac{M_x}{D_x} = v\,\ddot{a}_x - a_x = 1 - d\,\ddot{a}_x
$$

(jer je $d = 1 - v$).

Dalje, u slučaju (a) imamo

$$P_x + d = \frac{M_x}{N_x} + d = \frac{vN_x - N_{x+1}}{N_x} + \frac{d\,N_x}{N_x} = \frac{D_x}{N_x} \overset{(6.2.4)}{=} \frac{1}{\ddot{a}_x}.$$

Zato u slučaju (a) formula (8.2.2′) prelazi u

$$_tV_x = 1 - d\,\ddot{a}_{x+t} - P_x\,\ddot{a}_{x+t} = 1 - (P_x + d)\,\ddot{a}_{x+t}\,, \qquad \text{tj.}$$
$$_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}.$$

Analogno možemo pojednostaviti i slučaj (c). Naime najprije se dobije

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

pa sad (8.2.4') daje

$$\begin{aligned} {}_tV_{x:\overline{n}|} &= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= 1 - d\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = 1 - (P_{x:\overline{n}|} + d)\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} P_{x:\overline{n}|} + d &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + d(N_x - N_{x+n})}{N_x - N_{x+n}} \\ &= \frac{vN_x - N_{x+1} - vN_{x+n} + N_{x+n+1} + d\,N_x - d\,N_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \\ &= \frac{N_x - N_{x+1} - N_{x+n} + N_{x+n+1} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \end{aligned}$$

vrijedi dakle

$$_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,. \tag{8.2.5}$$

Primjer 8.2.1. *Osoba u dobi x osigurava odgođenu doživotnu godišnju rentu u iznosu R plativu unaprijed, odgođenu n godina. Premija se plaća godišnje tokom m godina unaprijed, $m < n$. Odredite $_tV_x$, t=0,1,...,n.*

Rješenje: Jednadžba vrijednosti

$$P\,\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x} \Longrightarrow P = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}.$$

Računat ćemo prospektivno:

$$t \le m-1: \qquad {}_tV_x = \frac{N_{x+n}}{D_{x+t}} - P\,\frac{N_{x+t} - N_{x+m}}{D_{x+t}},$$
$$t \ge m: \qquad {}_tV_x = \frac{N_{x+n}}{D_{x+t}}.$$

◇

Pokaži da se isti rezultat dobije i ako se računa retrospektivno!

8.3 Deficit i gubitak zbog smrtnosti

Izvedimo najprije vezu između dviju uzastopnih rezervi. Neka se radi o doživotnom osiguranju života, uzmimo prospektivnu formulu (8.2.2')

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P_x\,\ddot{a}_{x+t} $$

još se sjetimo

$$ A_x = \frac{M_x}{D_x} $$

pa je

$$ {}_tV_x + P_x = A_{x+t} - P_x\ddot{a}_{x+t} + P_x = A_{x+t} - (\ddot{a}_{x+1} - 1)P_x = A_{x+t} - a_{x+t}P_x. $$

Nadalje,

$$ A_{x+t} = q_{x+t}\cdot v + p_{x+t}\cdot v\cdot A_{x+t+1} \tag{*} $$

gdje je

q_{x+t} - je vjerojatnost smrti u godini $(x+t, x+t+1)$,

p_{x+t} - vjerojatnost proživljavanja te godine,

$v\cdot A_{x+t+1}$ - sadašnja vrijednost osiguranja.

Također znamo $a_{x+t} = v\,p_{x+t}\,\ddot{a}_{x+t+1}$ i sad slijedi

$$ \begin{aligned} {}_tV_x + P_x &= v\cdot q_{x+t} + v\cdot p_{x+t}\cdot A_{x+t+1} - P_x\cdot v\cdot p_{x+t}\cdot \ddot{a}_{x+t+1} \\ &= v\cdot q_{x+t} + v\cdot p_{x+t}(A_{x+t+1} - P_x\cdot \ddot{a}_{x+t+1}) \\ &= v\cdot q_{x+t} + v\cdot p_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_x \qquad \Big/ \cdot (1+i) \\ &\Longrightarrow \quad \big({}_tV_x + P_x\big)(1+i) = q_{x+t} + p_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_x\,. \end{aligned} $$

Uočimo da gornja formula u obliku

$$ ({}_tV_x + P_x)(1+i) - q_{x+t} = p_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_x $$

ima i zdravorazumsko objašnjenje (prati se tok isplate i uplata u dobi $[x+t, x+t+1)$).

Označimo sa S osiguranu svotu i promotrimo grupu polica . Vrijedi

$$ \sum \big({}_tV_x + P_x\big)(1+i) = \sum {}_{t+1}V + \sum q_{x+t}\big(S - {}_{t+1}V\big) \tag{8.3.1} $$

(Sumira se po policama koje su na snazi u trenutku t. Uočimo da S ulazi već u (*) u prvi član s desna). Jasno je da jednakost vrijedi ukoliko su ispunjene temeljne (ostvarena kamata je u skladu s bazom, smrtnost je u skladu s bazom) i tehničke pretpostavke (nema otkaza, nema troškova itd.).

Svota $S - {}_{t+1}V$ se zove svota pod rizikom (za tu godinu!), a izraz $\sum q_{x+t}(S - {}_{t+1}V)$ je očekivana svota pod rizikom (EDS=expected death strain) .

Sad uzimamo u obzir razliku između stvarne smrtnosti i smrtnosti iz tablica. Uz stvarnu smrtnost osiguratelj na kraju godine treba imati

$$\underbrace{\sum}_{\text{štete}} S + \underbrace{\sum}_{\text{preživjeli}} {}_{t+1}V = \underbrace{\sum}_{\text{svi na snazi u t}} {}_{t+1}V \; + \underbrace{\sum}_{\text{štete}} (S - {}_{t+1}V)\,. \tag{8.3.2}$$

Uočimo da su prvi članovi s desna u (8.3.1) i (8.3.2) isti - obje sume idu po svim policama na snazi u času t. Drugi član s desna, $\underbrace{\sum}_{\text{štete}}(S - {}_{t+1}V)$ se zove svote pod rizikom ili ADS= actual death strain. Dakle dobit iz smrtnosti u godini $[t, t+1)$ je EDS - ADS, izravno ako je predznak negativan radi se o gubitku od smrtnosti.

Primjer 8.3.1. *Na dan 1.1.1972. osiguravajuće društvo izdalo je određen broj polica s godišnjim plaćanjem premije grupi osoba u dobi $x = 45$. Sve police su bile s trajanjem od* 20 *godina i to neke za osiguranje za slučaj smrti, a neke za mješovito osiguranje. Uz pretpostavku da nema drugih uzroka smanjenja osim smrti, izračunajte dobit ili gubitak za kalendarsku godinu 1981. za police izdane ovoj grupi ako su poznati sljedeći podaci (A 1967-70 ultimate).*

Ukupna osigurana svota na dan 31.12.1981. (za mješovito osiguranje iznosi 600 000, dok za osiguranje u slučaju smrti 200 000).

Osigurane svote polica koje su prestale vrijediti u 1981. godini (za mješovito osiguranje iznosi 4000, dok za osiguranje u slučaju smrti 2000).

Rješenje: Računamo dobit, odnosno gubitak za svaki tip osiguranja

(a) Osigurana svota na snazi 1.1.1981. je bilo 604 000. Svota pod rizikom, po jedinici je

$$1 - {}_{10}V_{45:\overline{20}|} \overset{(8.2.5)}{=} \frac{a_{55:\overline{10}|}}{a_{45:\overline{20}|}} = \frac{N_{55} - N_{65}}{D_{55}} \cdot \frac{D_{45}}{N_{45} - N_{65}} = 0.5964575.$$

Ukupna svota pod rizikom je

$$\begin{aligned} 604000 \cdot 0.5964575 = 360260.32, \\ EDS &= (9 \text{ godina je prošlo}) = q_{x+t} \cdot \text{ukupna svota} \\ &= q_{54} \cdot 360260.32 = 2722.03, \\ ADS &= \text{stvarni trošak} = 4000 \cdot 0.5964575 = 2385.83. \end{aligned}$$

Dobit od smrtnosti je ovdje $EDS - ADS = 336.20$.

(b) Ovdje je gubitak; EDS - ADS $= 1460.27 - 1913.54 = -453.27$.

◇

Zadaci i rješenja

Zadaci

Zadatak 1. *Neka se za doživotno osiguranje za slučaj smrti za osobu sada u dobi x godišnja premija plaća m godina. Izračunajte ${}_tV_x$ i retrospektivno i prospektivno.*
(ovdje, kao i uvijek, rezerva se podrazumijeva neposredno po isplatama, neposredno prije uplata)

Zadatak 2. *Mješovito osiguranje za osobu sada u dobi 30 na rok od 25 godina; osigurava se 5000 za slučaj smrti, 10000 za doživljenje. Ako se premija plaća godišnje u jednakim iznosima izračunajte* ${}_{10}V$ *(pričuva nakon 10 godina) na bazi A1967-70 ultimate.*

Zadatak 3. *Muškarac u dobi* $x = 30$ *sklopio je 30-godišnje mješovito osiguranje s osiguranom svotom 5000. Početni troškovi su 50% prve premije i 2% osigurane svote, trošak obnove je 5% svake premije osim prve, trošak 50 kod prijave štete. Treba naći godišnju premiju te retrospektivnu rezervu nakon 16 godina (baza A1967-70 ultimate).*

Zadatak 4. *Mješovito osiguranje za osobu sada u dobi 30 na rok od 25 godina; osigurava se 5000 za slučaj smrti, 10000 za doživljenje. Ako se premija plaća godišnje u jednakim iznosima izračunajte* ${}_{10}V$ *(pričuva nakon 10 godina) na bazi A1967-70 ultimate.*

Zadatak 5. *Neka se za doživotno osiguranje za slučaj smrti za osobu sada u dobi x godišnja premija plaća m godina. Izračunajte* ${}_tV_x$ *i retrospektivno i prospektivno.*

Rješenja

1. Retrospektivno je po (8.2.1)

$$ {}_tV_x = P_x \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} $$

s tim da je ovdje

$$ P_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} $$

pa slijedi

$$ {}_tV_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}. $$

Prospektivno

$$ \begin{aligned} {}_tV_x &= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+m}}{D_{x+t}}, \quad (t \leq m-1) \\ &= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot \frac{-N_x + N_{x+t} + N_x - N_{x+m}}{D_{x+t}}. \end{aligned} $$

Kad se od retro sada oduzme pro ostaje izraz koji mora biti 0. Zaista, to je

$$ \begin{aligned} &\frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot \frac{N_x - N_{x+m}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} \\ &\qquad + \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot \frac{-N_x + N_{x+t} + N_x - N_{x+m}}{D_{x+t}} = 0. \end{aligned} $$

2. Da su svote jednake imali bismo (8.2.5). Ovako treba računati. Možemo se snaći ovako:

$$ {}_tV_x \overset{(8.2.5)}{=} {}_tV_{x:\overline{n|}} \cdot 5000 + {}_t\mathrm{V}_{x:\overset{\,1}{\overline{n|}}} \cdot 5000 $$

(s tim da (8.2.6) možemo upotrijebiti za prvi član).

Sad imamo prospektivno

$$ {}_{10}\mathrm{V}_{30:\overset{1}{\overline{25}|}} = \mathrm{A}_{40:\overset{1}{\overline{15}|}} - \mathrm{P}_{30:\overset{1}{\overline{25}|}} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{15}|} = \frac{D_{55}}{D_{40}} - \frac{D_{55}}{D_{30}}\frac{\ddot{a}_{40:\overline{15}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{25}|}}. $$

Dakle rezultat je:

$$ \begin{aligned} {}_tV_x &= 5000\big(1 - \frac{N_{40}-N_{55}}{D_{40}}\frac{D_{30}}{N_{30}-N_{55}} + \frac{D_{55}}{D_{40}} - \frac{D_{55}}{D_{30}}\frac{N_{40}-N_{55}}{D_{40}}\frac{D_{30}}{N_{30}-N_{55}}\big) \\ &= 5000(1 - 0,70991 + 0,52452 - 0,24935) = 2826,30\,. \end{aligned} $$

3.

$$ \begin{aligned} P\,\ddot{a}_{30:\overline{30}|} = 5000\frac{M_{30}-M_{60}+D_{60}}{D_{30}} &+ 0,5P + 0,02\cdot 5000 + 0,05\,P\cdot a_{30:\overline{29}|} \\ +\, 50\frac{M_{30}-M_{60}+D_{60}}{D_{30}} & \\ (a_{30:\overline{29}|} = \ddot{a}_{30:\overline{30}|} - 1) & \\ \Longrightarrow \quad P(0,95\ddot{a}_{30:\overline{30}|} - 0,45) &= 5050\frac{M_{30}-M_{60}+D_{60}}{D_{30}} + 100 \\ \Longrightarrow \quad P &= 105,96. \end{aligned} $$

Rezerva može ostati; inače je

$$ {}_{16}V_{30} = P\frac{N_{30}-N_{46}}{D_{46}} - \frac{M_{30}-M_{46}}{D_{46}}\cdot 5000. $$

4.

$$ {}_{10}V = {}_{10}\,V_{x:\overline{n}|}\cdot 5000 + {}_{10}\,\mathrm{V}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\cdot 5000 = 2826,30 $$

9 Dodatak

p_x	—	Stopa doživljenja dobi $x+1$ osoba u dobi x
q_x	—	Stopa nedoživljenja dobi $x+1$ osoba u dobi x
μ_x	—	Intenzitet smrtnosti
$\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}\rceil}}$	—	Sadašnja vrijednost obaveze osiguravatelja (naknade) pri *osiguranju doživljenja* (pure endowment) osoba u dobi x na n godina uz osiguranu svotu 1
A_x	—	Sadašnja vrijednost obaveze osiguravatelja (naknade) pri doživotnom *osiguranju života* (whole life insurance) osobe u dobi x uz osigurani iznos 1
$\mathrm{A}^{\,1}_{x:\overline{n}\rceil}$	—	Sadašnja vrijednost obaveze osiguravatelja (naknade) pri privremenom (na određeno vrijeme) *osiguranju života* (term life insurance) osobe u dobi x na n godina uz osigurani iznos 1
$A_{x:\overline{n}\rceil}$	—	Sadašnja vrijednost obaveze osiguravatelja (naknade) u slučaju *mješovitog osiguranja* (endowment) osobe u dobi x na n godina uz osigurani iznos 1
a_x	—	Sadašnj vrijednost neposredne doživotne godišnje rente (whole life annuities) u iznosu 1, plative unatrag (postnumerando)
$\ddot{a}_x$	—	Sadašnj vrijednost neposredne doživotne godišnje rente u iznosu 1, plative unaprijed (prenumerando)
$a_{x:\overline{n}\rceil}$	—	Sadašnj vrijednost neposredne privremene godišnje rente (temporary life annuities) na n godina u iznosu 1, plative unatrag (postnumerando)
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	—	Sadašnj vrijednost neposredne privremene godišnje rente na n godina u iznosu 1, plative unaprijed (prenumerando)

9.1 A: Aktuarske formule sa zamjenskim funkcijama

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$_{m|}a_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

$$_{m|}a_{x:\overline{n}|} = {}_{m|n}a_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{m|n}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n\,N_{x+n}}{D_x}$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{n\,N_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_x}$$

$$a_x^{(p)} \approx a_x + \frac{p-1}{2p}$$

$$\ddot{a}_x^{(p)} \approx \ddot{a}_x - \frac{p-1}{2p}$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{(p)} \approx a_{x:\overline{n}|} + \frac{p-1}{2p}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(p)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{p-1}{2p}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$_{m|}a_x^{(p)} \approx {}_{m|}a_x + \frac{p-1}{2p} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x^{(p)} \approx {}_{m|}\ddot{a}_x - \frac{p-1}{2p} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x}$$

$$ {}_{m|}a^{(p)}_{x:\overline{n}|} \approx {}_{m|}a_{x:\overline{n}|} + \frac{p-1}{2p} \cdot \frac{D_{x+m} - D_{x+m+n}}{D_x} $$

$$ {}_{m|}\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|} \approx {}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{p-1}{2p} \cdot \frac{D_{x+m} - D_{x+m+n}}{D_x} $$

$$ (Ia)^{(p)}_x \approx (Ia)_x + \frac{p-1}{2p}\, \ddot{a}_x $$

$$ (I\ddot{a})^{(p)}_x \approx (I\ddot{a})_x - \frac{p-1}{2p}\, \ddot{a}_x $$

$$ (Ia)^{(p)}_{x:\overline{n}|} \approx (Ia)_{x:\overline{n}|} + \frac{p-1}{2p} \left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\, \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) $$

$$ (I\ddot{a})^{(p)}_{x:\overline{n}|} \approx (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - \frac{p-1}{2\,p} \left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\, \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) $$

$$ \mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

$$ {}_{m/}\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n+m}|}} = \frac{D_{x+n+m}}{D_x} $$

$$ A_x = \frac{M_x}{D_x} $$

$$ {}_{m/}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} $$

$$ \mathrm{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} $$

$$ {}_{m/}\mathrm{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} $$

$$ A_{x:\overline{n}|} = \mathrm{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} $$

$$ {}_{m/}A_{x:\overline{n}|} = {}_{m/}\mathrm{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n+m}|}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n} + D_{x+m+n}}{D_x} $$

$$ (IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - n\, M_{x+n}}{D_x} $$

$$ (IA)_x = \frac{R_x}{D_x} $$

$$ s_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \qquad \left(= a_{x:\overline{n}|}\, \frac{1}{\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}} \right) $$

$$ \ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \qquad \left(= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\, \frac{1}{\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}} \right) $$

9.2 B: Life Insurance table A1967-70

Tablica mortaliteta LAT: A1967-70

Osnovne funkcije

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	dob $x+2$
			344 89· 000	0
			344 63· 823	1
0	344 81· 408	344 61· 409	344 40· 388	2
1	344 56· 927	344 38· 320	344 18· 690	3
2	344 33· 841	344 16· 624	343 98· 727	4
3	344 12· 836	343 97· 007	343 80· 496	5
4	343 93· 221	343 78· 776	343 63· 650	6
5	343 75· 681	343 62· 274	343 48· 186	7
6	343 59· 181	343 46· 811	343 33· 760	8
7	343 44· 063	343 32· 386	343 20· 026	9
8	343 29· 638	343 18· 653	343 06· 985	10
9	343 15· 907	343 05· 612	342 94· 291	11
10	343 03· 210	342 92· 919	342 81· 602	12
11	342 90· 518	342 80· 230	342 68· 918	13
12	342 77· 830	342 67· 547	342 55· 210	14
13	342 64· 461	342 53· 497	342 39· 110	15
14	342 50· 070	342 37· 055	342 18· 225	16
15	342 32· 259	342 15· 485	341 90· 508	17
16	342 09· 439	341 87· 202	341 54· 424	18
17	341 79· 680	341 51· 017	341 20· 378	19
18	341 43· 368	341 16· 899	340 88· 257	20
19	341 09· 166	340 84· 731	340 57· 937	21
20	340 76· 957	340 54· 389	340 29· 283	22
21	340 46· 610	340 25· 734	340 02· 148	23
22	340 17· 983	339 98· 619	339 76· 374	24
23	339 90· 921	339 72· 879	339 51· 787	25
24	339 65· 254	339 48· 338	339 28· 197	26
25	339 40· 795	339 24· 799	339 05· 397	27
26	339 17· 341	339 02· 051	338 83· 161	28
27	338 94· 668	338 79· 860	338 61· 242	29
28	338 72· 531	338 57· 972	338 39· 370	30
29	336 50· 662	338 36· 106	338 17· 250	31
30	338 28· 764	338 13· 958	337 94· 559	32
31	338 06· 514	337 91· 191	337 70· 942	33
32	337 83· 557	337 67· 439	337 46· 015	34
33	337 59· 503	337 42· 299	337 19· 354	35
34	337 33· 924	337 15· 331	336 90· 498	36
35	337 06· 352	336 86· 054	336 58· 943	37
36	336 76· 272	336 53· 938	336 24· 136	38
37	336 43· 122	336 18· 409	335 85· 478	39
38	336 06· 286	335 78· 835	33542· 311	40
39	335 65· 089	335 34· 529	334 93· 920	41
40	335 18· 794	334 84· 739	334 39· 528	42
41	334 66· 599	334 28· 646	333 78· 285	43
42	334 07· 624	333 65· 360	333 09· 271	44
43	333 40· 915	332 93· 909	332 31· 486	45
44	332 65· 431	332 13· 241	331 43· 847	46
45	331 80· 042	331 22· 213	330 45· 181	47
46	330 83· 523	330 19· 589	329 34· 221	48
47	329 74· 549	329 04· 032	328 09· 601	49
48	328 51· 686	327 74· 102	326 69· 855	50
49	327 13· 392	326 28· 250	325 13· 405	51
50	325 58· 008	324 64· 813	323 38· 568	52
51	323 83· 756	322 82· 013	321 43· 546	53
52	321 88· 740	320 77· 958	319 26· 430	54

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	dob $x+2$
53	319 70· 942	318 50· 639	316 85· 203	55
54	317 28· 226	315 97· 933	314 17· 739	56
55	314 58· 342	313 17· 610	311 21· 815	57
56	311 58· 931	310 07· 338	307 95· 116	58
57	308 27· 543	306 64· 702	304 35· 255	59
58	304 61· 645	302 87· 215	300 39· 787	60
59	300 58· 648	298 72· 344	296 06· 239	61
60	296 15· 936	294 17· 538	291 32· 138	62
61	291 30· 898	289 20· 265	286 15· 051	63
62	286 00· 975	283 78· 059	280 52· 632	64
63	280 23· 708	277 88· 571	274 42· 681	65
64	273 96· 808	271 49· 632	267 83· 206	66
65	267 18· 225	264 59· 331	260 72· 500	67
66	259 86· 236	257 16· 097	253 09· 230	68
67	251 99· 536	249 18· 797	244 92· 529	69
68	243 57· 348	240 66· 835	236 22· 102	70
69	234 59· 538	231 60· 273	226 98· 338	71
70	225 06· 732	221 99· 940	217 22· 421	72
71	215 00· 445	211 87· 559	206 96· 450	73
72	204 43· 198	201 25· 863	196 23· 545	74
73	193 38· 635	190 18· 696	185 07· 942	75
74	181 91· 617	178 71· 109	173 55· 074	76
75	170 08· 294	166 89· 418	161 71· 618	77
76	157 96· 140	154 81· 232	149 65· 496	78
77	145 63· 940	142 55· 427	137 45· 841	79
78	133 21· 717	130 22· 064	125 22· 890	80
79	120 80· 592	117 92· 241	113 07· 812	81
80	108 52· 568	105 77· 865	101 12· 467	82
			894 9·0 836	83
			782 9·8 752	84
			676 6·5 922	85
			577 0·0 459	86
			484 9·6 219	87
			401 2·8 253	88
			326 4·8 949	89
			260 8·5 274	90
			204 3·7 464	91
			156 7·9 405	92
			117 6·0 783	93
			861 ·08 935	94
			614 ·37 801	95
			426 ·42 117	96
			287 ·38 847	97
			187 ·72 094	98
			118 ·61 237	99
			72· 353 686	100
			42· 523 157	101
			24· 028 676	102
			13· 027 677	103
			6·7 627 284	104
			3·3 540 934	105
			1·5 860 118	106
			·71 350 781	107
			·30 474 896	108
			·12 332 121	109

Tablica mortaliteta LAT: A1967-70

Osnovne funkcije

[x]	$d_{[x]}$	$d_{[x]+1}$	d_{x+2}	dob x+2
			25· 176 970	0
			23· 435 400	1
0	19· 999 217	21· 021 460	21· 697 444	2
1	18· 606 740	19· 629 842	19· 962 840	3
2	17· 216 920	17· 896 644	18· 231 325	4
3	15· 829 905	16· 510 563	16· 846 443	5
4	14· 445 153	15· 126 662	15· 463 642	6
5	13· 406 516	14· 088 533	14· 426 238	7
6	12· 369 305	13· 051 788	13· 733 504	8
7	11· 676 981	12· 359 659	13· 041 610	9
8	10· 985 484	11· 668 342	12· 693 584	10
9	10· 294 772	11· 320 852	12· 688 888	11
10	10· 290 963	11· 316 663	12· 684 193	12
11	10· 287 155	11· 312 476	13· 707 567	13
12	10· 283 349	12· 336 317	16· 099 949	14
13	10· 964 628	14· 386 469	20· 885 857	15
14	13· 015 027	18· 830 380	27· 716 762	16
15	16· 773 807	24· 977 304	36· 083 978	17
16	22· 236 135	32· 778 690	34· 045 471	18
17	28· 662 738	30· 638 927	32· 120 924	19
18	26· 468 621	28· 641 478	30· 320 482	20
19	24· 434 783	26· 794 348	28· 654 305	21
20	22· 568 487	25· 106 258	27· 134 610	22
21	20· 876 020	23· 586 299	25· 773 968	23
22	19· 364 397	22· 244 956	24· 587 343	24
23	18· 042 041	21· 092 742	23· 590 041	25
24	16· 916 055	20· 140 870	22· 800 087	26
25	15· 995 957	19· 402 610	22· 235 837	27
26	15· 289 937	18· 890 223	21· 918 678	28
27	14· 807 903	18· 618 338	21· 871 653	29
28	14· 559 430	18· 601 570	22· 120 120	30
29	14· 555 107	18· 856 185	22· 691 713	31
30	14· 805 835	19· 399 406	23· 616 313	32
31	15· 323 141	20· 249 033	24· 927 346	33
32	16· 118 473	21· 424 089	26· 660 702	34
33	17· 204 181	22· 945 101	28· 856 012	35
34	18· 593 127	24· 833 027	31· 555 531	36
35	20· 298 639	27· 110 873	34· 806 376	37
36	22· 334 104	29· 801 908	38· 658 678	38
37	24· 713 228	32· 931 249	43· 166 743	39
38	27· 450 286	36· 524 371	48· 390 486	40
39	30· 559 671	40· 608 638	54· 392 787	41
40	34· 055 430	45· 211 429	61· 242 823	42
41	37· 952 462	50· 361 593	69· 013 943	43
42	42· 264 654	56· 088 838	77· 784 809	44
43	47· 006 022	62· 422 750	87· 639 072	45
44	52· 189 802	69· 394 085	98· 666 249	46
45	57· 828 832	77· 032 663	110 ·96 010	47
46	63· 934 240	85· 368 516	124 ·61 914	48
47	70· 516 402	94· 430 954	139 ·74 659	49
48	77· 583 527	104 ·24 754	156 ·44 940	50
49	85· 141 837	114 ·84 459	174 ·83 759	51
50	93· 195 017	126 ·24 462	195 ·02 226	52
51	101 ·74 264	138 ·46 756	217 ·11 551	53
52	110 ·78 141	151 ·52 826	241 ·22 717	54

[x]	$d_{[x]}$	$d_{[x]+1}$	d_{x+2}	dob x+2
53	120 ·30 282	165 ·43 636	267 ·46 367	55
54	130 ·29 323	180 ·19 385	295 ·92 431	56
55	140 ·73 267	195 ·79 456	326 ·69 876	57
56	151 ·59 350	212 ·22 166	359 ·86 126	58
57	162 ·84 064	229 ·44 710	395 ·46 749	59
58	174 ·42 947	247 ·42 777	433 ·54 803	60
59	186 ·30 410	266 ·10 433	474 ·10 129	61
60	198 ·39 834	285 ·39 954	517 ·08 729	62
61	210 ·63 300	305 ·21 436	562 ·41 852	63
62	222 ·91 514	325 ·42 710	609 ·95 119	64
63	235 ·13 712	345 ·88 962	659 ·47 534	65
64	247 ·17 647	366 ·42 582	710 ·70 576	66
65	258 ·89 480	386 ·83 065	763 ·27 009	67
66	270 ·13 861	406 ·86 723	816 ·70 101	68
67	280 ·73 896	426 ·26 792	870 ·42 676	69
68	290 ·51 252	444 ·73 322	923 ·76 451	70
69	299 ·26 511	461 ·93 488	975 ·91 662	71
70	306 ·79 264	477 ·51 848	102 5·9 708	72
71	312 ·88 565	491 ·10 898	107 2·9 056	73
72	317 ·33 547	502 ·31 798	111 5·6 028	74
73	319 ·93 915	510 ·75 392	115 2·8 673	75
74	320 ·50 791	516 ·03 434	118 3·4 569	76
75	318 ·87 523	517 ·80 072	120 6·1 218	77
76	314 ·90 742	515 ·73 651	121 9·6 548	78
77	308 ·51 288	509 ·58 574	122 2·9 514	79
78	299 ·65 297	499 ·17 412	121 5·0 778	80
79	288 ·35 166	484 ·42 902	119 5·3 452	81
80	274 ·70 314	465 ·39 868	116 3·3 830	82
			111 9·2 085	83
			106 3·2 830	84
			996 ·54 635	85
			920 ·42 398	86
			836 ·79 658	87
			747 ·93 036	88
			656 ·36 749	89
			564 ·78 102	90
			475 ·80 596	91
			391 ·86 219	92
			314 ·98 893	93
			246 ·71 135	94
			187 ·95 684	95
			139 ·03 270	96
			99· 667 530	97
			69· 108 564	98
			46· 258 687	99
			29· 830 529	100
			18· 494 482	101
			11· 000 998	102
			6·2 649 489	103
			3·4 086 350	104
			1·7 680 816	105
			·87 250 397	106
			·40 875 886	107
			·18 142 775	108
			·07 613 658	109

Tablica mortaliteta LAT: A1967-70

Osnovne funkcije

[x]	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	q_{x+2}	dob $x+2$
			·00 073 000	0
			·00 068 000	1
0	·00 058 000	·00 061 000	·00 063 000	2
1	·00 054 000	·00 057 000	·00 058 000	3
2	·00 050 000	·00 052 000	·00 053 000	4
3	·00 046 000	·00 048 000	·00 049 000	5
4	·00 042 000	·00 044 000	·00 045 000	6
5	·00 039 000	·00 041 000	·00 042 000	7
6	·00 036 000	·00 038 000	·00 040 000	8
7	·00 034 000	·00 036 000	·00 038 000	9
8	·00 032 000	·00 034 000	·00 037 000	10
9	·00 030 000	·00 033 000	·00 037 000	11
10	·00 030 000	·00 033 000	·00 037 000	12
11	·00 030 000	·00 033 000	·00 040 000	13
12	·00 030 000	·00 036 000	·00 047 000	14
13	·00 032 000	·00 042 000	·00 061 000	15
14	·00 038 000	·00 055 000	·00 081 000	16
15	·00 049 000	·00 073 000	·00 105 538	17
16	·00 065 000	·00 095 880	·00 099 681	18
17	·00 083 859	·00 089 716	·00 094 140	19
18	·00 071 522	·00 083 951	·00 088 947	20
19	·00 071 637	·00 078 611	·00 084 134	21
20	·00 066 228	·00 073 724	·00 079 739	22
21	·00 061 316	·00 069 319	·00 075 801	23
22	·00 056 924	·00 065 429	·00 072 366	24
23	·00 053 079	·00 062 087	·00 069 481	25
24	·00 049 804	·00 059 328	·00 067 201	26
25	·00 047 129	·00 057 193	·00 065 582	27
26	·00 045 080	·00 055 720	·00 064 689	28
27	·00 043 688	·00 054 954	·00 064 592	29
28	·00 042 983	·00 054 940	·00 065 368	30
29	·00 042 998	·00 055 728	·00 067 101	31
30	·00 043 767	·00 057 371	·00 069 882	32
31	·00 045 326	·00 059 924	·00 073 813	33
32	·00 047 711	·00 063 446	·00 079 004	34
33	·00 050 961	·00 068 001	·00 085 577	35
34	·00 055 117	·00 073 655	·00 093 663	36
35	·00 060 222	·00 080 481	·00 103 409	37
36	·00 066 320	·00 088 554	·00 114 973	38
37	·00 073 457	·00 097 956	·00 128 528	39
38	·00 081 682	·00 108 772	·00 144 267	40
39	·00 091 046	·00 121 095	·00 162 396	41
40	·00 101 601	·00 135 021	·00 183 145	42
41	·00 113 404	·00 150 654	·00 206 673	43
42	·00 126 512	·00 168 105	·00 233 523	44
43	·00 140 986	·00 187 490	·00 263 723	45
44	·00 156 889	·00 208 935	·00 297 691	46
45	·00 174 288	·00 232 571	·00 335 783	47
46	·00 193 251	·00 258 539	·00 378 388	48
47	·00 213 851	·00 286 989	·00 425 932	49
48	·00 236 163	·00 318 079	·00 478 880	50
49	·00 260 266	·00 351 979	·00 537 740	51
50	·00 286 243	·00 388 866	·00 603 064	52
51	·00 314 178	·00 428 931	·00 675 456	53
52	·00 344 162	·00 472 375	·00 755 572	54

[x]	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	q_{x+2}	dob $x+2$
53	·00 376 288	·00 519 413	·00 844 128	55
54	·00 410 654	·00 570 271	·00 941 902	56
55	·00 447 362	·00 625 190	·01 049 742	57
56	·00 486 517	·00 684 424	·01 168 566	58
57	·00 528 231	·00 748 245	·01 299 373	59
58	·00 572 620	·00 816 938	·01 443 246	60
59	·00 619 802	·00 890 805	·01 601 356	61
60	·00 669 904	·00 970 168	·01 774 972	62
61	·00 723 057	·01 055 365	·01 965 464	63
62	·00 779 397	·01 146 756	·02 174 310	64
63	·00 839 065	·01 244 719	·02 403 101	65
64	·00 902 209	·01 349 653	·02 653 550	66
65	·00 968 982	·01 461 982	·02 927 491	67
66	·01 039 545	·01 582 150	·03 226 890	68
67	·01 114 064	·01 710 628	·03 553 846	69
68	·01 192 710	·01 847 909	·03 910 594	70
69	·01 275 665	·01 994 514	·04 299 507	71
70	·01 363 115	·02 150 990	·04 723 096	72
71	·01 455 252	·02 317 912	·05 184 008	73
72	·01 552 279	·02 495 883	·05 685 022	74
73	·01 654 404	·02 685 536	·06 229 041	75
74	·01 761 844	·02 887 534	·06 819 083	76
75	·01 874 822	·03 102 569	·07 458 263	77
76	·01 993 572	·03 331 366	·08 149 779	78
77	·02 118 334	·03 574 679	·08 896 883	79
78	·02 249 357	·03 833 295	·09 702 855	80
79	·02 386 900	·04 108 032	·10 570 968	81
80	·02 531 227	·04 399 741	·11 504 443	82
			·12 506 403	83
			·13 579 820	84
			·14 727 448	85
			·15 951 762	86
			·17 254 883	87
			·18 638 498	88
			·20 103 786	89
			·21 651 335	90
			·23·281 066	91
			·24 992 160	92
			·26 782 990	93
			·28 651 074	94
			·30 593 028	95
			·32 604 550	96
			·34 680 421	97
			·36 814 521	98
			·38 999 883	99
			·41 228 762	100
			·43 492 729	101
			·45 782 791	102
			·48 089 531	103
			·50 403 251	104
			·52 714 144	105
			·55 012 452	106
			·57 288 631	107
			·59 533 510	108
			·61 738 430	109

Tablica mortaliteta LAT: A1967-70

Osnovne funkcije

[x]	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	q_{x+2}	dob $x+2$
			·00 073 000	0
			·00 068 000	1
0	·00 058 000	·00 061 000	·00 063 000	2
1	·00 054 000	·00 057 000	·00 058 000	3
2	·00 050 000	·00 052 000	·00 053 000	4
3	·00 046 000	·00 048 000	·00 049 000	5
4	·00 042 000	·00 044 000	·00 045 000	6
5	·00 039 000	·00 041 000	·00 042 000	7
6	·00 036 000	·00 038 000	·00 040 000	8
7	·00 034 000	·00 036 000	·00 038 000	9
8	·00 032 000	·00 034 000	·00 037 000	10
9	·00 030 000	·00 033 000	·00 037 000	11
10	·00 030 000	·00 033 000	·00 037 000	12
11	·00 030 000	·00 033 000	·00 040 000	13
12	·00 030 000	·00 036 000	·00 047 000	14
13	·00 032 000	·00 042 000	·00 061 000	15
14	·00 038 000	·00 055 000	·00 081 000	16
15	·00 049 000	·00 073 000	·00 105 538	17
16	·00 065 000	·00 095 880	·00 099 681	18
17	·00 083 859	·00 089 716	·00 094 140	19
18	·00 071 522	·00 083 951	·00 088 947	20
19	·00 071 637	·00 078 611	·00 084 134	21
20	·00 066 228	·00 073 724	·00 079 739	22
21	·00 061 316	·00 069 319	·00 075 801	23
22	·00 056 924	·00 065 429	·00 072 366	24
23	·00 053 079	·00 062 087	·00 069 481	25
24	·00 049 804	·00 059 328	·00 067 201	26
25	·00 047 129	·00 057 193	·00 065 582	27
26	·00 045 080	·00 055 720	·00 064 689	28
27	·00 043 688	·00 054 954	·00 064 592	29
28	·00 042 983	·00 054 940	·00 065 368	30
29	·00 042 998	·00 055 728	·00 067 101	31
30	·00 043 767	·00 057 371	·00 069 882	32
31	·00 045 326	·00 059 924	·00 073 813	33
32	·00 047 711	·00 063 446	·00 079 004	34
33	·00 050 961	·00 068 001	·00 085 577	35
34	·00 055 117	·00 073 655	·00 093 663	36
35	·00 060 222	·00 080 481	·00 103 409	37
36	·00 066 320	·00 088 554	·00 114 973	38
37	·00 073 457	·00 097 956	·00 128 528	39
38	·00 081 682	·00 108 772	·00 144 267	40
39	·00 091 046	·00 121 095	·00 162 396	41
40	·00 101 601	·00 135 021	·00 183 145	42
41	·00 113 404	·00 150 654	·00 206 673	43
42	·00 126 512	·00 168 105	·00 233 523	44
43	·00 140 986	·00 187 490	·00 263 723	45
44	·00 156 889	·00 208 935	·00 297 691	46
45	·00 174 288	·00 232 571	·00 335 783	47
46	·00 193 251	·00 258 539	·00 378 388	48
47	·00 213 851	·00 286 989	·00 425 932	49
48	·00 236 163	·00 318 079	·00 478 880	50
49	·00 260 266	·00 351 979	·00 537 740	51
50	·00 286 243	·00 388 866	·00 603 064	52
51	·00 314 178	·00 428 931	·00 675 456	53
52	·00 344 162	·00 472 375	·00 755 572	54

[x]	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	q_{x+2}	dob $x+2$
53	·00 376 288	·00 519 413	·00 844 128	55
54	·00 410 654	·00 570 271	·00 941 902	56
55	·00 447 362	·00 625 190	·01 049 742	57
56	·00 486 517	·00 684 424	·01 168 566	58
57	·00 528 231	·00 748 245	·01 299 373	59
58	·00 572 620	·00 816 938	·01 443 246	60
59	·00 619 802	·00 890 805	·01 601 356	61
60	·00 669 904	·00 970 168	·01 774 972	62
61	·00 723 057	·01 055 365	·01 965 464	63
62	·00 779 397	·01 146 756	·02 174 310	64
63	·00 839 065	·01 244 719	·02 403 101	65
64	·00 902 209	·01 349 653	·02 653 550	66
65	·00 968 982	·01 461 982	·02 927 491	67
66	·01 039 545	·01 582 150	·03 226 890	68
67	·01 114 064	·01 710 628	·03 553 846	69
68	·01 192 710	·01 847 909	·03 910 594	70
69	·01 275 665	·01 994 514	·04 299 507	71
70	·01 363 115	·02 150 990	·04 723 096	72
71	·01 455 252	·02 317 912	·05 184 008	73
72	·01 552 279	·02 495 883	·05 685 022	74
73	·01 654 404	·02 685 536	·06 229 041	75
74	·01 761 844	·02 887 534	·06 819 083	76
75	·01 874 822	·03 102 569	·07 458 263	77
76	·01 993 572	·03 331 366	·08 149 779	78
77	·02 118 334	·03 574 679	·08 896 883	79
78	·02 249 357	·03 833 295	·09 702 855	80
79	·02 386 900	·04 108 032	·10 570 968	81
80	·02 531 227	·04 399 741	·11 504 443	82
			·12 506 403	83
			·13 579 820	84
			·14 727 448	85
			·15 951 762	86
			·17 254 883	87
			·18 638 498	88
			·20 103 786	89
			·21 651 335	90
			·23·281 066	91
			·24 992 160	92
			·26 782 990	93
			·28 651 074	94
			·30 593 028	95
			·32 604 550	96
			·34 680 421	97
			·36 814 521	98
			·38 999 883	99
			·41 228 762	100
			·43 492 729	101
			·45 782 791	102
			·48 089 531	103
			·50 403 251	104
			·52 714 144	105
			·55 012 452	106
			·57 288 631	107
			·59 533 510	108
			·61 738 430	109

Tablica mortaliteta LAT: A1967-70

Zamjenske funkcije

i = 4%

	SELECT			ULTIMATE			
x	$D_{[x]}$	$N_{[x]}$	$S_{[x]}$	D_x	N_x	S_x	x
0	344 81· 408	835 833 ·48	180 511 94·	344 89· 000	835 843 ·39	180 512 06·	0
1	331 31· 660	801 345 ·85	172 153 52·	331 38· 291	801 354 ·39	172 153 63·	1
2	318 36· 022	768 208 ·21	164 139 98·	318 42· 074	768 216 ·10	164 140 08·	2
3	305 92· 886	736 367 ·35	156 457 84·	305 98· 090	736 374 ·03	156 457 92·	3
4	293 99· 470	705 769 ·82	149 094 10·	294 04· 176	705 775 ·94	149 094 18·	4
5	282 54· 304	676 366 ·72	142 036 36·	282 58· 262	676 371 ·76	142 036 42·	5
6	271 54· 560	648 108 ·92	135 272 65·	271 58· 091	648 113 ·50	135 272 70·	6
7	260 98· 665	620 951 ·27	128 791 52·	261 01· 798	620 955 ·41	128 791 57·	7
8	250 84· 331	594 849 ·63	122 581 96·	250 87· 342	594 853 ·61	122 582 01·	8
9	241 09· 901	569 762 ·45	116 633 43·	241 12· 795	569 766 ·27	116 633 48·	9
10	231 74· 019	545 650 ·03	110 935 77·	231 76· 570	545 653 ·47	110 935 81·	10
11	222 74· 466	522 473 ·60	105 479 24·	222 76· 917	522 476 ·90	105 479 28·	11
12	214 09· 831	500 196 ·81	100 254 47·	214 12· 188	500 199 ·99	100 254 51·	12
13	205 78· 348	478 784 ·13	952 524 6·5	205 81· 024	478 787 ·80	952 525 1·1	13
14	197 78· 562	458 202 ·67	904 645 8·1	197 81· 530	458 206 ·77	904 646 3·3	14
15	190 07· 958	438 419 ·98	858 824 9·8	190 11· 763	438 425 ·24	858 825 6·6	15
16	182 64· 699	419 407 ·09	814 982 3·2	182 69· 390	419 413 ·48	814 983 1·3	16
17	175 46· 933	401 136 ·85	773 040 8·9	175 52· 492	401 144· 09	773 041 7·8	17
18	168 54· 126	383 584 ·49	732 926 5·0	168 59· 584	383 591 ·60	732 927 3·7	18
19	161 89· 657	366 725 ·08	694 567 3·6	161 94· 979	366 732 ·02	694 568 2·1	19
20	155 52· 279	350 530 ·32	657 894 1·8	155 57· 436	350 537 ·04	657 895 0·1	20
21	149 40· 797	334 973 ·13	622 840 5·1	149 45· 767	334 979 ·60	622 841 3·1	21
22	143 54· 071	320 027 ·63	589 342 5·8	143 58· 839	320 033 ·83	589 343 3·5	22
23	137 91· 012	305 669 ·08	557 339 2·4	131 95· 567	305 674 ·99	557 339 9·6	23
24	132 50· 575	291 873 ·80	526 771 7·7	132 54· 913	291 879 ·43	526 772 4·6	24
25	127 31· 763	278 619 ·17	497 583 8·6	127 35· 886	278 624 ·51	497 584 5·2	25
26	122 33· 620	265 883 ·55	469 721 4·5	122 37· 535	265 888 ·63	469 722 0·7	26
27	117 55· 233	253 646 ·27	443 132 6·2	117 58· 953	253 651 ·09	443 133 2·1	27
28	112 95· 726	241 887 ·55	417 767 5·3	112 99· 271	241 892 ·14	417 768 1·0	28
29	108 54· 263	230 588 ·47	393 578 3·4	108 57· 655	230 592 ·87	393 578 8·8	29
30	104 30· 039	219 730 ·97	370 519 0·7	104 33· 310	219 735 ·21	370 519 6·0	30
31	100 22· 288	209 297 ·76	348 545 5·7	100 25· 471	209 301 ·91	348 546 0·8	31
32	963 0·2 713	199 272 ·34	327 615 3·8	963 3·4 073	199 276 ·43	327 615 8·9	32
33	925 3·2 832	189 638 ·91	307 687 7·3	925 6·4 185	189 643 ·03	307 688 2·4	33
34	889 0·6 463	180 382 ·40	288 723 4·2	889 3·8 327	180 386 ·61	288 723 9·4	34
35	854 1·7 111	171 488 ·40	270 684 7·3	854 5·0 060	171 492 ·78	270 685 2·8	35
36	820 5·8 542	162 943 ·13	253 535 4·2	820 9·3 206	162 947 ·77	253 536 0·0	36
37	788 2·4 775	154 733 ·45	237 240 5·9	788 6·1 842	154 738 ·45	237 241 2·2	37
38	757 1·0 065	146 846 ·80	221 766 6·9	757 5·0 280	146 852 ·27	221 767 3·8	38
39	727 0·8 899	139 271 ·20	207 081 3·9	727 5·3 065	139 277 ·24	207 082 1·5	39
40	698 1·5 977	131 995 ·19	193 153 5·7	698 6·4 959	132 001 ·93	193 154 4·3	40
41	670 2·6 211	125 007 ·87	179 953 2·7	670 8·0 930	125 015 ·43	179 954 2·4	41
42	643 3·4 709	118 298 ·80	167 451 6·0	643 9·6 147	118 307 ·34	167 452 6·9	42
43	617 3·6 773	111 858 ·07	155 620 7·2	618 0·5 970	111 867 ·73	155 621 9·6	43
44	592 2·7 885	105 676 ·20	144 433 7·8	593 0·5 940	105 687 ·13	144 435 1·9	44
45	568 3·3 705	997 44· 168	133 864 8·8	568 9·1 776	997 56· 536	133 866 4·7	45
46	544 6·0 064	940 53· 378	123 889 0·2	545 5·9 365	940 67· 358	123 890 8·2	46
47	521 9·2 958	885 95· 648	114 482 0·5	523 0·4 756	886 11· 422	114 484 0·8	47
48	499 9·8 546	833 63· 190	105 620 6·5	501 2·4 160	833 80· 946	105 622 9·4	48
49	478 7·3 144	783 48· 597	972 822 ·67	480 1·3 938	783 68· 530	972 848 ·46	49
50	458 1·3 224	735 44· 823	894 451 ·04	459 7·0 607	735 67· 136	894 479 ·93	50
51	438 1·5 413	689 45· 176	820 880 ·53	439 9·0 830	689 70· 076	820 912 ·79	51
52	418 7·6 496	645 43· 296	751 906 ·81	420 7·1 417	645 70· 993	751 942 ·72	52
53	399 9·3 411	603 33. 143	687 331 ·90	402 0·9 326	603 63· 851	687 371 ·72	53
54	381 6·3 261	563 08· 985	626 963 ·84	384 0·1 664	563 42· 918	627 007 ·87	54

Tablica mortaliteta LAT: A1967-70

Zamjenske funkcije

$i = 4\%$

	SELECT			ULTIMATE			
x	$D_{[x]}$	$N_{[x]}$	$S_{[x]}$	D_x	N_x	S_x	x
55	363 8·3 307	524 65· 379	570 616 ·44	366 4·5 684	525 02· 752	570 664 ·95	55
56	346 5·0 983	487 9·7 161	518 108 ·94	349 3·8 796	488 38· 184	518 162 ·20	56
57	329 6·3 898	452 99· 429	469 265 ·73	332 7·8 564	453 44· 304	469 324 ·02	57
58	313 1·9 850	419 67· 525	423 916 ·16	316 6·2 716	420 16· 448	423 979 ·71	58
59	297 1·6 826	387 97· 026	381 894 ·20	300 8·9 150	388 50· 176	381 963 ·27	59
60	281 5·3 028	357 83· 721	343 038 ·30	285 5·5 942	358 41· 261	343 113 ·09	60
61	266 2·6 874	329 23· 597	307 191 ·14	270 6·1 356	329 85· 667	307 271 ·83	61
62	251 3·7 020	302 12· 820	274 199 ·42	256 0·3 853	302 79· 531	274 286 ·16	62
63	236 8·2 373	276 47· 715	243 913 ·74	241 8·2 107	277 19· 146	244 006 ·63	63
64	222 6·2 106	252 24· 747	216 188 ·40	227 9·5 016	253 00· 935	216 287 ·48	64
65	208 7·5 676	229 40· 498	190 881 ·28	214 4·1 713	230 21· 434	190 986 ·55	65
66	195 2·2 839	207 91· 642	167 853 ·75	201 2·1 584	208 77· 262	167 965 ·12	66
67	182 0·3 664	187 74· 923	146 970 ·55	188 3·4 277	188 65· 104	147 087 ·85	67
68	169 1·8 542	168 87· 127	128 099 ·77	175 7·9 716	169 81· 616	128 222 ·75	68
69	156 6·8 197	151 25· 055	111 112 ·76	163 5·8 114	152 23· 705	111 241 ·07	69
70	144 5·3 689	134 85· 489	958 84· 189	151 6·9 972	135 87· 893	960 17· 369	70
71	132 7·6 401	119 65· 170	822 91· 992	140 1·6 093	120 70· 896	824 29· 475	71
72	121 3·8 036	105 60· 758	702 17· 476	128 9·7 567	106 69· 287	703 58· 579	72
73	110 4·0 584	926 8·8 080	595 45· 368	118 1·5 772	937 9·5 300	596 89· 293	73
74	998 ·62 904	808 5·7 327	501 63· 928	107 7·2 347	819 7·9 528	503 09· 763	74
75	897 ·76 009	700 7·7 767	419 65· 084	976 ·91 702	712 0·7 181	421 11· 810	75
76	801 ·70 978	603 0·9 878	348 44· 587	880 ·83 121	614 3·8 011	349 91· 092	76
77	710 ·74 161	515 1·1 932	287 02· 194	789 ·19 865	526 2·9 698	288 47· 291	77
78	625 ·11 472	436 3·9 811	234 41· 874	702 ·24 821	447 3·7 712	235 84· 321	78
79	545 ·07 270	366 4·6 888	189 72· 017	620 ·20 821	377 1·5 230	191 10· 550	79
80	470 ·83 137	304 ·83 988	152 05· 661	543 ·29 713	315 1·3 148	153 39· 027	80
81				471 ·71 326	260 8·0 176	121 87· 712	81
82				405 ·62 366	213 6·3 044	957 9·6 944	82
83				345 ·15 280	173 0·6 807	744 3·3 900	83
84				290 ·37 173	138 5·5 279	571 2·7 093	84
85				241 ·28 824	109 5·1 562	432 7·1 814	85
86				197 ·83 908	853 ·86 794	323 2·0 252	86
87				159 ·88 487	656 ·02 886	237 8·1 572	87
88				127 ·20 858	496 ·14 399	172 2·1 284	88
89				99· 518 086	368 ·93 541	122 5·9 844	89
90				76· 453 060	269 ·41 733	857 ·04 898	90
91				57· 596 108	192 ·96 427	587 ·63 165	91
92				42· 487 615	135 ·36 816	394 ·66 739	92
93				30· 643 310	92· 880 543	259 ·29 923	93
94				21· 573 188	62· 237 233	166 ·41 869	94
95				14· 800 229	40· 664 045	104 ·18 145	95
96				9·8 772 987	25· 863 816	63· 517 408	96
97				6·4 008 172	15· 986 518	37· 653 592	97
98				4·0 201 797	9·5 857 004	21· 667 074	98
99				2·4 424 709	5·5 655 208	12· 081 374	99
100				1·4 326 059	3·1 230 498	6·5 158 530	100
101				·80 957 713	1·6 904 439	3·3 928 032	101
102				·43 987 495	·88 086 681	1·7 023 592	102
103				·22 931 531	·44 099 186	·82 149 243	103
104				·11 446 024	·21 167 655	·38 050 057	104
105				·05 458 515	·09 721 631	·16 882 401	105
106				·02 481 832	·04 263 116	·07 160 770	106
107				·01 073 573	·01 781 284	·02 897 654	107
108				·00 440 902	·00 707 711	·01 116 370	108
109				·00 171 555	·00 266 810	·00 408 659	109

Tablica mortaliteta LAT: A1967-70

Zamjenske funkcije

i **= 4%**

	SELECT			ULTIMATE			
x	$C_{[x]}$	$M_{[x]}$	$R_{[x]}$	C_x	M_x	R_x	x
0	19· 230 016	233 3·9 667	141 556 ·80	24· 208 625	234 1·1 771	141 566 ·24	0
1	17· 202 977	231 0·6 661	139 216 ·93	21· 667 344	231 6·9 685	139 225 ·07	1
2	15· 305 780	228 9·5 518	136 900 ·58	19· 288 949	229 5·3 012	136 908 ·10	2
3	13· 531 469	227 1·0 650	134 606 ·44	17· 064 320	227 6·0 122	134 612 ·80	3
4	11· 872 863	225 4·4 768	132 330 ·95	14· 984 821	225 8·9 479	132 336 ·79	4
5	10· 595 364	224 0·1 995	130 073 ·03	13· 313 989	224 3·9 631	130 077 ·84	5
6	9·3 996 553	222 7·2 934	127 829 ·51	11· 751 097	223 0·6 491	127 833 ·87	6
7	8·5 322 559	221 5·9 239	125 599 ·29	10· 541 111	221 8·8 980	125 603 ·23	7
8	7·7 182 555	220 5·4 984	123 380 ·54	9·6 489 777	220 8.3 569	123 384 ·33	8
9	6·9 547 791	219 5·9 605	121 172 ·33	8·8 104 444	219 8·7 079	121 175 ·97	9
10	6·6 848 133	218 7·4 797	118 973 ·99	8·2 455 103	218 9·8 975	118 977 ·26	10
11	6·4 253 268	217 9·3 280	116 784 ·22	7·9 254 418	218 1·6 520	116 787 ·36	11
12	6·1 759 129	217 1·4 928	114 602 ·69	7·6 177 975	217 3·7 265	114 605 ·71	12
13	6·3 317 993	216 3·5 733	112 428 ·50	7·9 157 785	216 6·1 087	112 431 ·99	13
14	7·2 267 823	215 5·3 826	110 261 ·97	8·9 397 301	215 8·1 929	110 265 ·88	14
15	8·9 556 726	214 5·6 514	108 102 ·68	11· 151 130	214 9·2 532	108 107 ·68	15
16	11· 415 437	213 3·6 569	105 952 ·35	14· 229 044	213 8·1 021	105 958 ·43	16
17	14· 148 733	211 8·5 928	103 813 ·43	17· 812 066	212 3.8 730	103 820 ·33	17
18	12· 563 131	210 0·8 767	101 689 ·68	16· 159 425	210 6·0 610	101 696 ·46	18
19	11· 151 716	208 4·8 463	995 83· 793	14· 659 570	208 9·9 015	995 90· 395	19
20	9·9 038 106	207 0·3 430	974 94· 098	13· 305 646	207 5·2 420	975 00· 494	20
21	8·8 087 489	205 7·2 146	954 19· 091	12· 090 838	206 1·9 363	954 25· 252	21
22	7·8 566 457	204 5·3 162	933 57· 410	11· 009 226	204 9·8 455	933 63· 316	22
23	7·0 385 877	203 4·5 090	913 07· 832	10· 054 978	203 8·8 363	913 13· 470	23
24	6·3 454 964	202 4·6 596	892 69· 268	9·2 231 254	202 8·7 813	892 74· 634	24
25	5·7 695 696	201 5·6 408	872 40· 757	8·5 086 738	201 9·5 582	872 45· 853	25
26	5·3 028 036	200 7·3 292	852 21· 458	7·9 074 481	201 1·0 495	852 26· 294	26
27	4·9 381 019	199 9·6 067	832 10· 651	7·4 151 508	200 3·1 420	832 15· 245	27
28	4·6 685 019	199 2·3 589	812 07· 727	7·0 282 551	199 5·7 269	812 12· 103	28
29	4·4 876 113	198 5·4 752	792 12· 185	6·7 434 391	198 8·6 986	792 16· 376	29
30	4·3 893 417	197 8·8 483	772 23· 632	6·5 577 364	198 1·9 552	772 27· 677	30
31	4·3 679 829	197 2·3 740	752 41· 776	6·4 684 530	197 5.1 975	752 45· 722	31
32	4·4 179 796	196 5·9 506	732 66· 423	6·4 730 939	196 8·9 290	732 70· 325	32
33	4·5 341 977	195 9·4 789	712 97· 477	6·5 696 540	196 2·4 559	713 01· 396	33
34	4·7 117 861	195 2·8 615	693 34· 935	6·7 562 343	195 5·8 863	693 38· 940	34
35	4·9 461 435	194 6·0 035	673 78· 886	7·0 313 075	194 9·1 300	673 83· 054	35
36	5·2 328 101	193 8·8 107	654 29· 508	7·3 933 615	194 2·0 987	654 33· 924	36
37	5·5 675 303	193 1·1 908	634 87· 070	7·8 413 694	193 4·7 054	634 91· 825	37
38	5·9 462 976	192 3·0 525	615 51· 924	8·3 742 663	192 6·8 640	615 57· 120	38
39	6·3 652 446	191 4·3 053	596 24· 513	8·9 911 596	191 8·4 897	596 30· 256	39
40	6·8 205 510	190 4·8 595	577 05· 359	9·6 915 462	190 9·4 986	577 11· 766	40
41	7·3 086 927	189 4·6 262	557 95· 072	10· 474 687	189 9·8 070	558 02· 267	41
42	7·8 260 699	188 3·5 169	538 94· 344	11· 340 223	188 9·3 323	539 02· 460	42
43	8·3 692 506	187 1·4 437	520 03· 950	12· 287 681	187 7·9 921	520 13· 128	43
44	8·9 348 112	185 8·3 192	501 24· 747	13· 316 636	186 5·7 044	501 35· 136	44
45	9·5 194 271	184 4·0 564	482 57· 676	14· 426 606	185 2·3 878	482 69· 431	45
46	10· 119 675	182 8·5 688	464 03· 756	15. 617 146	183 7·9 612	464 17· 044	46
47	10· 732 227	181 1·7 709	445 64· 092	16· 887 546	182 2·3 440	445 79· 082	47
48	11· 353 660	179 3·5 781	427 39· 865	18· 236 904	180 5·4 565	427 56· 738	48
49	11· 980 530	177 3·9 068	409 32· 340	19· 664 108	178 7·2 196	409 51· 282	49
50	12· 609 341	175 2·6 753	391 42· 860	21· 167 697	176 7·5 555	391 6·4 062	50
51	13· 236 384	172 9·8 038	373 72· 848	22· 745 797	174 6·3 878	373 96· 507	51
52	13· 857 979	170 5·2 151	356 23· 803	24· 395 920	172 3·6 420	356 50· 119	52
53	14· 470 232	167 8·8 356	338 97· 301	26· 115 030	169 9·2 461	339 26· 477	53
54	15· 069 130	165 0·5 959	321 94· 991	27· 899 252	167 3·1 310	322 27· 231	54

Tablica mortaliteta LAT: A1967-70

Zamjenske funkcije

i = 4%

	SELECT			ULTIMATE			
x	$C_{[x]}$	$M_{[x]}$	$R_{[x]}$	C_x	M_x	R_x	x
55	15· 650 489	162 0·4 315	305 18· 593	29· 743 892	164 5·2 318	305 54· 100	55
56	16· 209 896	158 8·2 844	288 69· 894	31· 643 194	161 5·4 879	289 08· 868	56
57	16· 742 839	155 4·1 041	272 50· 747	33· 590 294	158 3·8 447	272 93· 380	57
58	17· 244 589	151 7·8 494	256 63· 058	35· 576 898	155 0·2 544	257 09· 536	58
59	17· 710 143	147 9·4 893	241 08· 788	37· 593 298	151 4·6 775	241 59· 281	59
60	18· 134 448	143 9·0 058	225 89· 941	39· 628 125	147 7·0 842	226 44· 604	60
61	18· 512 257	139 6·3 952	211 08· 554	41· 668 139	143 7·4 561	211 67· 520	61
62	18· 838 191	135 1·6 705	196 66· 689	43· 698 194	139 5·7 879	197 30· 063	62
63	19· 106 779	130 4·8 637	182 66· 418	45· 701 021	135 2·0 897	183 34· 276	63
64	19· 312 570	125 6·0 280	169 09· 809	47· 657 146	130 6·3 887	169 82· 186	64
65	19· 450 149	120 5·2 408	155 98· 910	49· 544 810	125 8·7 316	156 75· 797	65
66	19· 514 298	115 2·6 054	143 35· 728	51· 340 028	120 9·1 868	144 17· 065	66
67	19· 500 045	109 8·2 540	131 22· 210	53· 016 515	115 7·8 467	132 07· 879	67
68	19· 402 802	104 2·3 493	119 60· 213	54· 545 971	110 4·8 302	120 50· 032	68
69	19· 218 626	985 ·08 688	108 51· 487	55· 898 285	105 0·2 843	109 45· 202	69
70	18· 944 269	926 ·69 620	979 7·6 356	57· 041 926	994 ·38 597	989 4·9 175	70
71	18· 577 412	867 ·44 125	880 0·0 931	57· 944 508	937 ·34 404	890 0·5 315	71
72	18· 116 940	807 ·62 055	786 0·0 861	58· 573 508	879 ·39 953	796 3·1 875	72
73	17· 563 064	747 ·56 578	697 8·6 016	58·.897 169	820 ·82 603	708 3·7 880	73
74	16· 917 582	687 ·63 932	615 6·3 509	58· 885 607	761 ·92 886	626 2·9 619	74
75	16· 184 042	628 ·23 021	539 3·7 350	58· 512 079	703 ·04 325	550 1·0 331	75
76	15· 367 944	569 ·74 871	469 0·8 114	57· 754 434	644 ·53 117	479 7·9 898	76
77	14· 476 809	512 ·61 880	404 7·2 626	56· 596 645	586 ·77 674	415 3·4 587	77
78	13· 520 252	457 ·26 930	346 2·3 705	55· 030 459	530 ·18 009	356 6·6 819	78
79	12· 509 942	404 ·12 313	293 4·9 958	53· 056 922	475 .14 963	303 6·5 018	79
80	11· 459 433	353 ·58 526	246 3·5 657	50· 687 819	422 ·09 271	256 1·3 522	80
81				47· 946 787	371 ·40 489	213 9·2 595	81
82				44· 869 945	323 ·45 811	176 7·8 546	82
83				41· 505 962	278 ·S8 816	144 4·3 965	83
84				37· 915 345	237 ·08 220	116 5·8 083	84
85				34· 168 847	199 ·16 685	928 ·72 613	85
86				30· 345 019	164 ·99 801	729 ·55 928	86
87				26· 526 872	134 ·65 299	564 ·56 127	87
88				22· 797 854	108 ·12 612	429 ·90 828	88
89				19· 237 407	85· 328 262	321 ·78 217	89
90				15· 916 450	66· 090 855	236 ·45 390	90
91				12· 893 258	50· 174 405	170 ·36 305	91
92				10· 210 166	37· 281 148	120 ·18 864	92
93				7·8 915 333	27· 070 981	82· 907 496	93
94				5·9 432 212	19· 179 448	55· 836 514	94
95				4·3 536 905	13· 236 227	36· 657 066	95
96				3·0 965 854	8·8 825 365	23· 420 839	96
97				2·1 344 523	5·7 859 511	14· 538 303	97
98				1·4 230 864	3·6 514 989	8·7 523 514	98
99				·91 592 385	2·2 284 124	5·1 008 525	99
100				·56 792 853	1·3 124 886	2·8 724 401	100
101				·33 856 460	·74 456 006	1·5 599 515	101
102				·19 364 137	·40 599 545	·81 539 145	102
103				·10 603 525	·21 235 408	·40 939 600	103
104				·05 547 277	·10 631 884	·19 704 191	104
105				·02 766 740	·05 084 606	·09 072 308	105
106				·01 312 805	·02 317 866	·03 987 702	106
107				·00 591 380	·01 005 062	·01 669 835	107
108				·00 252 389	·00 413 682	·00 664 774	108
109				·00 101 842	·00 161 293	·00 251 092	109

Literatura

[1] B. Dukić, D. Francišković, D. Jukić, R. Scitovski, M. Šilac-Benšić, *Strategije otplate zajma*, Financijska praksa **18**(1994), 15–26.

[2] D. Francišković, *Analiza potpune kompenzacije povećanja anuiteta zbog valutne klauzule produljenjem razdoblja otplate*, Ekonomska misao i praksa : časopis Sveučilišta u Dubrovniku. 20 (2011), 2; 313-334.

[3] D. Francišković, *Analysis of the Croatian Pensioner's Doubt 2005th*, Croatian Operational Research Review (CRORR), Split, Vol.2.(2011), 91-101.

[4] D. Francišković, *Tablice mortaliteta Republike Hrvatske (krajnje) - Osnovne i zamjenske funkcije*, (interni nastavni materijal), Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, 2008.

[5] D. Francišković, *Generalizacija kontinuiranog ukamaćivanja i strategije otplate dug*, Ekonomska analiza **24**(1990), 179–197.

[6] D. Francišković, *Continuous capitalization and debt management*, VII Conference on Applied Mathematics, Osijek, 1989, 67–77.

[7] H.U. Gerber, *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Swiss Association of Actuaries Zürich, 1990.

[8] A.K. Gupta, T. Varga, *An Introduction to Acturial Mathematics*, Mathematical Modelling: Theory and Applications, Vol.14, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht Netherland, 2002.

[9] J.J. McCutcheon, W.F. Scott, *An Introduction to the Mathematics of Finance*, The Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries in Scotland, 1986, reprint 1994.

[10] A. Neill, *Life contingencies*, Heinemann, 1977.

[11] R. Scitovski, M. Šilac-Benšić, D. Francišković, *Problemi i nesporazumi u primjeni financijske matematike*, Privreda **33**(1989), 461–472.

[12] M. Šilac, *Otplata zajma varijabilnim anuitetima*, Ekonomska analiza **23**(1989), 185-194